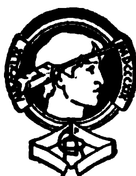

SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Emil Lampe und **Georg Wallenberg.**

Band 31.
Jahrgang 1900.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Abh. zur Gesch. d. Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **10.**

Acc. Peloritana: Atti della R. Accademia Peloritana. Messina. 8°.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. **23, 24.**

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors 4°. **24.**

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston. 8°. **35, 36.**

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb. With the cooperation of A. Cohen, F. Morley, Ch. A. Scott etc Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. **22.**

Amer. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Edited by B. F. Finkel, J. M. Colaw. Kidder Missouri. 8°. **5, 6.**

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by F. N. Cole, A. Ziwet, F. Morley, E. O. Lovett. New York. 8°. (2) **6, 7.**

American M. S. Trans.: Transactions of the American Mathematical Society. Edited by E. H. Moore, E. W. Brown, Th. S. Fiske. Lancaster, Pa., and New York: The Macmillan Company. gr. 8°. **1.**

Am. J. of science: The American Journal of Science. Editor: Edward S. Dana. Associate editors: Professors Geo. L. Goodale etc. New Haven, Connecticut. 8°. (4). **9.**

Amst. Akad. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie). 4°. **7.**

Amst. Ak. Versl.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling. 4°. **8, 9.**

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata già diretti da Francesco Brioschi e continuati dai professori L. Bianchi, L. Cremona, U. Dini, G. Jung. Milano. 4°. (3) **4, 5.**

Annals of Math.: Annals of Mathematics. (Founded by Ormond Stone.) Edited by O. Stone, W. E. Byerly, H. S. White, W. F. Osgood F. S. Woods. Published under the auspices of Harvard University. The Publication Office of Harvard University. 4⁰. (2) **1, 2.**

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Mascart, Moissan. Paris: Masson et Cie, éditeurs. 8⁰. (7) **19, 20, 21.**

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4⁰. (3) **17.**

Ann. der Physik: Annalen der Physik. Begründet und fortgeführt durch U. A. C. Gren, L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann. Kuratorium: F. Kohlrausch, M. Planck, G. Quincke, W. C. Röntgen, E. Warburg. Unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und insbesondere von M. Planck herausgegeben von P. Drude. Leipzig: J. A. Barth. gr. 8⁰. (4) **1, 2, 3.**

Annuaire Longit: Annuaire pour l'an 1901, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. 16mo.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha, secrétaire. La Haye: Martinus Nijthoff. 8⁰. (2) **5.**

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8⁰. (4) **8, 10.**

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 28me session. Congrès de Boulogne (1899). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson et Cie. 8⁰ (1900).

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von H. Kreutz. Kiel. 4⁰. **151, 152, 153.**

Atti Acc. Gioenia: Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) **12, 13.**

Atti dell'Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Napoli. (2) **29.**

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli. gr. 8⁰. **37, 38.**

Belg. Bull. Lettres: Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. Bruxelles: Hayez. 8⁰.

Belg. Bull. Sciences: Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. Bruxelles: Hayez. 8⁰. 1900.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. In-4⁰.

Belg. Mém. cour.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8⁰. Bruxelles: F. Hayez.

Belg. Mém. cour. et sav. étr.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 4⁰.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4⁰.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1900.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **1**.

Böklen Mitt.: Mathematisch naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg herausgegeben von O. Böklen und E. Wölffing. Stuttgart: J. B. Metzler. 8°. (2) **2**.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) **8**.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 8°. (2) **4** (1899-1900), **5** (1900-1901).

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Bordeaux Procès-verbaux: Procès verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. Année 1899/1900.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1900.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars et Fils. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B; A = 1ère partie, B = 2e partie.) **24**.

Bull. intern. de l'Ac. François Joseph: Siehe *Rozpravy*.

Bull. math. spéc.: Bulletin de mathématiques spéciales. Publié par MM. L. Gérard, G. de Longchamps, B. Niéwenglowski. **6**.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 8°. **10**.

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 4°. **18, 19**.

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) **29**.

Centralbl. der Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°. **20**.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) **7**.

Christiania Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°. **22**.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. **130, 131**.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Bougaïeff etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) **24**.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Vereins deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure: K. E. O. Fritsch und Alb. Hofmann. Berlin: E. Toeche. **34**.

Deutsche Math. Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck, A. Gutzmer. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. 8.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 8°. (3) **5, 6.**

Dublin Trans.: The Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. 4°. **31.**

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. **18.**

Edinb. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. **22, 23, 24.**

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. **39, 40.**

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times". Edited by D. Biddle. London: Francis Hodgson. 8°. **72, 73.**

Encykl. d. math. Wiss.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt u. Fr. Meyer. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. **1, 2.**

Ens. math.: L'enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C.-A. Laisant, H. Fehr. Paris: G. Carré et C. Naud. 8°. **2.**

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900. Göttingen. 8°. 1900.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **3.**

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung der Herren u. s. w. herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **31.**

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig: C. A. Koch. 8°. (2) **17.**

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von L. Fuchs. Berlin: G. Reimer. 4°. **121, 122.**

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 4°. **19.**

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (5) **6, 7.**

Journ de Phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, G. Lippmann, E. Mascart, A. Potier et B. Brunhes. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (3) **9.**

Kansas Univ. Quart.: The Kansas University Quarterly. Series A: Science and mathematics. Published by the University. Lawrence, Kansas. 8°. **9.**

Kasan Ges.: Nachrichten der physiko-mathematischen Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kasan. (Russisch.) (2) **9, 10.**

Kjöbenhavn Overs.: Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kjöbenhavn. 1899, 1900.

Königsb. Physik.-ökon. Ges.: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg i. Pr. gr. 4°. **40.**

Krakau. Abh.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) **34.**

Krakau. Ber.: Sitzungsberichte der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. **37.** (Polnisch.)

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: 4°. **25, 26.**

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. **52.**

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. 4°.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ der Kais. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgeg. von K. v. Fritsch. Halle a. S. gr. 4°.

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret. (3) **2.**

Lisboa Jorn. da Ac.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa (2) **6.**

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) **32, 33.**

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. **31, 32.**

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. **193 A.**

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. **66, 67.**

Loria Boll bibl.: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Torino: Carlo Clausen. 8°. **3, 4.**

Marseille Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Marseille. 4°. **10, 11.**

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, D. Hilbert, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **53, 54.**

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars et Fils. Gand: Hoste. 8°. (2) **10.**

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge: Macmillan and Co. 8°. (2) **29, 30.**

Meteor. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. G. Hellmann. Wien: Ed. Hölzel. gr. 8°. **17.**

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. u. K. technischen Militär-Comité. Wien: R. v. Waldheim. 8°. **31.**

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und L. Gegenbauer in Wien. Wien. 8°. **11.**

Moskau. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) **21.**

Moskau. Phys. Sect.: Arbeiten der physikalischen Section der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde, Anthropologie und Ethnographie. Moskau. (Russisch.) (Auch unter dem Titel: Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft etc.) **10, 11.**

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. **20.**

Münch Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. **30.**

Napoli Atti: Società reale di Napoli. Atti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli. 4°. (2) **9.**

Napoli Rend.: Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (3) **6.**

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4°. **61, 62, 63.**

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. (2) **4.**

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant et X. Antomari. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (3) **19.**

Nova Acta Leop. s. Leop. Nova Acta.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria per la fisica e la chimica. Continuato da R. Felici, A. Battelli, V. Volterra per la fisica esperimentale e matematica. Pisa: Salvioni. gr. 8°. (4) **11, 12.**

Nyt Tidss. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Fold erg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. **10, 11.**

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.) **79, 80.**

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. **14.**

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario fondato da D. Besso. continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Organo dell'Associazione „Mathesis". Livorno. 8⁰. (2) **2, 3.**

Petersb. Bull.: Bulletin der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. (5) **12, 13.**

Petersb. Denkschr.: Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. (8) **10.**

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, J. Joly, W. Francis. London. 8⁰. (5) **49, 50.**

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) (2) **1.**

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8⁰. **13.**

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1900.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8⁰. (Polnisch.) **11.**

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰. 1900.

Progreso mat.: El progreso matemático. Revista de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Zaragoza. 8⁰. (2) **2.**

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London. 8⁰. **31, 32.**

Revue d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8⁰. **55, 56, 57.**

Rapports Congr. intern. Phys.: Rapports présentés au Congrès international de Physique réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société Française de Physique. Rassemblés et publiés par Ch. Éd. Guillaume et L. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. **1, 2, 3.**

Revue de Math.: Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. Peano. Turin. 8⁰. **7.**

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par M. M. R. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Nony et Cie. Bruxelles: Ramlot. 4⁰. **10, 11.**

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Louvain: Secrétariat de la Société scientifique. gr. 8⁰. (2) **17.**

Rev. générale des sc.: Revue générale des sciences pures et appliquées. Dir. Louis Olivier. Paris. **11.**

Rivista di Mat.: Siehe *Revue de Math.*

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4⁰.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma 4°. (5) **9.** (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{9}_1$ und $\mathbf{9}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L. Atti: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **53.**

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **15, 16.**

Rozpravy: Rozpravy české Akademie císaře Frantiska Josefa pro vědy, slovesnost a umění. (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) (Dazu: *Bulletin international.* Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.) **9.**

Schweiz. Bautzg.: Revue polytechnique. Schweizerische Bauzeitung. Wochenschrift für Bau-, Verkehr- und Maschinentechnik. Organ des Schweiz. Ingenieur- u. Architekten-Vereins und der Gesellschaft ehemaliger Studirender des Eidgen. Polytechnikums in Zürich. Herausg. von A. Waldner. Zürich. **35, 36.**

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. **28.**

Soc. Philom. Bull.: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (9) **2, 3.**

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, früher herausgegeben von Spaczinski, jetzt von Gernet und Zimmermann in Odessa. 24 Nummern jährlich. Die Nummern laufen vom Anfange des Journals an. (Russisch.) 1900.

Stockh. Akad. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. **25.**

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. **57.**

Suppl. al Period.: Supplemento al Periodico di Matematica diretto dal Dott. G. Lazzeri. Livorno: R. Giusti. 8°. **3, 4.**

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. **14.**

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. **8.**

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. **35.**

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2).

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (2) **2.**

Toulouse Bull.: Bulletin de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. 1899-1900.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. **3.**

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°.

Unterrichtsbl. f. Math.: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von B. Schwalbe u. Fr. Pietzker. Berlin: O. Salle. 4⁰. **6.**

Upsala Nova Acta: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis (3) **18.**

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8⁰. (8) **2.**

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4⁰.

Verh. Deutsche Phys. Ges.: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1900. Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben von A. König. Leipzig: J. A. Barth. 8⁰. **2.**

Verh. Naturf. Ges. München: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu München 1899. Herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig: F. C. W. Vogel. (1900).

Věstník: Věstník Ceske Akademie (Bericht der kaiserlich böhmischen Akademie). 8⁰. **9.** (Böhmisch.)

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8⁰. **35.**

Warschau Phys. Sect.: Arbeiten der Warschauer Gesellschaft der Naturforscher; Verhandlungen der Section für Physik und Chemie. Jährlich ein Band.

Warschau. Univ. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.)

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington, D. C. Judd and Dettweiler, Printers. **14.**

Wiad. Mat.: Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. Warszawa (Polnisch). 8⁰. **4.**

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8⁰. **109.**

Wundt Philos. Studien: Philosophische Studien. Herausgegeben von Wilhelm Wundt. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 8⁰. **15.**

Zeitschr. deutscher Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin: J. Springer. 4⁰. **44.**

Zeitschr. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure: O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4⁰.

Zeitschr. f. Math.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Gegenwärtig herausgegeben von R. Mehmke und M. Cantor. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **45.**
Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

Zeitschr. f. Vermessw. Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von Reinhertz und C. Steppes. Stuttgart: Konrad Wittwer. 8⁰. **29.**

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8⁰. **45.**

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Kapitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Kapitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

B. Determinanten.

C. Elimination und symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Kapitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

Seite

Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Kapitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihe).

B. Elliptische Functionen.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

Seite

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

Kapitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Seite

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Kapitel 4. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

Kapitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2. Kinematik.

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

Seite

B. Hydrodynamik.

Kapitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Capillarität.

Kapitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

C. Geometrische Optik.

Kapitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmelehre.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Seite

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1. Geodäsie.

Kapitel 2. Astronomie.

Kapitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, welche für den einundreissigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A.S. Herr Prof. A. Sommerfeld, Aachen.
Bdn. „ Dr. Brodén, Lund.
Bö. „ Prof. Börsch, Potsdam.
Br. „ Regierungsrat Dr. Brix, Steglitz.
Dn. „ Prof. Dickstein, Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek, Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström, Stockholm.
El. „ Prof. Engel, Leipzig.
F. „ Dr. Faerber, Berlin.
Gbg. „ Dr. Guldberg, Christiania.
Gbs. „ Prof. Gibson, Glasgow.
Ghr. „ Prof. Goldhammer, Kasan.
Gln. „ Dr. Gleichen, Berlin.
Gt. „ Dr. Güntsche, Berlin.
Gz. „ Prof. Gutzmer, Jena.
Hae. „ Prof. Haentzschel, Berlin.
Hau. „ Prof. Haussner, Karlsruhe.
Hk. „ Prof. Hauck, Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger, Berlin.
Hsb. „ Dr. Hessenberg, Charlottenburg.
Jhk. „ Dr. Jahnke, Berlin.
Jk. „ Prof. Joukovsky, Moskau.
Js. „ Prof. Jolles, Halensee.
Kr. „ Prof. Krazer, Karlsruhe.
La. „ Prof. Loria, Genua.
Lg. „ Direct. Lange, Berlin.
Lh. „ Prof. Lerch, Freiburg, Schweiz.
Lnd. „ Dr. Landau, Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe, Berlin.
Lsg. „ Prof. Landsberg, Heidelberg.
Ly. Herr Prof. Loewy, Freiburg i. B.
M. „ Prof. F. Müller, Steglitz.
Mi. „ Prov.-Schulrat Michaelis, Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion, Gent.
My. „ Prof. F. Meyer, Königsberg i. Pr.
Mz. „ Prof. Maynz, Ludwigslust.
Nn. „ Dr. Norén, Lund.
Ot. „ Dr. Oster, Mannheim.
R.M. „ Dr. R. Müller, Berlin.
Rn. „ Oberl. Riens, Berlin.
Rr. „ Dr. Ing. Reissner, Berlin.
Sbt. „ Prof. Siebert, Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel, Hagen.
Sda. „ Prof. Sucharda, Brünn.
Sfs. „ Prof. Schoenflies, Königsberg i. Pr.
Sh. „ Dr. Schafheitlin, Berlin.
Si. „ Dr. Sintzow, Ekaterinoslaw.
Sr. „ Prof. Sommer, Poppelsdorf.
St. „ Prof. Stäckel, Kiel.
Stz. „ Dr. Steinitz, Charlottenburg.
T. „ Prof. Toeplitz, Breslau.
Tn. „ Direct. Treutlein, Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira, Porto.
V. „ Dr. Valentiner, Kopenhagen.
Vi. „ Prof. Vivanti, Messina.
Wbg. „ Dr. Wallenberg, Charlottenburg.
Wn. „ Prof. Wangerin, Halle a. S.
Wö. „ Prof. Wölffing, Stuttgart.
Wz. „ Prof. Weltzien, Zehlendorf.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W. 15, Fasanenstrasse 82.

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Emil Lampe und **Georg Wallenberg.**

Band 31.
Jahrgang 1900.
(In 3 Heften.)
Heft 1.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Bogen 1 bis 30.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. 35, Kurfürstenstrasse 139.
(Vom 1. October an: Berlin W. 15, Fasanenstrasse 82.)

Erster Abschnitt.
Geschichte und Philosophie.
Kapitel 1.
Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. XII und 481-943 S. gr. 8°.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Erste Abteilung. Von 1668-1699. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. 261 S. gr. 8°.

Schon acht, bezw. sechs Jahre nach der Ausgabe der ersten Auflage ist nun auch vom zweiten Bande und von etwa einem Drittel des dritten Bandes des grossen Cantor'schen Werkes eine neue Auflage erschienen, Beweis genug von der Bedeutsamkeit und weiten Verbreitung des heutigen Hauptwerkes über Geschichte der Mathematik. Anknüpfend an den kurzen Bericht in F. d. M. **30**, 1, fügen wir hier bei, dass auch diezweite Hälfte des zweiten Bandes, abgesehen von der Vergrösserung des Druckes, eine reichliche Vermehrung des Inhaltes bietet, so insbesondere in den Kapiteln 9, 12, 13 und 15, zumal in den beiden letzteren, die die erste Hälfte des 16., bezw. 17. Jahrhunderts behandeln. Neben der Vergrösserung des Umfanges im ganzen, die den zweiten Band um mehr als zwei Bogen stärker werden liess, zeigt sich durchweg die bessernde Hand des Verf., der auch überall am rechten Platze den neu erschlossenen Quellen und neueren Auffassungen gerecht geworden ist. Auch das Vorwort enthält wieder auf 7 Seiten nachträgliche Verbesserungen und Ergänzungen des Inhalts. Die diesmalige Zugabe einer Inhaltsübersicht verdient den Dank des Lesers.

In gleicher Weise ist das bis jetzt veröffentlichte erste Drittel des dritten Bandes reichlich vermehrt und verbessert, zumal im 82. und 91.

Kapitel, die die Geschichtsschreibung der Mathematik und die Streitigkeiten (um 1693) betreffs der Erfindung der Infinitesimalrechnung behandeln. Stets erneut gebührt dem Verf. der Dank der mathematischen Welt.

Tn.

A. von Braunmühl, M. Curtze, G. Eneström, H. Suter, P. Tannery, I. Timtchenko, G. Wertheim, H. G. Zeuthen. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik." Bibl. Math. (3) **1**, 265-273, 499-514.

Unter der soeben genannten Ueberschrift werden in jedem Hefte der Bibl. Math. kurze Bemerkungen mitgeteilt werden, welche geeignet sind, die Cantor'schen Angaben zu berichtigen oder zu ergänzen. In diesem Jahrgange finden sich beinahe 150 solche Bemerkungen, von denen sich freilich einige nur auf Druck- oder Schreibfehler, andere auf wenig wesentliche Angaben beziehen.

E.

K. Fink. A brief history of mathematics, an authorized translation of Dr. Karl Fink's Geschichte der Elementar-Mathematik by W. W. Beman and D. E. Smith. Chicago: The Open Court Publishing Company. XII + 333 S. 8°.

Das Original: „Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik mit Hinweisen auf die sich anschliessenden höheren Gebiete" ist in F. d. M. **22**, 40, 1890, angezeigt worden. Als ein erstes orientirendes Werk über die Geschichte der Mathematik hat sich dieser Abriss als recht nützlich erwiesen; deshalb ist es erklärlich, dass sich seine Uebersetzung ins Englische lohnte. Die beiden ausführlichen Anzeigen der vorliegenden Uebersetzung in Nature **63**, 103-104, und in Bibl. Math. (3) **1**, 519-521, machen auf eine Reihe von Stellen aufmerksam, die schon im Original bei seinem Erscheinen nicht recht sachgemäss abgefasst waren, oder die zufolge der historischen Arbeiten des letzten Jahrzehnts hätten verbessert werden müssen, was in der Uebersetzung unterlassen ist. — Die Uebersetzer haben die biographischen Notizen über die Mathematiker auf S. 297-322 alphabetisch zusammengestellt, aber bei der Berücksichtigung der in den letzten zehn Jahren gestorbenen Mathematiker (die lebenden sind ausgeschlossen) offenbar nach Zufall gewählt. So sind genannt: Cayley, Lie, Sylvester, Weierstrass; dagegen fehlen Kronecker und Kummer. Bei De la Gournerie steht als Todesjahr 1833 statt 1883.

Lp.

J. Boyer. Histoire des mathématiques. Paris: G. Carré & C. Naud. XII + 260 S. [Nature **61**, 510-511; Bibl. Math. (3) **1**, 278-280.]

„Eine illustrirte Geschichte der Mathematik" mit 19 Bildnissen von Mathematikern, darunter Mad. du Châtelet und Saunderson, aber nicht Gauss und Abel.

Lp.

C. A. Laisant. Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Bibl. Math. (3) **1**, 246-249.

Ueber das „Répertoire bibliographique des sciences mathématiques", das seit 1894 von einer besonderen Commission in Paris herausgegeben wird, hat die „Bibliotheca Mathematica" schon früher (vgl. F. d. M. **22**, 1, 1890; **28**, 1, 1897) Mitteilungen enthalten. Hier berichtet der Secretär der Commission über den Stand der Bibliographie, von der zur Zeit sieben „séries" erschienen waren; jede „série" besteht aus 100 Karten, deren jede im allgemeinen 10 Titel enthält, so dass die sieben „séries" zusammen etwa 7000 Titel bringen. Der Artikel giebt auch Auskunft über die Arbeitsmethode der Commission und über die Umstände, wodurch das Erscheinen der Bibliographie verzögert worden ist. E.

J. H. Graf. Ueber die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie. Bibl. Math. (3) **1**, 250-257.

G. Eneström. Ueber die von der „Royal Society" geplante mathematische Jahresbibliographie. Bibl. Math. (3) **1**, 480-484.

Der erste Artikel giebt eine Uebersicht der 1893-1899 stattgefundenen Verhandlungen über die von der „Royal Society" in London geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie, die jetzt zum grossen Teil nur historisches Interesse haben, da einige der wichtigsten Beschlüsse geändert worden sind.

Der zweite Artikel beginnt mit der Conferenz vom 12. Juni 1900 und erwähnt die Beschlüsse derselben, wodurch die Zettelausgabe und die sogenannten sachlichen Nachweise in Fortfall kommen und die mathematische Jahresbibliographie wesentlich dieselbe Form bekommt, die der Verf. im Jahre 1897 (vgl. F. d. M. **28**, 1, 1897) vorgeschlagen hatte. Dann wird auf einige Uebelstände hingewiesen, welche die Centralisation des Unternehmens in London mit sich führt, und die Begründung eines besonderen mathematischen Sectionsbureaus als wünschenswert bezeichnet. Zuletzt werden einige Modificationen des Planes vorgeschlagen und durch hinzugefügte Proben erläutert. E.

G. Valentin. Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. Bibl. Math. (3) **1**, 237-245.

Schon zweimal (vgl. F. d. M. **17**, 1, 1885; **28**, 1, 1897) ist in der „Bibliotheca Mathematica" über die von G. Valentin vorbereitete allgemeine mathematische Bibliographie berichtet. Dieser dritte Artikel bringt eine ausführliche Mitteilung über den gegenwärtigen Stand des Unternehmens und über die Weise, in der das Material (über 120 000 Titel) gesammelt und bearbeitet worden ist, wobei auch auf die grossen Schwierigkeiten dieses Unternehmens hingewiesen wird. Zuletzt bemerkt Valentin, dass eine solche Arbeit nicht von vielen Personen, sondern

nur von einem Einzelnen in Angriff genommen werden soll, weil es sonst nicht möglich ist, nach einheitlichen Grundsätzen zu verfahren und das Material überall genügend zu sichten. E.

G. Loria. Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso. Annuario della R. Università di Genova 1900-1901, 35 S.

In dieser akademischen Festrede überblickt Loria die geschichtliche Entwickelung der Mathematik seit Pythagoras; als Hauptpunkte der steten Umwandlung kennzeichnet er die Leistung Fibonacci's im 12. Jahrhundert, die gegenseitige Einwirkung von Geometrie und Algebra seit Descartes, die Einbeziehung des Unendlichen seit Newton und Leibniz, die Kritik an Euklid, die Schaffung neuer, von Euklid abweichender geometrischer Systeme und die reiche Ausgestaltung der Beziehungen aller Zweige zu einander. Tn.

H. Suter. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und und ihre Werke. Leipzig: B. G. Teubner. IX und 277 S. 8°. (Abh. zur Geschichte d. Math. 10).

Der durch seine geschichtlichen Forschungen und Darstellungen bekannte Verfasser liefert hier eine höchst dankenswerte bio- und bibliographische Arbeit; mit den ältesten arabischen wissenschaftlichen Leistungen (um 750) beginnend und bis etwa 1600 n. Chr. fortschreitend, giebt er nach den besten Quellen ein möglichst vollständiges Verzeichnis von 528 Gelehrten der mathematischen und astronomischen Richtung und ihrer Werke. Ein kurzer Ueberblick über die Eigenart und die Perioden arabischer Leistungen (S. 203-207), sowie Ergänzungen des Textes (S. 208-229) und ein genaues Register (230-277) bilden den Abschluss. Tn.

P. Tannery et Clerval. Une correspondance d'écolâtres du XIe siècle. Tirée des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques T. 36. Paris. 61 S. 4° [Bibl. Math. (3) 1, 524].

R. Guimarães. Les mathématiques en Portugal au XIXe siécle. Aperçu historique et bibliographique. Coïmbre: Imprimerie de l'Université. 167 S. 4°.

Dieses Werk, das über dem Titel noch die Inschrift führt: „Exposition universelle de 1900. Section portugaise", beginnt mit einer Einleitung, in der auf vier Seiten eine übersichtliche kurze Schilderung der Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert versucht wird, ein Unterfangen, das zu manchen Bedenken Anlass giebt. Die folgenden Seiten berichten kurz über die Mathematiker in Portugal während der

früheren Jahrhunderte, in denen, wie aus dem Gesagten hervorgeht, die Pflege der Mathematik ganz vernachlässigt war. Der Hauptteil des Buches enthält eine Aufzählung aller im 19. Jahrhunderte von portugiesischen Mathematikern gemachten Veröffentlichungen, geordnet nach der Einteilung des Index der französischen Bibliographie. Da dem übrigen Europa erst seit dem dankenswerten Mitarbeiten von F. Gomes Teixeira, besonders an unserem Jahrbuche, regelmässige Berichte über portugiesische mathematische Schriften zugehen, so ist dieses vom Verf. mit grosser Mühe zusammengestellte Verzeichnis ein willkommener Beitrag zur Kenntnis der Mathematik auf der pyrenäischen Halbinsel, um so mehr, als den Titeln der Schriften auch Inhaltsangaben zugefügt sind. Eine klare Anschauung der Leistungen Portugals auf dem Gebiete der Mathematik erhält der Leser bei der gewählten Art der Gruppirung des Stoffes nicht, weil Wichtiges und Bedeutungsloses ganz gleich rangiren. Jedenfalls besitzen wir in dem Buche aber das nötige Material zur Beurteilung des Standes der mathematischen Forschung in Portugal. Lp.

E. Wappler. Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45**, 47-56.

Aus einer Dresdener Handschrift wird hier eine zu Erfurt 1468 von G. Wolack gehaltene Vorlesung abgedruckt, die eine Reihe von Rechenregeln mit Beispielen enthält, anschliessend an die Regula detri. Vermutlich hat J. Widmann von Eger nach dieser Abhandlung unterrichtet. Tn.

E. Wappler. Zur Geschichte der Mathematik. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45**, 7-9.

Giebt aus der Leipziger Handschrift 1470, verglichen mit der Dresdener C 80, Aufklärung über Gegenstände und Inhalt der Vorlesungen des bekannten J. Widmann von Eger. Tn.

W. W. Bobynin. Materialien zur Geschichte der Mathematik in Russland. (Russisch.) Bobynin's Phys. math. Wiss. (2) **1**, n. 4, 5, 6, S. 100-111, 138-147, 161-166.

Die Zeitschrift „Westnik mathematiczeskich Naùk“ (Bulletin der mathematischen Wissenschaften [1860-1863]) ist die erste russische, rein wissenschaftliche mathematische Zeitschrift. Sie wurde herausgegeben von M. M. Gussew (geb. 1829, gest. 1866). Bobynin giebt eine kurze Uebersicht über die wissenschaftliche Thätigkeit Gussew's und eine ausführliche Uebersicht über den Inhalt seiner Zeitschrift. Si.

G. Eneström. Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham. [Anfrage 80.] Bibl. Math. (3) 1, 274-275.

Ueber den Verfasser einer von Libri herausgegebenen Schrift: „Liber augmenti et diminutionis quem Abraham compilavit" und über einen dort erwähnten „Job filius Salomonis". Es wird bemerkt, dass man gar keinen Grund hat, diesen „Abraham" mit Abraham ibn Esra zu identificiren, dass aber „Job filius Salomonis" vielleicht Isak ben Salomo ist. E.

G. Eneström. Gabriel de Aratoribus (1539). [Anfrage 86.] Bibl. Math. (3) 1, 516.

Ueber einen von Cardano (1539) citirten, sonst ganz unbekannten italienischen Mathematiker, der sich mit Rationalmachen gewisser Brüche beschäftigt haben soll. E.

L. A. Birkenmajer. Nicolaus Copernicus. I. Teil. Studien über die Arbeiten von Copernicus und biographische Materialien. Krakau. XIII u. 711 S. 4°. (Polnisch.)

Die bisherigen zahlreichen Copernicus-Biographien beschreiben nach der Vorrede mehr oder weniger erschöpfend die äusseren Momente des Lebens des grossen Forschers, lassen aber meistens im Dunkeln den inneren Gang seiner Entwickelung und geistigen Arbeit, welche ihn zu der unsterblichen Entdeckung geführt haben. Dieses neue Werk über Copernicus soll ein Versuch in dieser letzteren Richtung sein, ein Versuch, auf welchen der Verf. sich durch langjährige und sorgfältige Studien vorbereitet hat. Das gross angelegte Werk, welches im zweiten Teile eine neue Biographie von Copernicus liefern soll, enthält im vorliegenden ersten Bande das ganze historische, wissenschaftliche und kritische Material dazu. Es ist uns unmöglich, in dieser kurzen Besprechung die reichen Ergebnisse dieser Untersuchungen zu recapituliren; wir erwähnen hier nur das wichtige Resultat, welches sich auf die Bedeutung und die Abfassungszeit des „Commentariolus" von Copernicus bezieht. Verf. ist zu der Ueberzeugung gekommen, dass diese kleine Schrift wahrscheinlich schon vor 1512 von Copernicus verfasst worden ist, und dass sie als erster Entwurf seines heliocentrischen Systems, welcher sich in wesentlichen Punkten vom heliocentrischen Systeme der „Revolutiones" unterscheidet, betrachtet werden darf. Wir führen noch die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte des Werkes an: I. Epitome Joannis de Monteregio in Almagestum Ptolemaei. II. Tabulae Alphonsi und Tabulae directionum. III. Commentariolus. IV. Averrhoës. V. Hellenistische Studien von Copernicus. VI. Pontanus, Bessarion und Aratos mit dem Theon'schen Commentar. VII. Das Conceptbüchlein zu Upsala. VIII. Apianus, Geber, Vitellio. IX. Die Mathematik von Copernicus. X. Der lateinische Almagest, Venetianische Ausgabe aus dem Jahre 1515. XI. Astronomische Instrumente und Beobachtungen von Copernicus.

XII. Mechanik, Physik, Geodaesie, Geographie. XIII. Griechischer Almagest, Baselsche Ausgabe aus dem Jahre 1538. XIV. Chronologie der Abfassung und der Niederschreibung der einzelnen Bücher der „Revolutiones". XV. Documente, in welchen Copernicus erwähnt wird; Briefe an ihn und von ihm. XVI. Ein neues Document betreffend die Editio princeps der „Revolutiones". XVII. Thema nativitatis mit dem Geburtsdatum von Copernicus. XVIII. Ueber einige Glieder der Familie Copernicus. XIX. Domenico Maria Novara. XX. Eine kleine Sammlung alter Beobachtungen von Krakauer Astronomen. XXI. Solpha und Calcagnini. XXII. Unbekannte alte Abschriften des Wapowski-Briefes. XXIII. Bücher des Hildebrand Feber. XXIV. Copernicus über den Kometen vom Jahre 1533. XXV. Nicolaus Schomberg und Johann Albert Widmanstadt. XXVI. Calendarium Romanum Magnum. Zehn unbekannte Beobachtungen von Copernicus. XXVII. Einige noch nicht veröffentlichte Büchereinzeichnungen von Copernicus auf einigen Palaeotypen in Upsala. XXVIII. Büchereinzeichnungen medicinischen Inhalts. XXIX. Rheticus. XXX. Verlorene Schriften von Reinhold. XXXI. Ueber Copernicus-Manuscripte. XXXII. Einzeichnungen verschiedener Gelehrter auf den gedruckten Exemplaren der Revolutiones. XXXIII. Varia. XXXIV. Ueber Bildnisse von Copernicus. Dn.

P. Mansion. Sur les deux manuscrits du livre des Révolutions de Copernic. Brux. S. sc. 24A, 90-91.

Conjectur: 1. Das (verlorene) Manuscript, das für den Druck benutzt wurde, ist von Rheticus unter den Augen von Copernicus angefertigt und später zum Zwecke der Drucklegung an Rheticus gesandt worden. 2. Rheticus hatte vorher das eigenhändige Manuscript erhalten, das man in unseren Zeiten wiedergefunden hat. Mn. (Lp.)

L. Perroni-Grande. F. Maurolico professore dell'Università Messinese e dantista. — R. Accademia Peloritana. CCCL anniversario della Università di Messina. Contributo storico. Messina: D'Amico. S. 15-41.

Der vom Verf. in dem Staatsarchiv zu Palermo aufgefundene Ernennungsact des Maurolicus zum Professor an der Universität zu Messina (9. November 1569) wird hier mit einigen Erläuterungen und Bemerkungen veröffentlicht. Vi.

F. J. Studnička. Prager Tychoniana zur bevorstehenden Säcularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe gesammelt. Prag: Königl. Böhm. Ges. der Wissensch. 71 S. gr. Lex. 8°.

Wie der Verf. schon 1896 in seinen astronomischen Causerien „Bis ans Ende der Welt“ auf die Bedeutung von Prag für die Geschichte der Astronomie hingewiesen hatte, so lässt er es sich in dem glänzend ausgestatteten vorliegenden Büchlein angelegen sein, alle in Prag noch vorhandenen Spuren von Brahe's Anwesenheit in Prag zu beschreiben. Es sind dies: A. Schriftwerke. 1. Das Stammbuch des Tycho Brahe jun. 2. Triangulorum praxis arithmetica (Manuscript eines Lehrbuchs der Trigonometrie). 3. Tabulae sinuum. 4. Sinnspruch im Stammbuch des Siebold Plan. B. Druckwerke. 1. Cl. Ptolemaei opera. 2. N. Copernici de revolutionibus (beide Werke mit zahlreichen handschriftlichen Bemerkungen Brahe's). 3. Astronomiae instauratae Mecanica. 4. P. Rami Dialectica. 5. M. Moestlini „Alterum examen“. 6. Jos. Scaligeri „Cyclometrica“. C. Kunstwerke. 1. Sextant. 2. Provisorisches Observatorium „Belvedere“. 3. Epitaph. Reicher Bilderschmuck und Reproductionen von Schriften zieren dieses Denkmal der Pietät für den grossen Astronomen. Lp.

W. W. Bobynin. Simon Stevin, sein Leben und Wirken. (Russisch.) Bobynin's Phys. math. Wiss. (2) I No. 6, S. 167-180. Si.

Galileo Galilei. Le opere di Galileo Galilei: Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume X. Firenze: Tipografia di G. Barbèra. 533 S. 4°.

Die jetzt erscheinenden Bände der Nationalausgabe von Galilei's Werken bringen den Briefwechsel aus den Jahren 1574 bis 1642; der vorliegende erste Band des Briefwechsels reicht bis 1610 und enthält im ganzen 450 Briefe, unter denen aber nur 89 von Galilei geschrieben sind. Die Briefe zerfallen in drei Arten, die durch die Grösse der Typen, mit denen sie gedruckt werden, unterschieden sind: 1. Briefe, von Galilei geschrieben (grosser Druck), 2. Briefe, an Galilei geschrieben (mittlerer Druck), 3. Briefe, zwischen Zeitgenossen geschrieben, Angelegenheiten von Galilei berührend (kleiner Druck). Die einzelnen Briefe sind chronologisch geordnet und mit genauer Angabe des Ortes versehen, wo die Originale sich befinden. Diejenigen Briefe, welche überhaupt zum ersten Male abgedruckt wurden, sind durch zwei Sterne neben der Nummer des Briefes ausgezeichnet; diejenigen, welche in der jetzigen Ausgabe der Werke auch schon in anderen Bänden abgedruckt stehen, haben keinen Stern erhalten. Dagegen sind die schon früher veröffentlichten Briefe, die aber sonst nicht in der Ausgabe wiedergegeben sind, mit einem einzigen Stern gekennzeichnet. Dass der Text mit diplomatischer Treue wiedergegeben ist, unter Schonung der Schreibweise, setzt der rühmlichst bekannte Herausgeber A. Favaro im Vorworte unter eingehender Begründung seines Verfahrens weitläufig auseinander, und jedermann wird ihm dafür Dank wissen. Bei manchen Briefen ist das Facsimile der Unterschrift beigefügt. Am Schlusse sind zwei Tabellen

gegeben, von denen die erste die Briefe chronologisch aufzählt, die zweite ein alphabetisches Register der Briefschreiber nebst den von ihnen stammenden Briefen. Da diejenigen Schriftstücke, welche für die Geschichte der Wissenschaft Interesse haben, schon verwertet worden sind, und da es auch nicht möglich ist, hier auf Erörterungen von Einzelheiten einzugehen, so können wir nur mit dem Herausgeber auf die Wichtigkeit hinweisen, welche die hier veröffentlichten Schriften für die Biographie, die Wissenschaft und die historische Beurteilung jener Zeitepoche besitzen.

Lp.

G. COZZA-LUZI. **Galileo Galilei. Trattato del flusso e reflusso del mare secondo l'autografo vaticano.** Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **15**, 403-441 (1899).

Der „Discorso del flusso e reflusso del mare" ist im V. Bande der Nationalausgabe der Werke Galilei's nach dem Manuscripte der „Biblioteca Riccardiana" zu Florenz abgedruckt worden, weil diese Handschrift, obwohl von den Herausgebern an manchen Stellen als fehlerhaft erkannt, den besten Text zu bieten schien. Jetzt ist unter den Codices des Vaticans durch den Vicebibliothekar Cozza-Luzi ein Manuscript entdeckt worden, von dem nach allseitiger Prüfung anerkannt wird, dass es von Galilei selbst geschrieben ist. Der Professor U. Marchesini, welcher bei der Galilei-Ausgabe das Amt der Textprüfung übernommen hat, bescheinigt: „Der lateinische vaticanische Codex 8193, Teil II, enthält von Blatt 517 bis Blatt 526 den Trattato del flusso e reflusso del mare von Galileo Galilei. Er ist nach meinem Urteil sicher eigenhändig vom grossen Philosophen." Die letzte Seite, auf der die Unterschrift lautet: „Scritta in Roma dal Giardino de Medici li 8 di Gennaio 1616. da Galileo Galilei Filosofo, e Matematico primario del Serenissimo Granduca di Toscana", ist in photographischer Nachbildung dem gegenwärtigen Abdrucke des Manuscriptes beigegeben.

Lp.

A. FAVARO. **Intorno all'autografo galileano del „Discorso sul flusso e reflusso del mare" nuovamente ritrovato nella Biblioteca Vaticana.** Rom. Acc. L. Rend. 8_1, 353-360 (1899).

Favaro weist nach, dass dem Manuscripte, über dessen Abdruck vorstehend berichtet ist, nicht der hohe Wert zukommt, den Cozza-Luzi ihm beilegt. Das Autograph Galilei's ist nämlich vielfach zerstört, daher an manchen Stellen unleserlich. Diese Stellen sind dann ohne genügendes Verständnis ausgefüllt worden. „Echt" ist also das Manuscript nur bis zu einem gewissen Grade [vergl. Wohlwill, Deutsche Litteraturzeitung **20**, 1803-1805 (1899).]

Lp.

A. FAVARO. **Supplemento agli studi intorno alla vita ed alle opere di Tito Livio Burattini, fisico agordino del secolo XVII.** Ven. Ist. Atti **59** [(8) 2], 855-860.

Ergänzung zu den Abhandlungen von A. Favaro: „Nuove contribuzioni alla storia delle scienze nel decimosettimo secolo. Tito Livio Burattini“, Ven. Ist. Atti (2) **7**, 1895-96, 110-116, und „Intorno alla vita ed alle opere di Tito Livio Burattini, fisico agordino del secolo XVII. Studi e ricerche“, Ven. Ist. Mem. **25**, No. 8, 1896. Da im Jahrbuch über diese Arbeiten nicht berichtet ist, so bemerken wir, dass das Hauptwerk Burattini's ist: „Misura universale overo trattato nel qual'si mostra come in tutti i luoghi del mondo si può trovare una misura & un peso universale senza que habbiano relazione con niun'altra misura e niun'altro peso, & ad ogni modo in tutti li luoghi saranno li medesimi e saranno inalterabili e perpetui sin tanto che durerà il mondo“, Vilna, a. 1675. Es wurde auf Kosten der Akademie der Wissenschaften zu Krakau 1897 von L. Birkenmajer neu herausgegeben (vergl. F. d. M. **28**, 9, 1897). Die Ergänzungen beziehen sich auf das wahrscheinliche Geburtsjahr Burattini's und thun dar, dass er seine Bilancietta 1644 erfunden und Roberval von seiner Erfindung Mitteilung gemacht hat.

M.

J. Bosscha. Les „Oeuvres complètes de Christiaan Huygens“. Bibl. Math. (3) **1**, 93-96.

Dieser Artikel enthält einen Bericht über den Plan der von der holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Haarlem veranstalteten Ausgabe von Huygens' sämtlichen Werken und über die Grundsätze, die dabei massgebend gewesen sind. Die Ausgabe wird zuerst Huygens' Briefwechsel in zehn Bänden enthalten, dann die ungedruckten Arbeiten und zuletzt die schon im Druck vorliegenden Schriften bringen. E.

E. Gerland. Ueber Leibnizens Thätigkeit auf physikalischem und technischem Gebiete. Bibl. Math. (3) **1**, 421-432.

Leibniz' hinterlassene Manuscripte physikalischen und technischen Inhalts finden sich in der kgl. Bibliothek zu Hannover. Sie können in drei Gruppen geteilt werden, nämlich: 1. Arbeiten theoretischer Natur, 2. eigentliche experimentelle Arbeiten, 3. Entwürfe. Von Arbeiten der ersten Gruppe führt Gerland nur die Titel an, da sie sämtlich mathematisch-physikalischen Inhalts sind. Die zweite Gruppe umfasst eine ganze Menge interessanter Arbeiten, unter denen Gerland die folgenden behandelt: die Rechenmaschine; Versuche, dem Mangel an Aufschlagwassern in den Bergwerken abzuhelfen; Verbesserung der Wagen, um Artillerie auch auf schlechtem Wege leicht fortbringen zu können; Versuche mit der Schwefelkugel. Unter Leibniz' Entwürfen bespricht Gerland ausführlicher Pläne zur Verbesserung der Pumpen; eine Anordnung, welche die Bewegung eines Schiffes gegen den Strom bewirken sollte; Vorschläge zur Verbesserung der Dampfmaschine. Zuletzt weist Gerland den Vorwurf der Unehrlichkeit, den M. Cantor neuerdings Leibniz ge-

macht hat, zurück. Bekanntlich nimmt Cantor an, dass die Aenderung des Datums eines Aufsatzes vom 11. November 1675, der für die Geschichte der Infinitesimalrechnung besonders wichtig ist, eine Fälschung von Leibniz' Hand ist; aber Gerland bemerkt, dass dieser Aufsatz nicht zur Veröffentlichung bestimmt war, und dass es gar nicht ausgeschlossen ist, dass ein Anderer die Aenderung vorgenommen hat, da sie zuerst mehr als 100 Jahre nach Leibniz' Tode beobachtet worden ist.

E.

G. W. Leibniz. Briefe von G. W. v. Leibniz an den Astronomen der Societät der Wissenschaften Gottfried Kirch aus den Jahren 1702-1707. Berlin: G. Reimer. 14 S. 4°.

Zur Jubiläumsfeier der Berliner Akademie druckt das Joachimsthalsche Gymnasium elf aus den Jahren 1702-1707 stammende Briefe ab, die auf wirtschaftliche Dinge der Akademie Bezug haben und nebenbei die Kalenderreform, Kometenbeobachtungen und Persönliches berühren.

Tn.

J. Kvaçala. Neue Beiträge zum Briefwechsel zwischen D. E. Jablonsky und G. W. Leibniz. Jurjew (Dorpat): E. J. Karow. XXVII + 202 S. gr. 8°.

G. Valentin. Filippo Ferrari (1761). [Anfrage 81]. Bibl. Math. (3) **1**, 275.

Ueber einen Mathematiker aus dem 18. Jahrhundert, von dem ein Brief im J. für Math. **34** steht, der aber sonst ganz unbekannt ist.

E.

Luisa Anzoletti. Maria Gaetana Agnesi. Milano: Cogliati. 495 S. 8°. [Loria Boll. **3**, 107-108.]

Eine eingehende Biographie der bekannten Gelehrten; das Studium neuerer Quellen erlaubte der Verfasserin, einige Irrtümer zu berichtigen und einige Punkte aufzuhellen; alles in allem ein schönes und gutes Werk.

La.

D. J. Korteweg, J. A. C. Oudemans, P. Zeeman. Verslag over de handschriften en bescheiden afkomstig van den hoogleerar J. H. van Swinden. Amst. Akad. Versl. **8**, 389-402, 523-529.

F. W. Bessel. Zwölf Briefe von Bessel an Olbers. Berl. Ber. 1900, 745-762.

Diese zwölf Briefe bilden eine gewiss allen Astronomen willkommene

Ergänzung der Erman'schen Ausgabe des Olbers-Bessel'schen Briefwechsels. Die Berliner Akademie, welche die Bessel'sche Correspondenz gesammelt hat, veröffentlicht diese bisher ungedruckten Briefe. Der erste hat das Datum des 1. Februar 1807, fünf weitere stammen aus dem Jahre 1808, abermals fünf aus 1809; sie sind von Lilienthal aus an Olbers gerichtet. Der letzte Brief ist eine aus Königsberg vom 1. Dezbr. 1814 datirte Antwort Bessel's auf Olbers' Brief vom 6. Februar 1809; ihm ist eine mathematische Ausrechnung von Bessel's Hand ohne Datum und sonstigen Text beigefügt. Am Kopf der Briefe sind die laufenden Nummern angegeben, unter denen die einzelnen Stücke in die Erman'sche Ausgabe des Briefwechsels einzureihen sind. Der vierte Brief enthält die Resultate von Bessel's Untersuchungen über die astronomischen Strahlenbrechungen; auf den sonstigen Inhalt der Briefe einzugehen, verbietet der speciell astronomische Inhalt. M.

Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. Schilling. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Erste Abteilung. Berlin: Springer. VIII + 767 S. 8°. [Nature **61**, 486-487.]

Carl Friedrich Gauss Werke. Achter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig. 458 S. 4°.

Der sechste Band der Werke von Gauss ist 1874 erschienen; der Neudruck der Theoria motus, der in gleicher Ausstattung ausgegeben wurde, konnte als siebenter betrachtet werden. Der allgemeine Eindruck war der, dass damit die Ausgabe von Gauss' Werken abgeschlossen sei. Neue Hoffnungen wurden aber erweckt, als nach dem Tode des Herausgebers der erschienenen Bände das gesamte Material des Nachlasses eingesehen werden konnte. Die verschiedenen Berichte von Felix Klein über den Stand der Angelegenheit (vergl. F. d. M. **29**, 8, 1898 und **30**, 10, 1899) hielten die mathematische Welt auf dem Laufenden über die Fortschritte der Herausgabe, und nun liegt schon ein neuer Band in der bekannten Ausstattung der ersten Bände fertig vor. Die treibende Kraft für dieses Unternehmen in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ist F. Klein, der mit Eifer und Energie den Plan zur Herausgabe des Nachlasses von Gauss aufgestellt hat und die gleich eifrigen Bearbeiter gewonnen, ermutigt und angespornt hat; wir geben deshalb hier seine „Bemerkungen zum achten Bande“ auf S. 453 desselben wieder.

Der vorliegende achte Band von Gauss' Werken giebt Ergänzungen zu den drei ersten Bänden und zum vierten Bande mit Ausnahme des geodätischen Teils. Er enthält: unter den Abteilungen Arithmetik, Analysis und Numerisches Rechnen eine Reihe einzelner Notizen und Aufsätze, die sich nachträglich in Gauss' Nachlass vorgefunden

haben; aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hauptsächlich eine Anzahl Beläge über die Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate; aus der Geometrie Notizen und Briefe, die sich auf die Grundlagen der Geometrie, die Geometria Situs, Lehrsätze und Aufgaben aus der elementaren Geometrie, die Verwendung complexer Grössen für die Geometrie, und die Theorie der krummen Flächen beziehen. Die Bearbeitung der Abteilungen Arithmetik und Algebra und Analysis und Functionentheorie rührt von Herrn Fricke in Braunschweig, die der Abteilungen Numerisches Rechnen und Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Herren Börsch und Krüger in Potsdam und die der geometrischen Abteilungen von Herrn Stäckel in Kiel her; die Notiz „Allgemeinste Auflösung des Problems der Abwickelung der Flächen" (Seite 447 bis 449) ist von Herrn Weingarten in Charlottenburg bearbeitet worden. Die allgemeine Redaction wurde von Herrn Brendel in Göttingen besorgt. Schering, welcher dem vierten Bande einen Ergänzungsband hinzuzufügen beabsichtigte, hat eine Reihe von Vorarbeiten hinterlassen, hauptsächlich Abschriften aus dem Nachlass und dem Briefwechsel, welche bei der Herausgabe benutzt werden konnten.

Eine auf den Inhalt des Bandes näher eingehende Anzeige des Bandes von Fr. Engel ist in Bibl. Math. (3) **2,** 366-369 erschienen. Voraussichtlich wird manche zerstreute Notiz in diesem Bande weitere Untersuchungen hervorrufen. Lp.

F. Klein. Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Zweiter Bericht. Math. Ann. **53,** 45-48.

Vergl. F. d. M. **30,** 10 (1899). Eine andere Anzeige steht in Hoffmann Z. **31,** 668. Lp.

F. Klein. Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Dritter Bericht. Gött. Nachr. (Geschäftl. Mitt.) 1900, 7-9.

Für die zu veröffentlichenden Bände sind neue Briefe den Herausgebern zugegangen. Statt des geplanten Bandes VIII erscheinen zwei Bände VIII und IX. Besonders wichtig sind die neuesten Publicationen über Olbers' Leben und Wirken. Lp.

H. v. Mangoldt. Bilder aus der Entwickelung der reinen und angewandten Mathematik während des neunzehnten Jahrhunderts mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Carl Friedrich Gauss. Festrede. Aachen. 22 S. 8°.

Die Festrede schildert in schwungvollen Worten den Einfluss, den Gauss auf die wissenschaftliche Arbeit des XIX. Jahrhunderts gehabt hat. In seiner Dissertation 1799 gab er den Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra; seine Veranschaulichung der complexen Grössen fiel auf

fruchtbaren Boden; was er auf dem Gebiete der elliptischen Functionen, das von den grössten Mathematikern des XIX. Jahrhunderts bearbeitet wurde, schon früher gefunden hatte, ist erst in neuerer Zeit hinlänglich bekannt geworden. Auf den Unterricht in den elementaren Teilen der Mathematik sind seine Entdeckungen von besonderem Einfluss gewesen; desgleichen haben Mechanik und Physik aus ihnen reichen Gewinn gezogen. Ferner werden erwähnt die geometrisch construirbaren Kreispolygone, deren Theorie Gauss in den Disquisitiones arithmeticae 1801 veröffentlichte. Die Unmöglichkeit der Lösung der drei aus dem Altertum bekannten und 2000 Jahre hindurch versuchten Aufgaben ist erst im XIX. Jahrhundert bewiesen. Charakteristisch ist das Bestreben, das Erreichbare von dem Unerreichbaren zu sondern und so eine klarere Einsicht in die Grenzen unseres Könnens zu gewinnen. Dasselbe Jahrhundert, das einzelnen Gebieten die letzte Vollendung gab, hat auch wieder neue Gebiete erschlossen. Vielfach ist auch hier Gauss der Führer gewesen. Seine Methode der kleinsten Quadrate hat die Theorie der Beobachtungen begründet; seine theoria motus wurde das klassische Lehrbuch der theoretischen Astronomie; an der Entwickelung der modernen Physik haben Gauss und Wilhelm Weber keinen geringen Anteil gehabt. M.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Paris: Gauthier-Villars (1) **12**. IV + 504 S. 4°.

Der vorliegende Band der gesammelten Werke Cauchy's schliesst mit den Nummern 515 bis 589 die Reihe der Noten, welche in den Comptes Rendus erschienen sind, und umfasst den Zeitraum vom 10. Januar 1853 bis zum 4. Mai 1857. Auf der letzten Textseite sind die sechs Zeilen abgedruckt, durch welche in der Sitzung der Akademie vom 25. Mai 1857 über das Ableben Cauchy's protokollarisch berichtet ist. Der Vorsitzende Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, welcher während der Dauer dieser Sitzung der Beisetzungsfeier beiwohnte, wurde von Poncelet vertreten, der den Tod des berühmten Akademikers anzukündigen hatte. — Die Gegenstände, über welche Cauchy in diesen vier letzten Jahren seines Lebens in der Akademie sprach, umfassen alle Zweige der reinen und der angewandten Mathematik, denen er in seiner vielverzweigten wissenschaftlichen Thätigkeit sich zugewandt hat. Die Verbindung mit der auf Cauchy folgenden Generation von hervorragenden französischen Mathematikern wird durch einige Berichte über eingereichte Abhandlungen hergestellt. Als bedeutsam, schon durch den Umfang, nennen wir die beiden Berichte über Arbeiten von Briot und Bouquet, nämlich die „Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles", S. 243-256 und 330-333, deren Abdruck in dem Recueil des travaux des Savants étrangers empfohlen wird.

Von der ersten Serie der Werke Cauchy's bildet der XII. Band

den Schluss; doch fehlen bis jetzt noch die Bände II und III dieser Serie, welche die Abhandlungen, Noten und Artikel enthält, die aus den Sammelschriften der Akademie der Wissenschaften des französischen Instituts ausgezogen sind. Als Anhang des Bandes sind daher mehrere Uebersichten beigefügt worden: 1. Tabellen der Auszüge aus den Comptes Rendus nebst der Angabe ihrer Klassificirung nach dem Index des bibliographischen Repertoriums (S. 465-469). 2. Allgemeine Tabelle der in den zwölf Bänden der ersten Serie enthaltenen Arbeiten (S. 471-504). Hier sieht man also auch schon, was die Bände II und III bringen werden. Den grössten Raum beansprucht natürlich die Aufzählung der in den C. R. erschienenen Aufsätze, die nach den „Klassen“ A—X des Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques geordnet sind (S. 473-504). Lp.

E. Lampe. Zur Biographie von Jacob Steiner. Bibl. Math. (3) **1**, 129-141.

Im Anschluss an J. Lange's Schrift „Jakob Steiner's Lebensjahre in Berlin 1821-1863“ (vergl. F. d. M. **30**, 1899, 12-13) berichtet der Verf., der selbst ein Zuhörer von Steiner gewesen ist, aus seinen Erinnerungen über einige Charakterzüge seines Lehrers, welche geeignet sind, zu erklären, warum Steiner seine letzten Lebensjahre in einsamer Absonderung verbrachte. Da dieser Umstand sicherlich auch auf seine wissenschaftliche Productivität einen, freilich wenig erfreulichen, Einfluss übte, so sind diese Erinnerungen auch für die Beurteilung von Steiner als Mann der Wissenschaft von Interesse. Am Ende lenkt der Verf. die Aufmerksamkeit darauf, dass einige kürzlich veröffentlichte Anekdoten, deren Quelle wahrscheinlich Steiner'sche Erzählungen bilden, als unhistorisch bezeichnet werden müssen, und dass man überhaupt nur mit grosser Vorsicht diese Quelle benutzen soll, da Steiner nicht selten Dichtung und Wahrheit vermengte. E.

R. Sturm. Berichtigungen zu Steiner's Gesammelten Werken. Zeitschr. f. Math. **45**, 235-239.

In Steiner's Gesammelten Werken, die von der Akademie der Wissenschaften in Berlin herausgegeben wurden, finden sich viele ohne Beweis mitgeteilte Sätze, welche auf ihre Richtigkeit zu prüfen bei der Herausgabe unmöglich war. Da diese Sätze eine wertvolle Fundgrube für Aufgaben aus der synthetischen Geometrie sind, so werden die Mathematiker dem Verf. Dank wissen, dass er hier eine grosse Reihe von Irrtümern und Unrichtigkeiten, die er in diesen Sätzen gefunden hat, veröffentlicht. Eine unrichtige Anmerkung 25 zu Bd. I, S. 527 ist leider sogar in den Abdruck von Steiner's „Systematischer Entwickelung“ in Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 82, 83 übergegangen. Uebrigens waren schon früher mehrere dieser Verbesserungen

in brieflichen Mitteilungen von Reye und in einigen durch Sturm veranlassten Dissertationen angegeben. M.

M. Noether. Ueber Riemann's Vorlesungen von 1861-62 über Abel'sche Functionen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 177-178.

Durch zwei weitere Nachschriften der genannten Vorlesungen erfährt die bisherige einzige durch Weber besorgte Ausgabe derselben wesentliche Ergänzungen. Diese werden kurz skizzirt. Tn.

A. Kneser. Uebersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen. Zeitschr. f. Math. **45**, Hl. A., 113-128.

Ferdinand Minding starb am 1./13. Mai 1885; seitdem ist weder eine Darstellung seines Lebens, noch eine Würdigung seiner wissenschaftlichen Arbeiten erschienen, obwohl Minding einen nachhaltigen Einfluss auf die Entwickelung verschiedener mathematischer Disciplinen ausgeübt hat. Diese Lücke wird von Kneser in dankenswerter Weise ausgefüllt. Er giebt eine zusammenfassende Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen Minding's in der Differentialgeometrie, der Variationsrechnung, der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung, der Theorie der algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale, in der allgemeinen Dynamik und der Statik und hebt das Charakteristische in Minding's Lehrbüchern hervor. Den biographischen Notizen entnehmen wir Folgendes: Ernst Ferdinand Adolf Minding wurde am 11. Januar 1806 in Kalisch (damals zu Preussen gehörig) geboren, besuchte das Gymnasium zu Hirschberg, die Universitäten Halle und Berlin. Nachdem er eine Zeit lang am Gymnasium zu Elberfeld unterrichtet hatte, promovirte er in Halle und wurde 1831 Privatdocent in Berlin, 1834 zugleich Docent für Curvenlehre, analytische Dynamik und Analysis an der Königlichen Bauschule (der späteren Bauakademie). Im Herbst 1843 wurde Minding an die Universität Dorpat gerufen, wo er 40 Jahre hindurch wirkte.

Den Schluss der Abhandlung bildet ein chronologisches Verzeichnis der Arbeiten Minding's. M.

G. Lewitzky. Die Astronomen der Universität Jurieff (Dorpat) in den Jahren 1802-1894. (Russisch.) Dorpat Univ. No. 2 Anh. S. 1-224.

Leben und Thätigkeit von Professoren der Astronomie, sowie von Astronomen der Sternwarte von Dorpat in den Jahren 1802-1894: E. Knorre, J. Pfaff, M. G. Pauker, J. Kuth, F. G. Struve und dessen Schüler (W. Fedoroff, Sawitsch, W. Döllen, O. Struve, A. Schidlowsky), J. H. Mädler, T. C. Clausen, L. Schwarz, H. Bruns, J. O. Baklund, A. Lindstedt, E. Hartwig, L. Struve.

Si.

A. Wassilief. P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen.

N. Delaunay. Die Tschebyschef'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. (Mit einem Bildnis Tschebyschef's). Leipzig: B. G. Teubner. 70 S. 8°.

Nach einem kurzen Lebensabriss T.'s (1821-94) werden seine Arbeiten, die früheren nach der Zeit ihres Entstehens, die späteren nach ihrem Inhalt und ihren gegenseitigen Beziehungen, gekennzeichnet. Sie sind unter den folgenden Ueberschriften zusammengefasst: Zahlentheorie, Näherungswerte einer Function, Integration der irrationalen Differentiale, Interpolation, Variationsrechnung, Grenzwerte der Integrale und Summen, Wahrscheinlichkeit, angewandte Mechanik. Den Schluss macht eine Würdigung des Gehaltes und der Art von T.'s Leistungen (vergl. F. d. M. **29**, 11, 1898 und **30**, 622, 1899). Tn.

H. Laurent. Liès-Bodart. Ens. math. **2**, 346-348.

Liès, um 1895 gestorben, Professor und Generalinspector der Universität, aus dürftigen Verhältnissen in die Höhe gekommen, hatte früher in den Ardennen eine Privatschule; deren Unterrichtsweise, insbesondere die Befähigung ihres Leiters zur Begeisterung für mathematische Studien wird kurz gezeichnet und der heutige Zwang im Unterrichtswesen beklagt. Tn.

P. Volkmann. Erinnerungen an Franz Neumann. Königsb. Phys.-ökon. Ges. **40**, 41-51 (1899).

Bassot, Poincaré, Loewy. Discours prononcés à l'inauguration de la statue de F. Tisserand, à Nuits-Saint-Georges, le 15 octobre 1899. Annuaire Longit. pour 1900, E. 1-19. [F. d. M. **28**, 25, 1897.]

E. Beltrami. Francesco Brioschi: nel giorno della morte; un anno dopo; davanti al monumento, dicembre 1900. Milano: Allegretti. 36 S. 8°. Portr.

E. Beltrami. Commemorazione di Francesco Brioschi. Palermo Rend. **14**, 262-274.

Gedächtnisrede, welche Beltrami in der feierlichen Sitzung der R. Accademia dei Lincei am 12. Juni 1898 gehalten hat. (Siehe Atti della R. Acc. dei Lincei, anno 295, 1898 und F. d. M. **29**, 1898, 13.) Der Nachruf enthält ausser biographischen Notizen eine Schilderung der wissenschaftlichen Bedeutung Brioschi's im allgemeinen. Die Zahl seiner Schriften über höhere Algebra beträgt 90, über Theorie der Differentialgleichungen 30, über elliptische Functionen 40, über Abel'sche Functionen 30, über analytische und Differential-Geometrie 30, über

analytische Mechanik und Variationsrechnung 15. Rechnet man hierzu noch die Arbeiten aus der angewandten Mathematik, so wird man einen Begriff von der Vielseitigkeit Brioschi's und seiner umfassenden wissenschaftlichen Thätigkeit erhalten. Dass seine Arbeitskraft hierdurch nicht erschöpft wurde, beweist die Arbeitsfreudigkeit, die er in seinen verschiedenen amtlichen Stellungen und nicht zum mindesten als Herausgeber der Annali di Mat. documentirte. Durch seinen Geist, seine Energie, seine Liebenswürdigkeit war er eine der grössten Zierden seines Vaterlandes. M.

D. MONTESANO. Arminio Nobile. Atti. Acc. Pontaniana (2) **29**, 6 S. [F. d. M. **28**, 29, 1897.]

G. RIEHM. Friedrich Meyer. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 59-61.

Friedrich Meyer, der durch eine Reihe wertvoller Arbeiten aus der mathematischen Didaktik bekannte Professor am Stadtgymnasium zu Halle a. S., war am 5. März 1842 zu Mlinsk in Westpreussen geboren. Er studirte in Breslau, Berlin und Halle, kam 1868 als Lehrer an das neu gegründete Gymnasium zu Halle und wurde 1894 von der Universität Halle zum Ehrendoctor ernannt. Er starb am 5. December 1898 daselbst (vergl. F. d. M. **30**, 19, 1899). M.

C. KÖHLER. Hermann Schapira. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 61-66.

Eine Schilderung des an Arbeit und Mühen, Kampf und Entsagung reichen Lebens. Am 16. August 1840 in Erswilken bei Tauroggen in Russland geboren, studirte Hermann Schapira, dem Wunsche seines Vaters gehorsam, zuerst jüdische Theologie und ward Rabbiner, ging aber 1868, seiner frühen Neigung und Begabung für die mathematischen Wissenschaften folgend, nach Berlin auf die Gewerbeakademie, bis ihn 1871 eine durch Ueberanstrengung hervorgerufene Krankheit zwang, nach Russland zurückzukehren. Nachdem er längere Zeit in kaufmännischer Stellung in Odessa gewesen, ging er 1878 nach Heidelberg, um seine mathematischen Studien wieder aufzunehmen. Dort promovirte er 1880, habilitirte sich 1883 und wurde 1887 ausserordentlicher Professor. Er starb am 8. Mai 1898 auf einer Reise in Cöln. Seine eigenartigen Untersuchungen betrafen insbesondere die Cofunctionen und die algebraischen und analytischen Iterationen (vergl. F. d. M. **29**, 20, 1899). M.

M. A. TICHOMANDRITZKY. E. J. Beyer. (Nachruf.) Charkow. Ges. (2) **7**, No. 1, 20-22. (Russisch.)

E. J. Beyer war Professor der Mathematik an der Universität Charkow in den Jahren 1844-1872, starb ebenda am 28. XII. 1899 (a. St.) Si.

G. Pick. Karl Bobek †. Monatsh. f. Math. **11**, 97-101.

Geboren am 25. Februar 1855 zu Lhotka in Böhmen, vorgebildet auf der Realschule in Prag, studirte Karl Bobek an der deutschen technischen Hochschule und Universität zu Prag und ward 1879 Assistent für darstellende Geometrie bei Küpper, 1893 ausserordentlicher Professor der Mathematik an der deutschen Universität zu Prag. Er starb am 15. December 1899 daselbst. Seine wissenschaftlichen Arbeiten betreffen die Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung, Flächen dritter Ordnung und Regelflächen, Erzeugung algebraischer Curven, hyperelliptische Gebilde. Aus seiner Lehrthätigkeit gingen die „Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen“ und „Einleitung in die projective Geometrie der Ebene“ hervor. M.

A. Gutzmer. Luis Gonzaja Gascó. Deutsche Math. Ver. 8_1, 26-27, Bibl. Math. (3) **1**, 225-226.

Der Herausgeber des „Archivo de Matemáticas puras y aplicadas“ wurde am 29. August 1844 zu Valencia geboren und starb am 17. Mai 1899 als Professor der Analysis daselbst. Durch Werke über Trigonometrie und analytische Geometrie, sowie durch Uebersetzungen hat er sich um die Verbreitung mathematischer Kenntnisse in Spanien grosse Verdienste erworben. Ein Lehrbuch der Analysis ist im Druck begonnen. M.

F. Müller. Carl Immanuel Gerhardt. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) **1**, 205-216.

Carl Immanuel Gerhardt wurde am 2. Dezember 1816 zu Herzberg (Provinz Sachsen) geboren, bezog 1834 nach in Torgau bestandenem Abiturientenexamen die Universität Berlin, wo er 1837 die philosophische Doctorwürde erwarb. Er ward 1839 ordentlicher Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel, siedelte 1853 nach Berlin über als Oberlehrer am Französischen Gymnasium daselbst, folgte 1856 einer Berufung als Professor am Gymnasium zu Eisleben, wo er seit 1876 als Director wirkte, und trat 1891 in den Ruhestand. Seine letzten Jahre verbrachte er nach einander in Halle, Mainz, Graudenz und wieder in Halle, wo er am 5. Mai 1899 verschied. Der mathematisch-historischen Forschung hat er besonders durch seine Ausgabe von Leibnizens mathematischen Schriften grossen Nutzen gebracht, und Müller verfehlt nicht, auf diesen Umstand hinzuweisen; auch die übrigen Schriften Gerhardt's werden erwähnt und besprochen. Freilich scheint das Lob, das der Verf. dabei erteilt, zuweilen nicht ganz berechtigt zu sein; so z. B. bemerkt er, dass Gerhardt's „Geschichte der Mathematik in Deutschland“ sich den übrigen Teilen der „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland“ auf das würdigste anschliesst, ein Urteil, dem wohl die Fachgenossen kaum beistimmen werden. E.

M. CANTOR. C. I. Gerhardt. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 28-30.

Dieser Artikel ist für die Nachträge zur Allgemeinen Deutschen Biographie bestimmt. Er enthält eine kurze Biographie des Leibnizforschers. Carl Immanuel Gerhardt, geb. am 2. December 1816 zu Herzberg bei Torgau in der Provinz Sachsen, war Lehrer in Eutin, Salzwedel, Berlin und Eisleben und Director des Gymnasiums zu Eisleben von 1876-1891, wo er in den Ruhestand trat. Er starb in der Nacht vom 4. zum 5. Mai 1899 in Halle. M.

P. H. SCHOUTE. Abraham Nicolaus Godefroy, 1822-1899. Met portret en naschrift. Nieuw Archief (2) **4**, 353-358.

Der am 29. December 1899 zu Amsterdam verstorbene Baumeister A. N. Godefroy hat sich grosse Verdienste um die Wiskundig Genootschap zu Amsterdam erworben. Seine Beziehungen zu dieser Gesellschaft werden im ersten Teile dieses Nachrufs mitgeteilt, im zweiten wird seiner mathematischen Arbeiten gedacht und in der Nachschrift das Vermächtnis an die Gesellschaft laut Testament veröffentlicht. M.

C. H. C. GRINWIS †. Amst. Ak. Versl. **8**, 326.

Geb. 1831, gest. 1899; seit 1867 Professor der Mathematik an der Universität zu Utrecht. Lp.

J. DIEKMANN. Hermann Heilermann. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45**, 57.

Kurzer Lebensabriss des Schulmannes und Gelehrten (1820-99). Tn.

M. NOETHER. Sophus Lie. Math. Ann. **53**, 1-41

Sophus Lie war der originalste und schöpferischste Vertreter geometrischer Wissenschaft in den letzten drei Decennien des XIX. Jahrhunderts. Noether schildert, im Rahmen des äusseren Lebenslaufes Lie's, besonders eingehend die Entwickelung der Ideen desselben in den ersten Jahren seines Schaffens und giebt über die Arbeiten der späteren Zeit eine kurze Uebersicht. Es wird nachgewiesen, dass bereits in den ersten originellen Abhandlungen Lie's die Keime seines späteren fruchtbaren Schaffens zu finden sind. Schon früh lassen sich die Ansätze zu fast allen später zur Entfaltung gekommenen Ideen erkennen. Die Fülle der fruchtbaren Ideen Lie's war zeitweise so gross, dass es ihm an Zeit mangelte, dieselben zu verarbeiten und zur Darstellung zu bringen. Sie ruhen zum Teil verborgen in den noch vorhandenen Bruchstücken von Entwürfen, die im Besitz von F. Klein sich befinden. Letzterer hat durch persönlichen Umgang und durch jahrelanges Zusammenarbeiten mit Lie dessen Ideen und Methoden kennen gelernt und durch Ueberlassung

der Manuscripte sowie durch persönliche Mitteilungen Noether bei seiner historisch-kritischen Arbeit unterstützt. So sehen wir denn klar, wie sich das Werk Lie's aufbaut bis zum Jahre 1884, dem Höhepunkte seiner Entwickelung. „Will man den wirklichen Umfang des Lie'schen Schaffens durch ein Wort festlegen, das sowohl seine Transformations- und Invariantenrichtung, als seine geometrischen Untersuchungen einschliesst, so braucht man nur sein eigentliches Ziel: die Integration der Differentialgleichungen, zu nennen." M.

F. Engel. Sophus Lie. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 36-46.

Der auf der Jahresversammlung zu München gehaltene Vortrag, welcher eine Schilderung des Lebensganges und Andeutungen über die von Lie verfolgten Ziele giebt. Ueber die eingehendere Würdigung der Leistungen Lie's ist nach der Leipziger Rede Engel's (Leipz. Ber. **51**) in F. d. M. **30**, 22-23, 1899, berichtet worden. M.

F. Engel. Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften, zusammengestellt. Mit Bildnis in Heliogravüre als Titelbild. Bibl. Math. (3) **1**, 166-204.

Nach einer kurzen Schilderung von Sophus Lie's Leben und wissenschaftlicher Wirksamkeit giebt Engel hier ein chronologisch geordnetes Verzeichnis seiner mathematischen Schriften, worin sich nicht nur Titel und genaue bibliographische Verweise, sondern auch kurze Inhaltsangaben finden. Das Verzeichnis ist also besonders dazu geeignet, ein Wegweiser für diejenigen zu werden, die die Lie'schen Untersuchungen eingehend studiren wollen. Als Anhang bringt der Artikel eine Liste der sonstigen Veröffentlichungen und im Druck erschienenen Aeusserungen von Lie, sowie Notizen über seine bisher ungedruckten Schriften.

E.

W. Ahrens. Sophus Lie als Pädagog. Hoffmann Z. **31**, 319-322.

Mitteilung einzelner Stellen von Artikeln, die Lie über den Unterricht in der Mathematik auf den norwegischen Mittelschulen veröffentlicht hat.

Lp.

P. Mansion. Sophus Lie. Esquisse biographique. Mathesis (2) **10**, 228-229.

L. Boltzmann. Eugen von Lommel. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 47-58.

Eine treffliche Schilderung der Persönlichkeit Lommel's, eine kurze Charakterisirung seiner wissenschaftlichen Arbeiten; mit einem vollstän-

digen Verzeichnis seiner Publicationen. Eugen von Lommel wurde am 19. März 1837 in Edenkoben geboren, besuchte das Gymnasium zu Speyer, bezog 1854 die Universität München, wurde 1860 Lehrer der Mathematik und Physik an der Kantonschule zu Schwyz, 1865 an einer ähnlichen Anstalt in Zürich, wo er sich auch für Physik an der Universität und am Polytechnikum habilitirte. 1867 nahm er eine Professur für Mathematik und Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Hohenheim an, erhielt aber schon 1867 einen Ruf als Professor der Physik nach Erlangen und ward 1886 Nachfolger Jolly's an der Universität München. Als Rector derselben für das Jahr 1898/99 starb er am 19. Juni 1899. Seine rein mathematischen Arbeiten, wie seine Studien über die Bessel'schen Functionen, behandeln hauptsächlich Gebiete, welche Anwendung in der Physik finden. Seine mathematisch-physikalischen Abhandlungen gehören meist der Optik an, einige der Wärme- und Elektricitätstheorie. Zu ihnen kommen noch die rein experimentellen Untersuchungen aus der Optik. M.

S. Günther. Ferdinand Rosenberger. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) **1**, 217-224.

Joh. Karl Ferdinand Rosenberger war am 29. August 1845 zu Lobeda bei Jena geboren, wirkte zuerst als Elementarlehrer und Kantor, promovirte 1870 in Jena, bestand die Oberlehrerprüfung in Kiel 1876, war von 1870 bis 1877 Hülfslehrer in Hamburg (1873 bis 1877 am Johanneum), wurde 1877 ordentlicher Lehrer und 1893 Professor an der „Musterschule“ in Frankfurt a. M. und starb am 11. September 1899 in Oberstdorf im Allgäu. Als Schriftsteller hat er sich hauptsächlich mit Geschichte der Physik und Mathematik beschäftigt; sein Hauptwerk ist die 1882-1890 in drei Teilen erschienene „Geschichte der Physik“, deren Vorzüge von Günther hervorgehoben werden. E.

Nachruf Rosenberger. Hoffmann Z. **31**, 78-79.

Neben knappen Angaben über den Lebenslauf finden sich acht Schriften angeführt, von denen als die reichste und vollendetste zu nennen ist: „Isaac Newton und seine physikalischen Principien“ (F. d. M. **26**, 15-17, 1895). Lp.

W. Wirtinger. Karl Schober. Mit Porträt. Deutsche Math. Ver. 8_1, 66-68.

Am 8. October 1859 zu Sternberg in Mähren geboren, wurde Karl Schober 1887 Lehrer der Mathematik in Triest und 1888 in Innsbruck. Er starb am 4. September 1899 als Professor an der k. k. Staatsoberrealschule und Docent für darstellende Geometrie an der Universität

Innsbruck. Seine Abhandlungen betreffen die constructive Theorie der Kegelschnitte. M.

G. Eneström. Hermann Emil Wappler. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) **1**, 225.

Emil Wappler, geboren zu Bernsbach in Sachsen am 20. Juni 1852, Oberlehrer am Gymnasium in Zwickau seit 1879, gestorben daselbst am 6. October 1899, hat einige mathematisch-historische Abhandlungen veröffentlicht, die hauptsächlich die Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert behandeln. E.

L. Cremona. Commemorazione del Senatore Prof. Eugenio Beltrami. Rom. Acc. L. Rend. anno 297, 1900, 462-472.

L. Cremona. Eugenio Beltrami. Commemorazione. Palermo Rend. **14**, 275-289. Batt. G. **38**, 355-375.

Die in der Festsitzung der Accademia dei Lincei gehaltene Rede ist unter dem erschütternden Eindruck verfasst, den der unerwartete Tod des allbeliebten Präsidenten der Akademie gemacht hat, und schildert den grossen Verlust, den Italien, den die ganze wissenschaftliche Welt erlitten hat. Eugenio Beltrami wurde am 16. November 1835 zu Cremona geboren, besuchte die Universität Pavia, musste aber 1856 wegen politischer Wirren nach Verona fliehen, wo er eine Stelle als Secretär bei dem Eisenbahningenieur Diday erhielt. Mit Letzterem ging er nach Mailand, wo er seine mathematischen Studien unter Brioschi's Leitung wieder aufnahm. Durch des Letzteren Vermittelung wurde Beltrami 1862 ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Universität zu Bologna. 1864 wurde er ordentlicher Professor der Geodäsie an der Universität Pisa. Hier knüpfte er den Freundschaftsbund mit Betti; hier verkehrte er auch mit Riemann, der sich aus Gesundheitsrücksichten nach Italien begeben hatte. Im Jahre 1866 erhielt er die Professur für theoretische Mechanik an der Universität Bologna, ging aber 1873 an die Universität zu Rom und 1876 als Professor der mathematischen Physik und der höheren Mechanik nach Pavia. Erst 1891 kehrte er an das Ateneo zu Rom zurück. Hier starb er am 18. Februar 1900 unerwartet an den Folgen einer Operation.

Cremona skizzirt nun in seiner Rede die verschiedenen Richtungen, welche die wissenschaftliche Bethätigung Beltrami's eingeschlagen hat. (Vgl. das Referat über den Nachruf M. Lévy's). Alle Schriften Beltrami's zeichnen sich durch Klarheit der Darstellung und eleganten Stil aus. Wie der Schriftsteller, so war auch der Lehrer. Seine von den Eltern ererbte künstlerische Begabung zeigte er als tüchtiger Musiker. Streng gegen sich selbst, nachsichtig gegen andere, erwarb er sich durch sein leutseliges Wesen zahlreiche Freunde. M.

M. Lévy. Notice sur les travaux d'Eugène Beltrami. C. R. **130**, 677-681.

Beltrami's Hauptwerk umfasst die verschiedenen Zweige der mathematischen Physik, die er an den Universitäten zu Pavia und Rom vorgetragen hat: die Theorie der Elasticität, der Elektricität, der Hydrodynamik und verschiedene Probleme der höheren Mechanik. Mit gleichem Erfolge hat er die Geometrie und die Analysis gefördert. Seit 1868 behandelte er die Grundlagen der Geometrie, die Geometrie und Kinematik der Räume negativer oder positiver constanter Krümmung, die Eigenschaften der pseudo-sphärischen Flächen. Ausserdem sind seine Arbeiten über die Geometrie der binären kubischen Formen, den Feuerbach'schen Satz, den Steiner'schen Satz von dem Kegelschnitt der neun Punkte, Flächenabbildung, sowie über die Theorie der Differentialparameter zu nennen. In der allgemeinen Functionentheorie erweiterte er die Riemann'sche Darstellung der Functionen einer complexen Variable. M.

E. D'Ovidio. Eugenio Beltrami. Torino Atti **35**, 541-546.

Nachdem D'Ovidio seiner Trauer über das unerwartete Hinscheiden des grossen Gelehrten, des vortrefflichen Menschen, des hervorragenden Lehrers und liebenswürdigen Collegen beredten Ausdruck gegeben hat, schliesst er seinen Artikel mit einem Briefe, den ihm Beltrami am 25. December 1872 geschrieben hat, und in dem eine neue Auffassung der nicht-euklidischen Geometrie gegeben wird. M.

E. d'Ovidio. Eugenio Beltrami. Loria Boll. Bibl. **3**, 52-62.

Ein kurzer Nekrolog nebst einem Verzeichnisse der Schriften des Verstorbenen. Vi.

G. Frattini. Eugenio Beltrami. Periodico di Mat. (2) **2**, 185-190.

G. Frattini. Eugène Beltrami. Ens. math. **2**, 173-178.

Sympathische Schilderung der Persönlichkeit Beltrami's als Schriftsteller, als Gelehrter, als Lehrer, als Mensch nebst kurzem Abriss seines Lebens. Angehängt das Verzeichnis seiner Schriften. Lp.

U. Dini. Eugenio Beltrami. Annali di Mat. (3) **4**, 151-152.

Dini teilt den Lesern der Annali den Tod Beltrami's mit und hebt die Verdienste des Verstorbenen um die Wissenschaft und die Verbreitung derselben in Italien hervor. M.

V. Cerruti. Commemorazione del defunto Presidente Eugenio Beltrami. Rom. Acc. L. Rend. 9_1, 139-142.

Darstellung des äusseren Lebensganges Beltrami's (geboren den 16. November 1835 zu Cremona, gestorben am 18. Februar 1900 zu Rom) und Schilderung des genialen liebenswürdigen Menschen. M.

L. Pinto. Prof. Eugenio Beltrami. Napoli Rend. (3) **6**, 74-75.

Mitteilung des am 18. Februar 1900 erfolgten Todes Beltrami's und kurze Notizen aus seinem Leben. Es folgt ein Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten Beltrami's. M.

G. Celoria e C. Somigliana. Eugenio Beltrami. Cenni commemorativi. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 241-245.

Celoria giebt dem Verlust, den das Istituto durch den Tod des trefflichen Gelehrten erlitten hat, Ausdruck; Somigliana charakterisirt im allgemeinen das wissenschaftliche Werk Beltrami's. M.

G. H. Bryan. Eugenio Beltrami. Nature **61**, 568-569.

Kurzer, aber sachgemässer und würdiger Nachruf, zu dem Blaserna nach Angabe des Verf. die Daten geliefert hat. Lp.

G. H. Bryan. Obituary notice of the late Signor Beltrami. Lond. M. S. Proc. **32**, 436-439.

Eine kurze Lebensbeschre[illegible] Beltrami's und Charakterisirung seiner wissenschaftlichen Arb[illegible]h Cremona's ausführlicherem Nekrolog. M.

G. A. Maggi. Eugenio Beltrami. Annuario della R. Università di Pisa 1900-1901, 18 S. Vi.

S. Pincherle. Commemorazione di Eugenio Beltrami. Bologna Rend. (2) **4**, 1899-1900, 9 S. Vi.

Guyou. Discours prononcé aux funérailles de M. de Bernardières le 5 février 1900. Annuaire Longit. pour 1901, H. 1-6.

Kurz vor der Ernennung zum Contreadmiral und vor der Wahl in die Akademie starb der Kapitän zur See de Bernardières, der sich

um die geodätische Erforschung von Südamerika und um die Bestimmung der magnetischen Constanten an vielen Punkten der Erde durch die französische Marine grosse Verdienste erworben hatte. Lp.

J. Lemaitre, Maurice Lévy, Berthelot, G. Darboux, A. Cornu, Duclaux, Gaston Paris, Georges Perrot. Discours prononcés aux funérailles de M. Joseph Bertrand. C. R. **130**, 961-978.

J. Lemaitre, der Director der Académie Française, feiert den Verstorbenen als geistreichen Schriftsteller, indem er an seine Biographien Pascal's, d'Alembert's, u. a. erinnert, und schildert Bertrand's liebenswürdige Persönlichkeit. M. Lévy, der Präsident der Académie des Sciences, hebt die Verdienste Bertrand's um die Akademie hervor, geht dann auf seine mathematischen Werke ein, die Abhandlungen über Integrale der Probleme der Dynamik, über Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf seinen Traité de Calcul différentiel et intégral, seine Vorlesungen über Thermodynamik und Elektricität, die Herausgabe von Lagrange's Mécanique analytique, seine Arithmetik, das Princip der Aehnlichkeit in der Mechanik und Physik, und würdigt Bertrand's Verdienste als Lehrer. [Diese Rede ist abgedruckt in Darboux Bull. (2) **24**, 69-75, 1900.] Berthelot, ständiger Secretär der Académie des sciences, betrauert den Verlust eines treuen Freundes, dessen Wohlwollen, Autorität und Eifer die Interessen der Akademie stets gefördert haben. G. Darboux, Mitglied des Instituts, spricht im Namen der Société de secours des amis des sciences, deren treues und aufopferndes Mitglied Bertrand seit ihrer Gründung gewesen. A. Cornu spricht im Namen der École Polytechnique, der der grösste Teil von Bertrand's arbeitsvollem Leben gewidmet war. Das Institut Pasteur drückt durch seinen Director Duclaux seine Teilnahme an dem Hinscheiden seines Mitgliedes aus. Gaston Paris, Administrator des Collège de France, betrauert den Verlust seines hochbegabten und liebenswürdigen Collegen, dessen Vorlesungen am genannten Institut von ausserordentlichem Erfolge begleitet waren. Zuletzt spricht George Perrot im Namen der École Normale Supérieure, der Bertrand zwar nur vier Jahre, von 1858 bis 1862, angehört, auf welche aber seine wissenschaftliche Thätigkeit einen grossen Einfluss ausgeübt hat.

M.

M. Joseph Bertrand. Nécrologie. Journ. des Savants, 1900, 312-315.

Verzeichnis der von Bertrand im Journ. des Savants von 1863 bis 1899 veröffentlichten Artikel. Lp.

E. Lampe. Louis François Joseph Bertrand, geb. 11. März 1822, gest. 3. April 1900. Nachruf. Naturw. Rundschau **15**, 320-323.

Neben den Angaben über den Verlauf des Lebens und den Entwickelungsgang Bertrand's hebt dieser Nachruf besonders die litterarische

Wirksamkeit hervor, zu der der reich begabte Mathematiker durch die Freude an der Eleganz der Darstellung veranlasst wurde, und der zufolge er einen Sitz in der Académie Française erhielt. Aus den Schriften des Akademikers werden Beläge für seinen Stil beigebracht unter Auswahl solcher Stellen, die seinen Sinn für Gerechtigkeit und seine hohe Verehrung für Gauss und Jacobi bezeugen. Lp.

G. H. Bryan. Joseph Bertrand. Nature **61**, 614-616.

Unmittelbar nach dem Tode Bertrand's geschrieben, giebt dieser Artikel ein lebenswarmes Bild der sympatischen Persönlichkeit des französischen Mathematikers und eine gute Uebersicht über seine Leistungen. Lp.

G. H. Bryan. Giuseppe Bertrand. Traduzione dall'inglese per cura di E. C. Batt. G. **38**, 171-176.

Uebersetzung des Nekrologs auf Joseph Bertrand in Nature, 26. April 1900. Eine Darstellung des äusseren Lebensganges macht den Anfang. Vom Vater in die Mathematik eingeführt, bestand er bereits im 11. Jahre das Examen für die Zulassung zur École Polytechnique, in die er sechs Jahre später aufgenommen wurde. 1839 schrieb er einen Aufsatz über die Theorie der Elektricität, 1841 Abhandlungen über unbestimmte Formen, über das Jacobi'sche Theorem und über Differentialgleichungen. 1844 wurde er Répétiteur d'Analyse an der École Polytechnique, 1847 Examinator, 1856 Professor der Analysis derselben Schule, 1858 zugleich Professor der höheren Mathematik an der École Normale, 1856 Mitglied und 1875 beständiger Secretär der Akademie. Er starb am 3. April 1900 zu Paris.

Nach Erwähnung der bekannten Lehrbücher Bertrand's über Arithmetik, Algebra, Differential- und Integralrechnung, sowie seiner Ausgabe von Lagrange's Mécanique analytique wird eine Uebersicht über seine zahlreichen Abhandlungen gegeben. Sie gehören fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik an.

Der Nekrolog schliesst mit einer Schilderung der Persönlichkeit Bertrand's. M.

E. Wölffing. Dr. O. Böklen †. Böklen Mitt. (2) **2**, 65.

Kurze Mitteilung von dem Ableben des Gründers dieser kleinen periodischen Zeitschrift (gest. 20. Juni 1900). Lp.

Professor Thomas Craig. Johns Hopkins Univ Circ. **19**, 67.

Kurzer Nachruf auf Thomas Craig (geb. 1856 in Pittston Pa, gest. den 8. Mai 1900 in Baltimore als Professor der reinen Mathematik

an der Universität daselbst). Craig war seit dem Jahre 1884 einer der Herausgeber des American Journal of Mathematics. M.

Obituary. Professor Henry Allan Hazen. Am. J. of science (4) **9**, 235-236; Nature **61**, 398.

Geb. 12. Jan. 1849 zu Sirur in Indien, gest. 23. Jan. 1900 in Folge eines Sturzes vom Zweirade zu Washington; Meteorologe, seit 1891 einer der Professoren für Meteorologie in dem „Weather-Bureau". Zu erwähnen sind von seinen grösseren Arbeiten: „The reduction of air pressure to sea-level", „The climate of Chicago". Lp.

E. Lampe. Nachruf für Professor Dr. Reinhold Hoppe. Verh. Deutsche Phys. Ges. **2**, 183-201.

Ernst Reinhold Eduard Hoppe, geb. zu Naumburg a. S. 18. Novbr. 1816 als Sohn eines Predigers, besuchte die Gymnasien zu Eisleben, Schulpforta, Greifswald, studirte von 1838 bis 1842 zuerst in Greifswald, dann in Berlin, unterrichtete als Lehrer teils an Gymnasien, teils privatim bis 1853, promovirte in Halle 1850, habilitirte sich 1853 in Berlin und blieb mit einer Unterbrechung 1858/59, wo er in Glogau am Gymnasium unterrichtete, bis zu seinem Lebensende am 7. Juni 1900 Privatdocent der Berliner Universität, an der ihm 1870 der Titel als Professor verliehen wurde. Seit 1872 war er Redacteur des Archivs der Mathematik und Physik, als Grunert, der Begründer dieser Zeitschrift, gestorben war.

Die Rede bespricht die mathematischen Schriften Hoppes aus der Analysis, der Geometrie, der Mechanik und der mathematischen Physik, seine philosophischen Veröffentlichungen, seine Wirksamkeit als Redacteur und als Recensent, endlich seinen Charakter und seine Lebensphilosophie. Lp.

Professor D. E. Hughes. Nature **61**, 325-326.

David Edward Hughes, geb. 16. Mai 1831 zu London, mit den Eltern 1838 nach Amerika ausgewandert, Professor der Musik zu Bardstown (Kentucky) im Alter von 19 Jahren, dann auch Professor für Naturwissenschaften; den Typendruck-Telegraphen erfand er 1855. Das Mikrophon gab er 1878 an. „Er war nicht ein Mathematiker, auch war er nicht gerade bewandert in der wissenschaftlichen Litteratur." Er starb am 22. Jan. 1900 in London, wo er in seinen reifen Lebensjahren den Wohnsitz hatte. Lp.

B. Schwalbe. Nachruf auf G. Karsten. Verh. Deutsche Phys. Ges. **2**, 147-159.

Gustav Karsten, geb. 24. November 1820 zu Berlin, gest. 15. März 1900 zu Kiel, Zögling des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums in Berlin, studirte auf den Universitäten in Berlin und Bonn, promovirte in Berlin 1843, habilirte sich ebenda 1845, war einer der Stifter der in demselben Jahre gegründeten Physikalischen Gesellschaft und der erste Redacteur der „Fortschritte der Physik", von denen er die vier ersten Bände allein, den fünften mit Beetz herausgab. Im Jahre 1847 zum ordentlichen Professor der Physik und Mineralogie an der Universität in Kiel ernannt, hat er dort bis zu seinem Tode gewirkt. Im Jahre 1894 hatte er jedoch schon die Direction des physikalischen Institutes abgegeben, 1898 das Inspectorat des Aichungsamtes niedergelegt. Am bekanntesten ist seine allgemeine „Encyklopädie der Physik" (1860-70) geworden, zu der die Meteorologie von Schmid, die physiologische Optik von Helmholtz, die Lehre vom Magnetismus von Lamont als einzelne Teile beigesteuert sind. Die eigenen Arbeiten von Karsten erstrecken sich besonders auf die allgemeine Physik, Meteorologie, Meeresforschung. Der Nekrolog von Schwalbe giebt eine Reihe wertvoller historischer Notizen, so unter anderem über die Stifter der Physikalischen Gesellschaft: Wilhelm Heintz, Emil du Bois-Reymond, Hermann Knoblauch, endlich über die Vorfahren von Karsten. Lp.

L. Weber. Zum Gedächtnisse Gustav Karsten's. Kiel: Universitätsbuchhandlung. 24 S. gr. 8° mit 1 Bildnis.

C. S. H. Obituary. James Edward Keeler. Am. J. of science (4) **10**, 325-326; Nature **62**, 497.

Geb. 8. Septbr. 1857, gest. 12. Aug. 1900 als Director des Lick-Observatory. Lp.

N. M. W. N. Ligin. Nachruf. Odessa Techn. Ges. 1900 No. 1, 44-49. (Russisch.)

Sitzungsbericht der allgemeinen Versammlung Odessaer Abteilung der Kaiserlichen Russischen Technischen Gesellschaft 27. Jan. 1900 gewidmet dem Andenken von W. N. Ligin. Odessa Techn. Ges. 1900 No. 2, 1-14.

W. N. Ligin, geb. 1846, Professor an der Universität Odessa von 1874 bis 1895, dann Curator des Lehrbezirks von Warschau, starb am 6. Januar 1900. (Vollständigere Biographie in Odessa Techn. Ges. 1897). In der Sitzung der technischen Gesellschaft, deren Vorsitzender der Verstorbene von 1882 bis 1897 war, sprachen zuerst A. W. Owen und L. A. Richavie; darauf machte I. M. Zanczevsky Mitteilung über die wissenschaftliche und pädagogische Thätigkeit von W. N. Ligin. Si.

V. Knorre. Nekrolog. Carl Theodor Robert Luther. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **35,** 191-200.

Geb. 16. April 1822 zu Schweidnitz, gest. 15. Februar 1900 auf der Düsseldorfer Sternwarte, Sohn eines Offiziers der Freiheitskriege, der, ein früherer Jurist, bis zum Hauptmann befördert und als einarmiger Invalide entlassen wurde. Nach Besuch des Schweidnitzer Gymnasiums studirte Luther 1841/43 in Breslau, dann in Berlin, wo er bis 1851 an der Sternwarte arbeitete, seit 1850 als zweiter Beobachter; Ehrendoctor der Universität Bonn wurde er 1854. Als Brünnow's Nachfolger wurde er 1851 Leiter der Sternwarte „Charlottenruhe" in Bilk-Düsseldorf und blieb in dieser Stellung nach mehrmaliger Aufbesserung seiner Besoldung bis zu seinem Tode. In den Jahren 1852 bis 1890 hat er auf dieser Sternwarte 24 Planetoiden entdeckt, für welche ihm die Priorität verblieben ist. Bis zuletzt thätig, wurde er seit 1892 durch seinen Sohn Wilhelm als Adjuncten unterstützt. Einen besonderen Reiz erhält der vorliegende Nekrolog durch die Einfügung eines längeren Schreibens von Galle, dem überlebenden Altersgenossen Luther's, über den verstorbenen bescheidenen und berühmten Astronomen. Ein kurzer Nekrolog steht auch in Nature **61,** 473-474. Lp.

W. Kahan. P. Passalski. (Nachruf.) Spaczinski's Bote No. 287. (Russisch).

P. T. Passalski, Privatdocent an der Universität Odessa, geb. 1871, gest. 12. Nov. 1900. Seine wichtigste Arbeit: Magnetische Anomalien im Erzrevier von Kriwoi Rog (Süd-Russland) ist erst nach seinem Tode erschienen. Si.

Obituary. Dr. Thomas Preston. Am. J. of science (4) **9,** 395; Nature **61,** 474-475.

Geb. in der Grafschaft Armagh 1860, gest. am 7. März 1900 zu Dublin; Verf. von „Theory of light" (1890), „Theory of heat" (1895), „Spherical trigonometry" und wertvoller Arbeiten aus der elektrischen Theorie des Lichtes. Lp.

Nekrolog Schaeffer (Jena). Hoffmann Z. **31,** 149-153.

Artikel, abgedruckt aus der Jenaer Zeitung vom 8. Febr. 1900; Hauptteil derselben ist die Gedächtnisrede von Abbe, gehalten in der Kollegienkirche. Hermann Schaeffer wurde geboren 1824 zu Weimar, studirte in Jena, Berlin und Leipzig, promovirte auf Grund der Lösung einer Preisfrage 1847 zu Jena, habilitirte sich daselbst 1850 und war somit ein halbes Jahrhundert Lehrer dieser Universität; besondere Verdienste erwarb er sich um die Verbesserung der Lehrmethode in der Mathematik. Lp.

Das Schaeffer-Museum in Jena. Hoffmann Z. **31**, 239-242.

Beschreibung der von Schaeffer in seiner langen Lehrthätigkeit zusammengebrachten Sammlung. Lp.

R. Tucker. John James Walker. Obituary Notice. Lond. M. S. Proc. **32**, 439-442; Nature **61**, 618.

John James Walker wurde am 2. October 1825 zu Kennington, Surrey, geboren und starb am 15. Februar 1900 zu London. Er war bis 1888 Professor der University College School. Um die Londoner Mathematische Gesellschaft, zu deren Mitglied er 1865 gewählt wurde, hat er sich hervorragende Verdienste erworben. Seine früheren Arbeiten gehören der reinen Geometrie, die späteren algebraischen Methoden und Problemen an. M.

N. W. Netschajev. A. K. Zbikowski. (Nachruf.) Kasan Ges. (2) **10**, No. 2, 39-46. (Russisch).

A. K. Zbikowski, Oberlehrer der Mathematik am ersten Kaiserlichen Gymnasium zu Kasan, Privatdocent der Universität und Adjunct für Physik an der tierärztlichen Hochschule ebenda, geb. 1829, gest. 1900 zu Kasan. Si.

Lord Rayleigh. Scientific papers by John William Strutt, Baron Rayleigh. Vol. II. 1881-1887. Cambridge: At the University Press. XIV + 598 S. gr. 8°.

Gemäss den bei der Anzeige des ersten Bandes angegebenen Grundsätzen ist auch bei der Bearbeitung des zweiten Bandes verfahren worden, der unter den Nummern 79 bis 141 die in den Jahren 1881-1887 erschienenen Abhandlungen des Verf. enthält. In Betreff der mit A. Schuster und der Frau H. Sidgwick gemeinsam ausgeführten Arbeiten zur genaueren Bestimmung der elektrischen Einheiten hält Lord Rayleigh es für angezeigt, daran zu erinnern, dass zu der Zeit jener Untersuchungen das Ohm bis auf 4 Procent unsicher war, und dass das damals allgemein angenommene Aequivalent des Silbers um zwei Procent von dem der Bestimmungen des Verf. abwich. Die Hälfte der 63 Schriften dieser Periode betrifft das Gebiet der Elektricität, zehn Aufsätze gehören der Optik an, je fünf der Akustik und der Hydrodynamik, und die übrigen elf verteilen sich auf die anderen Gebiete der Physik. Diesem Reichtum gegenüber muss Ref. auf eine genauere Inhaltsangabe verzichten und nur darin seiner Pflicht genügen, dass er auf diesen Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der mathematischen Physik und der Ideen des Verf. nachdrücklich hinweist. Lp.

O. Reynolds. Papers on mechanical and physical subjects. Reprinted from various transactions and journals. Volume I. 1869-1882. Cambridge: University Press. XVI + 416 S. gr. 8°.

Die Anzeige dieses Bandes können wir am besten mit den ersten Absätzen des Vorwortes geben: „Da ich die verschiedenen Neudrucke der Abhandlungen eines und desselben Verfassers, die während der letzten dreissig Jahre veröffentlicht sind, ungemein nützlich gefunden habe, und da ich sicher war, dass es für manche meiner Freunde bequem sein würde, wenn die Schriften über mechanische und physikalische Gegenstände, die ich in verschiedenen Gesellschaften und wissenschaftlichen Zeitschriften mitgeteilt habe, in Form eines Sammelwerkes erschienen, so benutzte ich, nachdem ich mich auch des kundigen Beistandes des Hrn. Charles B. Dewhurst bei dem Sammeln und Einordnen der Aufsätze und beim Durchsehen der Druckbogen versichert hatte, gern die mir durch die Freigebigkeit des Syndikats der Universitätspresse gebotene Gelegenheit, meine in den Jahren 1869 bis 1900 geschriebenen Abhandlungen als Sammelwerk drucken zu lassen. Dieselben umfassen alle Abhandlungen, welche ich in den Verhandlungen und Zeitschriften in den Druck gegeben habe, ausgenommen gewisse Auszüge aus Schriften, die zu etwas späteren Zeiten in vollem Umfange abgedruckt sind, sechs kurze Artikel von vorübergehendem Interesse und eine Abhandlung von James Prescott Joule, die separat erschienen ist, nämlich als Band VI, Serie 4 der Memoirs and proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Die Titel und Texte der ersten 40 derselben von 1869 bis 1882 stehen in dem vorliegenden Bande. Beim Abdrucke der Schriften sind Fehler, die aus Unachtsamkeit entsprungen sind, verbessert worden, wo man sie entdeckte; sonst aber sind keine Aenderungen getroffen, auch sind keine Anmerkungen hinzugefügt. Die chronologische Ordnung ist bei der Anordnung der Abhandlungen befolgt worden, obgleich dadurch eine übergebührliche Häufung der Unstetigkeit in der Folge von Aufsätzen über die nämlichen Gegenstände entsteht. In der Absicht, der Unbequemlichkeit dieser Unstetigkeit abzuhelfen, sind ausser den Rückweisen auf die frühere Schrift auch Hinweise auf die Abhandlungen hinzugefügt, in denen die Fortsetzung der Untersuchung über den Gegenstand folgt.“ — Wie in englischen Werken üblich, befindet sich auch am Ende dieses Bandes ein alphabetisches Sachregister.

Lp.

F. J. Studnička. Verzeichnis der Bücher und Abhandlungen, welche im Laufe von 40 Jahren veröffentlicht wurden von dem k. k. Hofrate Dr. F. J. Studnička, o. ö. Professor der k. k. böhm. Universität. Prag: Selbstverlag. 24 S. (Böhmisch).

Verzeichnis von 270 Büchern und Abhandlungen des Autors mit Ausschluss sowohl seiner zahlreichen Gutachten und Referate als auch seiner bibliographischen Artikel in den beiden böhmischen Wörterbüchern (vergl. F. d. M. **30**, 29, 1899).

Sda.

M. Curtze. Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantor's. Bibl. Math. (3) 1, 227-231.

Nach einigen biographischen Notizen giebt Curtze eine Uebersicht über die wichtigsten von Cantor's mathematisch-historischen Arbeiten und hebt den grossen Einfluss hervor, den dieselben auf die Entwickelung des mathematisch-historischen Studiums gehabt haben. Selbstverständlich verweilt er besonders bei den „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"; einen grossen Vorzug der Darstellung Cantor's findet er darin, dass Cantor sich in den jeweiligen wissenschaftlichen Geist der zu behandelnden Zeit hineinzuversetzen vermocht hat. E.

G. de Almeida Garrett. Homenagem da camara dos dignos pares do reino ao doutor Gomes Teixeira por iniciativa do doutor Gonçalo de Almeida Garrett 8 de maio de 1900. Lisboa: Imprensa nacional. 26 S. 8°.

Die Akademie zu Madrid hatte als Preisfrage die Aufgabe gestellt, ein geordnetes Verzeichnis aller Curven beliebiger Gattung aufzustellen, die einen besonderen Namen erhalten haben, unter Zufügung einer kurzen Angabe über die Gestalt, die Gleichungen und die allgemeinen Eigenschaften einer jeden, nebst Anführung der Werke oder der Autoren, denen die erste Kenntnis verdankt wird. Von den Bewerbungsschriften sind zwei als gleichwertig mit dem ersten Preise bedacht worden, nämlich die von Gino Loria und von F. Gomes Teixeira. Die Zuerkennung des Preises an den Letzteren hat Veranlassung zu Ovationen für diesen bedeutendsten lebenden Mathematiker der Pyrenäen-Halbinsel gegeben; die vorliegende Broschüre berichtet über die ihm dargebrachten Huldigungen, von denen die Festrede des G. de Almeida-Garrett als die umfangreichste dem Festgefühl einen enthusiastischen Ausdruck giebt. Lp.

Berichte über die Sitzung der Moskauer Mathematischen Gesellschaft den 21. März 1900 (a. St.) Mosk. Math. Samml. 21, 537-578. (Russiseh.)

Am 21. März 1900 (a. St.) feierte die Moskauer Mathematische Gesellschaft durch eine öffentliche Sitzung die Publication des XX. Bandes des von der Gesellschaft herausgegebenen Journals Mathematiczeskij Sbornik (Mathematische Sammlung), seit 1867 die bedeutendste russische mathematische Zeitschrift. Die Sitzung wurde mit der Rede des Präsidenten N. W. Bugajew eröffnet. Es folgten die Reden von N. J. Joukovsky: „Ueber die Analogie zwischen zwei Aufgaben der Mechanik" (S. 542-551) und N. A. Umow: „Ueber den gegenwärtigen Zustand der physikalischen Theorien". Dann folgten die Gratulationen und die Adressen an die Gesellschaft und ihren Präsidenten N. W. Bugajew, einen der Begründer

der Gesellschaft, Secretär bis 1886, dann Vice-Präsident bis 1891, von 1891 bis jetzt Präsident. Si.

G. Eneström. Le congrès d'histoire des sciences à Paris (23-28 juillet 1900). Bibl. Math. (3) **1,** 265.

Kurzer Vorbericht über den Congress für Geschichte der Wissenschaften, der seiner Zeit in Paris 1900 stattfand, und über den ein ausführlicher Bericht im folgenden Bande der Bibl. Math. erschienen ist. E.

J. Boyer. Le congrès international des mathématiciens à Paris (6-12 août 1900). Bibl. Math. (3) **1,** 264-265.

E. Lampe. Der zweite internationale Mathematiker-Congress zu Paris vom 6. bis 11. August 1900. Bibl. Math. (3) **1,** 485-494.

Boyer berichtet über die Vorbereitungen zum kommenden internationalen Mathematiker-Congress in Paris und teilt u. a. mit, dass gegen 1000 Anmeldungen von Mathematikern eingegangen wären, in deren Begleitung noch etwa 680 Familienmitglieder erscheinen würden.

In seinem Bericht über den stattgefundenen Congress constatirt Lampe, dass von den erwarteten Teilnehmern zusammen kaum 300 anwesend waren, und deutet an, wie dieser auffällige Umstand möglicherweise erklärt werden könne. Dann giebt er eine Uebersicht über die wissenschaftlichen und geselligen Zusammenkünfte des Congresses, woraus sich ergiebt, dass zwar viele interessante Vorträge gehalten wurden und einige Feste stattfanden, aber die Anordnungen im allgemeinen als misslungen bezeichnet werden können. Einige Mängel derselben werden auch besonders behandelt und für die folgenden Congresse als „observanda, sed non imitanda" hervorgehoben. E.

E. Czuber. Zweiter internationaler Mathematiker-Congress in Paris. Zeitschr. für Realschulwesen **25,** 13 S. 8° sep.

Charl. A. Scott. The international congress of mathematicians in Paris. American M. S. Bull. (2) **7,** 57-79.

Beide Berichte, die etwa denselben Umfang haben wie der im vorangehenden Referate besprochene Artikel des Ref., enthalten ungefähr auch dasselbe; natürlich ergänzen sie sich unter einander. Besonders scharf spricht sich die Amerikanerin über den Mangel an Fürsorge für die fremden Gäste aus. Wenn erst der officielle Bericht erschienen sein wird, dessen Verzögerung im Erscheinen ganz der auf dem Congresse herrschenden Unordnung entspricht, wird Gelegenheit sein, auf die einzelnen gehaltenen Vorträge näher einzugehen. Lp.

D. Sintzow. Der zweite internationale mathematische Congress in Paris 6.-12. August 1900. Bobynin's Phys.-math. Wissensch. (2) **1**, No. 5, 129-137; Spaczinski's Bote No. 291. (Russisch.) Si.

S. Dickstein. Bericht über den zweiten internationalen mathematischen Congress, gehalten zu Paris 6.-12. August 1900. Wiad. Mat. **4**, 241-247. (Polnisch.)

M. Cantor. Die wissenschaftlichen Congresse in Paris im Sommer 1900. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45**, 38.

Enthält einen Hinweis auf das, was die betreffenden Congresse bieten würden. Tn.

The international congress of mathematicians. Nature **62**, 418-420.

A. Gutzmer. Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu München, 17.-23. September 1899. Bibl. Math. (3) **1**, 258-261.

A. Gutzmer. Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Aachen, 16.-23. September 1900. Ib. 495-496.

Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Boulogne-sur-Mer, 14-21 septembre 1899. Ib. 261.

Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Paris, 2-9 août 1900. Ib. 496.

E. T. Whittaker. Mathematics at the meeting of the British Association at Dover, 1899. Ib. 262-263.

E. T. Whittaker. Mathematics at the British Association meeting, 1900. Ib. 496-498.

A. Macfarlane. Meeting of the American Association for the advancement of science at Columbus, 1899. Ib. 263-264.

Mathematics at the meeting of the American association and the American mathematical society at New York, 1900. Ib. 498.

Kurze Berichte über die betreffenden Mathematiker-Versammlungen und die Gegenstände der auf denselben gehaltenen Vorträge. E.

J. Pierpont. The summer meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung at Munich, September 1899. American M. S. Bull. (2) **6**, 282-287.

F. N. Cole. Meetings of the American Mathematical Society. 1. Sixth annual meeting. 2. February meeting. 3. April meeting. 4. Seventh summer meeting. American M. S. Bull (2) **6**, 177-184; 267-278; 365-372; **7**, 1-14.

Th. F. Holgate. Meetings of the Chicago section. 1. December meeting. 2. April meeting. American M. S. Bull. (2) **6**, 184-194; 373-381.

E. T. Whittaker. Mathematics at the British Association. Nature **62**, 561.

Meder. Abteilung für Mathematik und Astronomie in gemeinschaftlicher Tagung mit der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Aachen 1900). Naturw. Rundsch. **15**, 541-543.

International association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics March, 1900. Toronto: The Rowsell-Hutchison Press. 12 S. 8°.

Verzeichnis der Beamten, der 68 Mitglieder, Kassenbericht, Satzungen.
Lp.

Primera Reunion del Congreso cientifico latino-americano. Trabajos de la premiera seccion. Buenos Aires 1898.

Vom 10. bis zum 20. April 1898 versammelte sich zu Buenos Aires ein wissenschaftlicher Congress, zu dem die Sociedade cientifica argentina die Einladungen hatte ergehen lassen. An ihm nahmen Gelehrte teil, die aus allen Ländern Amerikas lateinischer Zunge gekommen waren. Bei dieser Gelegenheit wurden die folgenden auf die Mathematik bezüglichen Arbeiten vorgelegt:

F. Villarreal. Nomografia ó construccion de tablas graficas. Auseinandersetzung des für die Praxis wichtigsten Teiles der Theorie der Nomogramme.

F. Villarreal. Geometrias imaginarias ó no-euclideanas. Darlegung der Principien der verschiedenen geometrischen Systeme und ihrer Beziehungen zur Geometrie der Kugel.

A. Tafelmacher. Sobre la construcción del polígono regular de 17 lados. Darstellung einer Methode zur Construction der regelmässigen Siebzehnecke.

E. Soulanges. Applicación de la Estatica grafica á los problemas fundamentales de la Topografia. Anwendung der graphischen Statik bei Aufnahmen des Geländes und bei der Berechnung von Oberflächen.

Tx. (Lp.)

A. Rebière. Pages choisies des savants modernes extraites de leurs œuvres. Paris: Nony et Cie. VIII + 618 S. 8°. [Darboux Bull. (2) **24**, 117-118.]

E. Wölffing. Verzeichnis der Zeitschriften für die Gebiete der Mathematik, der Physik, der Technik und der verwandten Wissenschaften, welche auf württembergischen Bibliotheken vorhanden sind. Stuttgart: H. O. Sperling. 18 S. gr. 8.

L. Frobenius. Die Mathematik der Oceanier. Berlin: F. Dümmler's Verl. 35 S. gr. 8°.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

G. Eneström. Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für actuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Bibl. Math. (3) **1**, 1-7.

Einleitungsweise hebt der Verf. hervor, dass und warum die mathematisch-historische Forschung ein besonderes Organ nötig hat, und giebt eine Uebersicht über die bisherigen mathematisch-historischen Zeitschriften. Dann wird als Hauptzweck der erweiterten Folge der Bibliotheca Mathematica angegeben, neue Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie anzuregen und zu veröffentlichen, und die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, dass solche Untersuchungen nicht nur erwünscht sind, um die von der bisherigen Forschung gelassenen Lücken auszufüllen, sondern dass sie auch vom rein mathematischen Gesichtspunkt aus wertvoll sein müssen, da die Geschichte der Mathematik in der letzten Zeit eine ganz andere Bedeutung als früher bekommen hat. Hierzu werden noch Bemerkungen darüber angefügt, wie die Zeitschrift ihren Hauptzweck am besten erfüllen wird.

Zuletzt wird kurz dargelegt, welches die im Titel des Artikels angedeuteten actuellen Fragen sind, von denen einige dem mathematisch-historischen Gebiete sehr nahe, andere demselben etwas ferner liegen.

E.

G. Loria. Sui metodi di compilazione dei cataloghi bibliografici. Pensieri e desideri. Loria Boll. Bibl. **3**, 65-70.

Verf. hält die absolute „Unpersönlichkeit“ der bibliographischen Verzeichnisse für unzuträglich und schlägt vor, dass alle einen bestimmten Gegenstand betreffenden Schriften in drei Klassen verteilt werden sollen, welche beziehungsweise die wichtigsten, die nützlichen und die nutzlosen oder irrigen zu umfassen haben, und dass jedem Titel ein Symbol bei-

gefügt werde, aus welchem ersichtlich sei, welcher Klasse die bezügliche Schrift angehört. Vi.

S. GÜNTHER. Le développement historique de l'enseignement mathématique en Allemagne. Ens. math. **2**, 237-264.

Günther giebt die Darstellung des mathematischen Unterrichts auf deutschem Boden von der Alcuinschule Karl's d. Gr. ab; er zeichnet die dürftigen Wortkenntnisse jener alten Zeit, schildert kurz die schwachen Anfangsleistungen der romanischen Schulen des Mittelalters, dann die Besserung der Verhältnisse in Wien (von 1384 ab), allmählich auch an den anderen deutschen Universitäten, die Anstellung von eigentlichen Lehrern für Mathematik (seit 1501) in Wien, bald auch anderwärts, zumal in Wittenberg, dann die Anläufe zur Besserung an den Mittelschulen des 16. Jahrhunderts. Zur Kennzeichnung der Zustände des 17. Jahrhunderts weist Günther hin auf die benutzten Bücher, die Vorlesungsanzeigen und auf die Doctordisputationen jener Zeit, für das 18. Jahrhundert auf die Werke von Sturm, Wolf und Kästner; auch der niedrige Stand mathematischer Forschung in Deutschland wird gezeichnet. Die Zeiten ändern sich: auf die Dämmerung um 1800 folgt von 1825 ab das helle Sonnenlicht der Gauss, Möbius, Dirichlet und all der anderen Berühmten. Zum Schluss wird noch der Wirksamkeit einzelner für den mathematischen Unterricht hoch bedeutsamer Schulmänner gedacht, wie J. H. T. Müller und Brétschneider. Tn.

G. VIVANTI. Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893-99. Bibl. Math. (3) **1**, 160-165.

Nach einigen kritischen Bemerkungen zu dem Artikel „Mengenlehre" in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" giebt Vivanti ein Verzeichnis der Litteratur über diesen Gegenstand während der Jahre 1893-1899, wodurch seine früheren Verzeichnisse (vgl. F. d. M. **24**, 1892, 42; **25**, 1893/94, 64) ergänzt werden. Die Anzahl der citirten Schriften ist 67, von denen beinahe die Hälfte von italienischen Verfassern herrührt. E.

G. ENESTRÖM. Sur l'origine du terme „surdus" (= incommensurable). [Anfrage 85.] Bibl. Math. (3) **1**, 516.

Der Ursprung des Wortes „surdus" ist noch nicht ermittelt. Er kommt bei Leonardo Pisano vor, aber schon vor ihm hat Gherardo Cremonese dasselbe als Kunstwort angewendet. E.

M. STEINSCHNEIDER. Robertus Castrensis. Bibl. Math. (3) **1**, 273-274.

Mit Bezugnahme auf eine Angabe von Curtze bemerkt Steinschneider, dass Robertus Castrensis die Algebra des Alkhwarizmi schon 1145 übersetzte. E.

Fr. Hardcastle. Report on the present state of the theory of point groups. Part I. Brit. Ass. Rep. 1900, 121-131.

Der gegenwärtige Teilbericht entwirft zuerst den Plan, nach welchem das Referat erstattet werden soll. Der zweite Paragraph giebt einen historischen Umriss, in welchem die angenommenen Perioden die folgenden sind: A. 1720-1818, B. 1818-1857, C. 1857-1873, D. 1873-1890, E. 1890-1900. In § 3 werden die Haupttitel einer Analyse dem Inhalt gemäss festgestellt, nämlich: A. Die drei verschiedenen Methoden der Untersuchung, die analytische, die geometrische, die transcendente. B. Verschiedene Definitionen, die bei englischen, französischen, deutschen und italienischen Schriftstellern in Gebrauch sind, und der logische Zusammenhang der Begriffe, wenn sie in der Sprache der analytischen Geometrie behandelt werden. C. Die durch die Theorie erhaltenen Ergebnisse in den unter B definirten Ausdrücken. D. Eigenschaften von Oberflächen im vieldehnigen Raume, in Zusammenhang mit den Eigenschaften linearer Systeme. In § 4 wird ein eingehender Bericht der Abhandlungen Brill's über Elimination und algebraische Verwandtschaften aus den Jahren 1863 bis 1873 gegeben, wobei diese Abhandlungen den Unterabschnitt (11) der historischen Abteilung C (1857-1873) bilden. Der Verf. hofft, in ungefähr derselben Art die übrigen historischen Abteilungen erledigen und eine vollständige Bibliographie anhängen zu können. Gbs. (Lp.)

G. A. Miller. Report on the groups of an infinite order. American M. S. Bull. (2) 7, 121-130.

Wie der Verf. 1898 vor der Section A der American Association for the Advancement of Science über die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung einen Bericht erstattet hatte (F. d. M. **30**, 41-42, 1899), so gab er in dem vorliegenden Artikel derselben Versammlung am 28. Juni 1900 ein Referat über die Gruppen von einer unendlichen Ordnung. Zuerst werden die Bedeutungen der gebrauchten Ausdrücke erläutert und historisch begründet; danach werden die Hauptarbeiten nebst ihren Ergebnissen kurz besprochen. Wir erwähnen hier nur die Namen Camille Jordan (1868) mit den ihn ergänzenden und berichtigenden Autoren Schoenflies und Sohncke, Lie und Klein, Dyck, H. Poincaré, Study, Engel, denen sich in jüngster Zeit dann andere Forscher angeschlossen haben: Taber, Rettger. Am Schlusse wird eine gedrängte Uebersicht über eine Klasse von Gruppen gegeben, deren Ordnungen von einem oder von mehreren Parametern abhängen, daher als endlich betrachtet werden, aber auch unendlich sein können (symmetrische und alternirende, cyklische, metacyklische, semimetacyklische Gruppen). Hier

begegnet uns vor allem H. Weber, während zuletzt noch Maillet und Loewy genannt werden. Lp.

G. A. Miller. A popular account of some new fields of thought in mathematics. Amer. Math. Monthly 7, 91-99.

Th. Muir. The theory of alternants in the historical order of its development up to 1841. Edinb. Proc. 23, 93-132.

Th. Muir. The theory of skew determinants and Pfaffians in the historical order of its development up to 1857. Edinb. Proc. 23, 181-217.

G. Wertheim. Ueber die Lösung einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius. Bibl. Math. (3) 1, 417-420.

In der Curtze'schen Ausgabe des „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius (Zeitschr. für Mathem. 36, 1891; F. d. M. 23, 1891, 6-7) kommen einige Lösungen vor, die entweder sehr verwickelt oder sogar unverständlich sind. Wertheim bemerkt, dass zwei der betreffenden Aufgaben offenbar ursprünglich dem Diophant entnommen sind, und findet, dass die Lösungen des Jordanus leicht verständlich werden, wenn man annimmt, dass dieser den von Diophant eingeschlagenen Weg benutzt hat. Wertheim löst noch sehr einfach eine dritte Aufgabe, wo Curtze für die Art der Lösung keine genügenden Fingerzeige gefunden hat. E.

G. Eneström. Sur un problème plaisant appartenant à la théorie des nombres. [Anfrage 79.] Bibl. Math. (3) 1, 274.

Ueber den Ursprung einer Scherzaufgabe aus der Zahlentheorie, die bei Leonardo Pisano vorkommt, aber nachweislich schon von Ibn al-Haitam gelöst worden ist. E.

F. Hultsch. Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen. Bibl. Math. (3) 1, 8-12.

Aus einer Notiz bei Theon Smyrnaeus wusste man schon seit längerer Zeit, dass die Griechen einige Lösungen der unbestimmten Gleichung $\delta^2 = 2\alpha^2 \pm 1$ kannten, und da die Zahlen α und δ beziehungsweise Seiten- und Diametralzahl genannt wurden, lag die Vermutung nahe, dass die Griechen hier von einem wesentlich geometrischen Gedankengange geleitet wurden. Diese Vermutung wird jetzt von Hultsch bestätigt, und zwar auf Grund einer kürzlich ausgefüllten Lücke im Com-

mentar des Proklos zu Platon's Schrift vom Staate. Proklos zeigt nämlich auf rein geometrischem Wege, dass die Gleichung $d_n^2 = 2s_n^2$, wo also d_n die Diagonale und s_n die Seite eines Quadrates bedeuten, zu den Recursionsformeln

$$d_n = 2s_{n-1} + d_{n-1}, \quad s_n = s_{n-1} + d_{n-1} \qquad (s_1 = 1)$$

führen. Ferner beweist Proklos, ganz wie Theon, empirisch: wenn man d_1 nicht gleich $\sqrt{2}$, sondern gleich 1 setzt, so erhält man durch diese Recursionsformeln die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $d_n^2 = 2s_n^2 \pm 1$. Nach der Ansicht von Hultsch hat Proklos mittelbar aus einer vorplatonischen Quelle geschöpft, und die Bildung der Seiten- und Diametralzahlen ist sicherlich pythagoreischen Ursprunges.

E.

J. Neuberg. Notre supplément. Mathesis (2) **10**, 158-159.

Historisches zu der Aufgabe der 36 Offiziere. Mn. (Lp.)

A. Aubry. La formule du binôme, avant Newton. J. de math. élém. **24**, 24-28, 39-45, 72-76, 87-92.

J. G. Hagen. On the „formula exponentialis replicata" of Euler. [Anfrage 82.] — On the technical terms „Differential Quotient", „Definite Integral". [Anfrage 88.] Bibl. Math. (3) **1**, 275, 517.

Anfragen über das erste Auftreten des Ausdruckes $r^{r^{r^{\cdots}}}$ und die erste Anwendung der Kunstwörter: „Differentialquotient", „Bestimmtes Integral", „Unbestimmtes Integral". E.

J. G. Hagen. On the history of the extensions of the calculus. American M. S. Bull. (2) **6**, 381-390.

Der Verfasser der Synopsis der höheren Mathematik giebt hier kleine Skizzen über die folgenden Themata: 1. Ableitung mit einem allgemeinen Index. 2. Cauchy's „Calcul des résidus". 3. Schell's „Quotial und Instaural". 4. Die Exponential-Function höherer Stufe. 5. Ausdehnung der Rechnung mit endlichen Differenzen. 6. Die logarithmischen Methoden von Bergbohm (!) und Oltramare. Bei dem geringen Umfange der einzelnen Abschnitte ist natürlich auf Vollständigkeit nicht zu rechnen. So fehlen z. B. in No. 1 viele Autoren, die in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften **2**, 116-119, aufgezählt stehen. Lp.

A. Pringsheim. Zur Geschichte des Taylor'schen Lehrsatzes. Bibl. Math. (3) **1,** 433-479.

Diese Abhandlung enthält eine eingehende historisch-kritische Untersuchung über den Taylor'schen Lehrsatz, wobei auch einige häufig vorkommende historische Angaben berichtigt werden. Zuerst giebt der Verf. Auskunft über die erste formale Herleitung des Satzes in Taylor's „Methodus Incrementorum“ (1715), bemerkt, dass man in unseren Tagen mit Unrecht — zum Teil auf Grund eines Missverständnisses — die Entdeckung der Reihe für Johann Bernoulli reclamirt hat, und berichtet über den d'Alembert'schen Beweis des Satzes, der freilich ebenso ungenügend wie die Taylor'sche Herleitung ist. Dann geht er zu den Untersuchungen von Lagrange über, in denen die erste zielbewusste Aufstellung und Discussion des Restgliedes sich findet, und giebt eine umständliche Analyse dieser wichtigen Untersuchungen. Daraus geht hervor, dass Lagrange sowohl die exacte Darstellung des Restes durch ein bestimmtes Integral, als auch mit Hülfe des Mittelwertsatzes die Herleitung der nach ihm benannten Abschätzungsformel gegeben hat. Weiter werden die Untersuchungen über das Restglied von Ampère, Cauchy, Roche, Schlömilch und Caqué erwähnt, welche zwar keine wesentlichen Fortschritte bezeichnen, aber einige interessante Herleitungen und Ausdrücke aufzuweisen haben.

Der dritte Abschnitt der Abhandlung von Pringsheim behandelt die Frage nach der Convergenz und Gültigkeit der Taylor'schen Reihenentwickelung, eine Frage, die von Lagrange noch nicht gestreift wurde, und deren Geschichte erst mit Cauchy anfängt. Hier werden ausser den grundlegenden Arbeiten von Cauchy auch Untersuchungen von Cournot, du Bois-Reymond und Cellérier erwähnt und die durch sie erlangten Resultate angegeben; da aber die Frage dadurch noch nicht erledigt worden ist, hat Pringsheim selbst einige Sätze hinzugefügt, welche die hinreichenden und notwendigen Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihenentwickelung für Functionen einer reellen Veränderlichen enthalten.

Zuletzt wird der Taylor'sche Satz für Functionen einer complexen Variable behandelt. Auf diesem Gebiete hat Cauchy ebenfalls die ersten Untersuchungen angestellt, welche von Lamarle, Mansion, Darboux, Goursat und anderen fortgesetzt worden sind. Auch hier hat Pringsheim wesentlich die Resultate dieser Fachgenossen ergänzt, und es hat sich dadurch ergeben, dass der Taylor'sche Satz merkwürdigerweise für Functionen einer complexen Veränderlichen in derselben Allgemeinheit (d. h. ohne dass $f'(z)$ irgend welchen Stetigkeitsbedingungen genügen muss) gültig ist, während für Functionen einer reellen Veränderlichen die Gültigkeit des Satzes von gewissen Stetigkeitsbedingungen der Differentialquotienten von $f(z)$ abhängt. E.

I. Timtchenko. Sur un point du „Tractatus de latitudinibus formarum“ de Nicolas Oresme. Bibl. Math. (3) **1,** 515-516.

Der Satz: „An den Höhen- und Tiefenpunkten einer Curve ist der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse Null“ wird von Cantor in seinen „Vorlesungen“ Oresme zugeschrieben, aber, wie Timtschenko zeigt, kann man aus der fraglichen Stelle bei Oresme höchstens folgern, dass am Höhenpunkte eines Kreises der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse ein Minimum ist. Dagegen giebt es bei Oresme gar keine Andeutung, dass dieses Minimum gleich Null sein muss. E.

E. Fabbri. Il teorema dell'integrale di Cauchy; contributo alla storia critica dell'analisi. Bologna: Zamorani e Albertazzi. 71 S. 8°.
Vi.

P. Stäckel. Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Functionentheorie. Bibl. Math. (3) **1**, 109-128.

Der Verf. behandelt hier die Geschichte der Functionen einer complexen Veränderlichen bis zum Jahre 1825, in dem die grundlegende Abhandlung von Cauchy über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen erschien. Er erwähnt anfangs die betreffenden Untersuchungen von Johann Bernoulli und Leibniz (1702-1712) und von d'Alembert (1746), der zuerst den Satz aufstellte, dass jede Function einer complexen Grösse sich unter der Form $A+Bi$ darstellen lässt. Dann berichtet er über die Arbeiten auf diesem Gebiete von Euler (1777, 1781), die zwar wichtig sind, aber keinen principiellen Fortschritt bezeichnen, weil Euler das Integral als Umkehrung des Differentialquotienten und nicht als Grenzwert einer Summe betrachtete, sowie von Laplace (1782, 1810), der die Frage über die Berechtigung des Ueberganges vom Reellen zum Imaginären streifte. Die letzte Frage wurde näher untersucht von Poisson, der dabei fand, dass ein solcher Uebergang in gewissen Fällen zu unrichtigen Resultaten führt, und dem das Verdienst zukommt, zuerst Integrationen durch imaginäres Gebiet ausgeführt zu haben. Zuletzt werden von Stäckel die einschlägigen Abhandlungen von Cauchy in Betracht gezogen, von denen die erste aus dem Jahre 1814 stammt. Ob der fundamentale Fortschritt in der Arbeit von 1825, nämlich die Einführung von Integrationen über die Begrenzung eines Rechtecks, als eine selbständige Erfindung von Cauchy betrachtet werden soll, lässt Stäckel unentschieden.

Als Anhang giebt der Verf. einen ausführlichen Litteraturnachweis, und nachträglich bemerkt er, dass ein erheblicher Teil der Ergebnisse seiner Abhandlung gleichzeitig von I. Timtschenko gefunden und in einer ausführlichen russischen Arbeit über die Geschichte der Functionentheorie veröffentlicht worden ist (vergl. F. d. M. **30**, 48, 1899). E.

G. Heinrich. Notiz zur Geschichte der Simpson'schen Regel. Bibl. Math. (3) **1**, 90-92.

Heinrich zeigt, dass James Gregory in seiner Schrift „Exercitationes geometricae“ (1668) für die Fläche einer Curve einen approximativen Ausdruck angegeben hat, der in unserer Schreibweise so aussieht:

$$h(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_2 - y_1 + y_1 - y_0) - 2\,\frac{h(y_2 - 2y_1 + y_0)}{12},$$

wo y_0, y_1, y_2 drei äquidistante Ordinaten sind und h deren Abstand bezeichnet. Offenbar ist dieser Ausdruck mit der sogenannten Simpson'schen Regel identisch. E.

G. Eneström. Sur une brochure publiée en 1700 par Jacques Bernoulli. Bibl. Math. (3) **1**, 274.

Ueber die Originalausgabe der „Solutio propria problematis isoperimetrici“ (Basel 1700), von der nur ein einziges Exemplar aufbewahrt zu sein scheint. E.

E. Picard. L'idée de fonction depuis un siècle. Rev. générale des sc. **11**, 61-69.

É. Picard. Ueber die Entwickelung einiger fundamentalen Theorien der mathematischen Analysis im XIX. Jahrhundert. Ins Polnische übersetzt von S. Dickstein. Wiad. mat. **4**, 173-231.

J. G. Hagen. On the so-called: „Legendre's transformation“. [Anfrage 84.]

P. Stäckel. Ueber die sogenannte Legendre'sche Transformation. [Antwort auf die Anfrage 84.] Bibl. Math. (3) **1**, 275, 517.

Hagen fragt, wo Legendre zuerst die nach ihm benannte Transformation benutzt hat, und Stäckel weist auf Mém. Paris 1787, S. 347, hin. Zugleich bemerkt Stäckel, dass diese Transformation schon bei Euler vorkommt, und dass möglicherweise die erste Idee davon Leibniz zukommt. E.

G. B. Halsted. Report on progress in non-euclidean geometry. American Assoc. **48**, 53-68; Amer. Math. Monthly **6**, 219-233.

G. B. Halsted. Gauss and the non-euclidean geometry. Science (n. s.) **12**, 842-846.

R. Bonola. Bibliografia sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea. Loria Boll. Bibl. **3**, 2-3, 33-41, 70-73 (Fortsetzung; siehe F. d. M. **30**, 50, 1899).

Bericht nach vollendeter Publication. Vi.

J. L. Heiberg. Quelques papyrus traitant de mathématiques. Kjöbenhavn Overs. 1900, 147-171.

Der Papyrus enthält Fragmente aus den Elementen des Euklid.
Lp.

P. Mansion. Sur le commentaire d'Anaritius relatif aux éléments d'Euclide. Brux. S. sc. **24A,** 47-49.

Dieser Commentar enthält einen Beweis des euklidischen Postulats, der sich auf das andere Postulat stützt: Es giebt äquidistante Geraden.
Mn. (Lp.)

P. Stäckel. Friedr. Ludw. Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann. **54,** 49-85.

Im Nachlass von Gauss hat sich ein Brief eines seiner Schüler, Wachter, vorgefunden, der, aus dem Jahre 1816 stammend, für die Entwickelung der Gauss'schen Ansichten über die Grundlagen der Geometrie von Interesse und, soweit er sich darauf bezieht, in Band VIII der Werke von Gauss abgedruckt ist. Da aber dieser Brief auch sonst merkwürdig ist (z. B. hat Wachter den später von Lobatschefskij und J. Bolyai entwickelten Begriff der Grenzkugel, auf der „die ganze euklidische Geometrie" gilt, auch operirt er mit Räumen von n Dimensionen wie mit etwas ganz Selbstverständlichem), so erschien es wünschenswert, ihn ganz zu veröffentlichen. Stäckel hat sich aber damit nicht begnügt, sondern hat hier alles gesammelt, was sich über Wachter's Lebensumstände und Leistungen erreichen liess. Ausser den biographischen Daten (Wachter war 1792 geboren und ist am 3. April 1817 in Danzig spurlos verschwunden) giebt Stäckel einen kritischen Bericht über die Versuche, die Wachter zum Beweis des Parallelenaxioms und zum Aufbau der Geometrie gemacht hat. Als Beläge sind beigefügt zwei Briefe Wachter's an Gauss, einer an Bessel, einer von Wachter's Vater an Gauss, endlich eine Uebersetzung einer kleinen Schrift, die Wachter 1817 unter dem Titel: Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi herausgegeben hat.
El.

P. Stäckel. Eine Zeitungsnotiz über Gauss' Stellung zur Parallelen-Lehre. [Anfrage 83.] Bibl. Math. (3) **1,** 275.

Nach einer Angabe in einer Abhandlung aus dem Jahre 1846 scheint schon damals eine Notiz über Gauss' antieuklidische Geometrie in einer Zeitung veröffentlicht worden zu sein, ohne dass es bisher möglich war, diese Notiz wiederzufinden.
E.

Lobatchevski. Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles. (Ch. I-VI). Traduit du russe pour la première fois par F. Mallieux. Liége Mém. (3) **2,** 101 S.

P. TANNERY. Notes sur la pseudo-géométrie de Boèce. Bibl. Math. (3) **1**, 39-50.

Einleitungsweise bemerkt Tannery, dass man nur durch unrichtige oder unbestätigte Angaben veranlasst worden ist, Nipsus unter den Agrimensoren aufzuführen. Er geht dann zur Pseudo-Geometrie des Boëtius über, die eine ganz andere Schrift ist als die aus zwei Büchern bestehende, Boëtius zugeschriebene Ars geometrica, deren älteste Abschrift aus dem 11. Jahrhundert herrührt. Die Pseudo-Geometrie ist in fünf Bücher geteilt, und die älteste bekannte Handschrift derselben stammt aus dem 9. Jahrhundert. Ihr Inhalt ist sehr verschiedenartig: die 2 ersten Bücher behandeln geometrische und arithmetische Fragen, die 2 folgenden enthalten Auszüge aus den Elementen I—IV, und das 5. Buch, das den besonderen Titel „Altercatio duorum geometricorum de figuris, numeris et mensuris" trägt, ist geometrischen, arithmetischen und metrologischen Inhalts. Selbstverständlich kann diese Schrift nicht von Boëtius verfasst sein, und vielleicht hat sie erst im 9. Jahrhundert ihre gegenwärtige Gestalt bekommen, welche Tannery nur durch die Stupidität der Abschreiber erklären kann. E.

R. TUCKER, G. J. ALLMAN, ST. EUMORFOPOULOS. Euclid I, 32. Corr. Nature **63**, 58, 107-107, 157.

Die in englischen Euklidausgaben an der bezeichneten Stelle gegebenen Zusätze werden meistens Simson zugeschrieben, kommen jedoch schon bei Clavius vor und sind wahrscheinlich noch älter. Dies wird durch Allman bestätigt, der anführt: P. Ramus (1572) und andere Autoren des 16. Jahrhunderts. Eumorfopoulos weist sogar auf den Commentar von Proklus hin. Lp.

M. CURTZE. Ueber den Ursprung der Benennung „Radius" für Halbmesser. [Anfrage 87.] Bibl. Math. (3) **1**, 516.

Curtze hat das Wort Radius zuerst bei Mathematikern des XVII. Jahrhunderts getroffen und fragt darum, ob das Wort noch älter ist. E.

G. B. HALSTED. De Morgan to Sylvester. The Monist **10**, 188-197.

Vier Briefe über sphärische Dreiecke, Newton's Methode coordinirter Exponenten und autotomische Polygone. Lp.

D. KIKUCHI. Seki's method of finding the length of an arc of a circle. Tokio Math. Ges. **8**, 179-198.

Aus einer alten japanischen Handschrift wird eine Regel angegeben, um durch Reihenentwickelung die Grösse des Bogenpfeiles zu erhalten,

der je zu der Sehne der Hälfte eines Kreisbogens gehört; das Bildungsgesetz der Reihe wird dabei klar gemacht. Weiterhin werden Vorschriften abgeleitet, um behufs immer stärkerer Annäherung an den wahren Wert stets weitere Reihen zu bilden. In gleicher Weise wird das Quadrat der Länge des halben Bogens zu finden gelehrt. Ein Abschnitt über die japanische Schreibweise von Gleichungen, Brüchen, Vorzeichenersatz u. dgl. ist eingeschoben. Tn.

J. Kürschák. Moderne Ueberschreibung der „Kyklu metresis". Bibl. Math. (3) **1**, 514-515.

Die geometrischen Grundlagen der Rechnung, durch die Archimedes den Umfang der einem Kreise um- und eingeschriebenen 96-Ecke bestimmt hat, lassen sich unmittelbar durch die Formeln $\cot \frac{1}{2}x = \cot x + \operatorname{cosec} x$ und $\operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}x = \cot^2 \frac{1}{2}x + 1$ wiedergeben. E.

A. Aubry. Noticia histórica sobre la cuadratura del círculo. Progreso mat. (2) **2**, 273-305.

Der Verf. giebt eine interessante historische Uebersicht über die Arbeiten zum Behufe der Quadratur des Kreises und der Rectification der Kreislinie seit den ältesten Zeiten bis in die jüngste Vergangenheit. Tx. (Lp.)

R. Fricke. Ueber das Problem von der Quadratur des Kreises. Jahresber. Ver. Naturw. Braunschw. **11**, 184.

A. von Braunmühl. Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. Bibl. Math. (3) **1**, 64-74.

Der Verf. bemerkt, dass die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie einen wesentlich langsameren Verlauf nahm als in der Algebra, und findet den Grund darin, dass die Trigonometrie sich völlig aus geometrischen Anschauungen entwickelte. Adriaen van Roomen (1609) war der erste, der abkürzende Zeichen in umfassenderer Weise benutzte; aber seine Bezeichnungen waren sehr unbequem. Etwas bessere Formelschreibung findet man bei A. Girard (1626) und bei J. J. Stampioen (1632), welcher letztere die Gleichungen ganz in Zeichen gab. Neue Zeichen wurden von P. Herigone (1634), W. Oughtred (1657) und J. Wallis in Vorschlag gebracht; aber da sie für algebraische Rechnungen wenig passend waren, fanden sie keine Verbreitung. Erst mit der Entstehung des Functionsbegriffes wurde die Notwendigkeit abkürzender Bezeichnungen für die trigonometrischen Linien erkennbar. An besondere trigonometrische Functionszeichen mit Nachsetzung des Bogens dachte man freilich anfangs nicht; sondern jede trigonometrische

Grösse wurde durch einen besonderen Buchstaben bezeichnet, und erst Euler führte die jetzt geläufigen Bezeichnungen ein. E.

H. G. Zeuthen. Note sur la trigonométrie de l'antiquité. Bibl. Math. (3) 1, 20-27.

Der Artikel bringt eine wichtige Ergänzung zu v. Braunmühl's „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie". In dieser Arbeit wird nämlich über das „Analemma" des Ptolemaios berichtet und gezeigt, dass darin eine graphische Methode zur Auflösung sphärischer Dreiecke enthalten ist. Aber Zeuthen beweist, dass das „Analemma" in der That zwei Methoden enthält, nämlich die graphische und die „lineare", welche letztere rein trigonometrisch ist, und zu Resultaten führt, die in moderner Formelsprache

$$\sin h = \cos t \cdot \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin \varphi}$$

lauten; das von Ptolemaios behandelte Problem ist, die Höhe h und das Azimuth ω der Sonne im Aequator zu berechnen, wenn man den Stundenwinkel t und die Polhöhe φ kennt. Freilich wendet Ptolemaios nicht die jetzt geläufigen trigonometrischen Functionen an, sondern nur Chorden, so dass z. B. $\sin \varphi$ bei ihm durch $\frac{\text{chorda}\,(2\varphi)}{\text{diameter}}$ ersetzt ist.

Auch mehr verwickelte trigonometrische Formeln kommen im „Analemma" vor, welche zeigen, dass die Griechen imstande waren, ein sphärisches Dreieck trigonometrisch zu bestimmen, wenn ein Winkel und die beiden denselben einschliessenden Seiten gegeben sind. E.

W. Schmidt. Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch? Bibl. Math. (3) 1, 319-320.

Die Ableitung der Heron'schen Vielecksformeln ist bisher zweifelhaft gewesen; Cantor ist der Ansicht, dass sie auf trigonometrischem Wege gefunden worden sind, während P. Tannery und v. Braunmühl für dieselben eine geometrische Ableitung annehmen. Dass die letztere Meinung richtig ist, weist Schmidt hier aus Heron's „Metrika" nach. E.

M. Curtze. Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter. Gesammelt und erläutert. Bibl. Math. (3) 1, 321-416.

Die Urkunden stammen aus dem 12., 13. und 14. Jahrhundert und bringen wertvolle Ergänzungen zu v. Braunmühl's „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie". No. 1 enthält Auszüge aus dem „Liber embadorum" des Abraham bar Chijja (Savasorda) in der Ueber-

setzung des Plato von Tivoli (um 1134, möglicherweise schon 1116 verfertigt). Trigonometrische Sätze oder Rechnungen findet man hier eigentlich nicht, wohl aber etwas über die Beziehung zwischen Halbsehne und Sagitta, sowie eine Sehnentafel mit Anweisungen zur Benutzung derselben. Die Tafel giebt für die Sehnen, deren Länge $\frac{1}{28}, \frac{2}{28}, \cdots, \frac{28}{28}$ des Durchmessers beträgt, die Länge des entsprechenden Bogens, wobei die ganze Peripherie gleich 88 gesetzt wird. Sonst sind die Auszüge hauptsächlich planimetrischen Inhalts.

No. **2** bringt die trigonometrischen Stücke der „Canones super tabulas Toletanas", von Zarkali verfasst und von Gherardo Cremonese († 1187) ins Lateinische übersetzt. Diese „Canones", die auf die trigonometrischen Schriften des christlichen Mittelalters grossen Einfluss gehabt haben, enthalten u. a. eine Methode zur Berechnung der Sinus, wobei der Halbmesser gleich 150 gesetzt wird, und eine kleine Sinustafel, die von 15° zu 15° fortschreitet; auch die einfachsten Beziehungen zwischen sinus, sinusversus und Cotangente („umbra") werden hier angegeben.

No. **3** ist einem Commentar zu Zarkali's „Canones" entnommen, dessen Verfasser in der einzigen bekannten Handschrift nur „Marsiliensis" genannt wird und wahrscheinlich mit Guilelmus Anglicus (um 1231) identisch ist. Nur ein paar specielle Fragen trigonometrischer Natur werden hier erörtert. Um das Verständnis des Commentars zu erleichtern, teilt Curtze einleitungsweise zwei astronomische Kapitel der „Canones" mit.

No. **4** ist eine ziemlich ausführliche trigonometrische Abhandlung von unbekanntem Verfasser aus dem Ende des 13. Jahrhunderts. Die Darstellung ist wesentlich durch den Almagest beeinflusst, der dem Verf. aus arabischen Quellen bekannt war; aber auch spätere Errungenschaften sind hier zu finden. Auffallend ist es, dass der Halbmesser für die Sinusrechnung gleich 150 (wie bei Zarkali), für die Sehnenrechnung gleich 60 (wie bei Ptolemaios), und für die Rechnung mit der „umbra" (Cotangente) gleich 12 gesetzt wird.

No. **5** ergänzt die Auszüge aus Levi ben Gerson's (gest. 1344) Schrift über Trigonometrie, die Curtze schon 1898 in der Bibliotheca Mathematica (vergl. F. d. M. **29**, 1898, 32) veröffentlichte. Hier bringt er nämlich zum Abdruck auch die vier ersten „Dictiones", über deren Inhalt er 1898 kurz berichtete.

No. **6** ist eine anonyme Schrift mit dem Titel „De tribus notis", die wahrscheinlich der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts entstammt. Hier werden mit fast peinlicher Ausführlichkeit alle Fälle (im ganzen 25) behandelt, welche eintreffen können, wenn man aus drei Bestimmungsstücken eines Dreiecks die übrigen berechnen soll. Der Verf. schliesst sich, wie er selbst bemerkt, ganz an Djabir ibn Afla's Sehnenmethode an, ohne den Sinus auch nur zu nennen. Numerische Rechnungen kommen nicht vor, aber auf eine „tabula chordarum et arcuum" wird häufig verwiesen.

No. 7 bringt sehr ausführliche Auszüge aus den „Canones tabularum primi mobilis“ (1322) des Johannes de Lineriis, die Sinus- und Cotangentenrechnungen mit Anwendungen, sowie Sinus- und Cotangententafeln enthalten. Hier, wie in No. 4, ist der Halbmesser teils gleich 150 (bei der Sinusrechnung), teils gleich 60 (in der Sinustafel), teils endlich gleich 12 (in der Cotangententafel) gesetzt. Die Sinusrechnung ist aus Zarkali (oben No. 2) abgeschrieben und später hat Peurbach dieselbe wörtlich aus Johannes de Lineriis entlehnt.

No. 8 ist eine kurze Sinusrechnung des Johannes de Muris, die wesentlich mit der Methode von Zarkali übereinstimmt. E.

C. Taylor. The geometry of Kepler and Newton. Cambr. Trans. **18**, 197-219.

Ueber die Kegelschnitte bei Kepler: „Ad Vitellionem Paralipomena“ und bei Newton: „Principia“. Lp.

A. Aubry. Estudio sobre los conicógrafos. Progreso mat. (2) **2**, 337-363.

Dieser Artikel enthält das Geschichtliche und die Beschreibung der mechanischen Mittel zur Aufzeichnung der Kegelschnitte bis in die jüngste Zeit. Tx. (Lp.)

Ch. A. Scott. The status of imaginaries in pure geometry. American M. S. Bull. (2) **6**, 163-168.

Die Darstellung beschränkt sich auf die Auseinandersetzung der Einführung und des Gebrauchs der imaginären Elemente bei v. Staudt und bei Reye, nimmt dagegen gar keine Notiz von der Preisschrift, mit der E. Kötter 1886 den Steiner-Preis erwarb (vergl. F. d. M. **19**, 577-586, 1887). Die Ausführungen gegen den Schluss des Aufsatzes enthalten Vorschläge für Abänderungen jener ersten Einführung beim praktischen Unterricht. Lp.

Ch. A. Scott. On von Staudt's Geometrie der Lage. Math. Gazette 1899/1900, 307-314, 323-331, 363-370.

V. Schlegel. Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à *n* dimensions. Ens. Math. **2**, 77-113.

Der erste Teil der Arbeit, der aus der „Leopoldina“ 1886 übersetzt ist (vgl. F. d. M. **18**, 453, 1886) zeigt die verschiedenen Wege, auf denen man seit Gauss zur Aufstellung und zum Studium der Räume und Figuren von *n* Dimensionen gekommen ist: das Bestreben, das Euklid'sche Postulat zu umgehen, den Grassmann'schen geometrischen Calcul, die wesentlich analytischen Arbeiten von Riemann und Helmholtz, die

algebraischen Arbeiten über Curvengleichungen, die Methode projectiver Behandlung von Figuren, — stets werden die Grundgedanken und deren Ausgestaltungen bis um 1886 gekennzeichnet. Der zweite Teil (S. 85 ff.) bringt die Hauptzüge der Entwickelung während der letzten anderthalb Jahrzehnte und die Namen der wesentlichsten Förderer. Ein bibliographisches Verzeichnis aller einschlägigen 439 Arbeiten, alphabetisch nach den Verfassern geordnet (S. 97-114), giebt die vollständige Litteratur. Tn.

E. Wölffing. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Coordinaten. Bibl. Math. (3) **1,** 142-159.

Die Abhandlung berichtet über verschiedene Arten von Coordinaten und giebt für jede Art Auskunft über die Arbeiten, in denen sie benutzt worden sind. Natürliche Coordinaten, d. h. Bestimmungsstücke, die nur von der Curve selbst abhängen, sind eigentlich erst im 19. Jahrhundert eingeführt worden. Dabei wurden versuchsweise folgende Bestimmungsstücke gewählt:

1. Bogenlänge s und Winkel φ der Tangente gegen eine feste Curventangente,
2. Winkel φ und Krümmungsradius ϱ,
3. Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ,

von denen die letzten sich als die besten erwiesen haben. Da aber auch diese an dem Uebelstand leiden, dass der Anfangspunkt der Bogenlänge willkürlich ist, so wurden noch andere Bestimmungsstücke versucht, z. B. der Winkel χ, welchen die Curvennormale mit der Axe der osculirenden Parabel macht, und der Krümmungsradius ϱ_1 der Evolute. In Bezug auf alle diese Coordinaten bemerkt der Verf., dass sie Differentialinvarianten der euklidischen Gruppe der Bewegungen vorstellen und folglich dadurch charakterisirt sind, dass die Gleichungen, in denen sie vorkommen, die ∞^3 möglichen Lagen einer und derselben Curve in der Ebene repräsentiren. Nimmt man aber als Bestimmungsstücke Invarianten anderer Transformationsgruppen an, so bekommt man andere Arten von Coordinaten, welche der Verf. uneigentliche, halbnatürliche und Form-Coordinaten nennt; unter den halbnatürlichen sind besonders die Vectorpedalcoordinaten, d. h. Radiusvector r und Ursprungslot auf die Tangente p, brauchbar.

Zum Schluss hebt der Verfasser hervor, dass und warum die natürlichen Coordinaten die gewöhnlichen nicht zu ersetzen vermögen, wenn sie auch aus vielen Gesichtspunkten von hohem Wert sind. Als Anhang folgt ein ausführliches Litteraturverzeichnis. E.

R. Fišer. Die Methoden der analytischen Geometrie in ihrer Entwickelung im 19. Jahrhundert. Pr. Stifts-Obergymnasium Braunau in Böhmen. 51 S.

Einleitung. I. Anwendung der vervollkommneten algebraischen

Analyse. Die Determinanten. Die Invarianten- und Covariantentheorie. Die Infinitesimalrechnung.

II. Entwickelung der Coordinaten: Polarcoordinaten. Cylindrische Coordinaten. Krummlinige Coordinaten. Barycentrische Coordinaten. Hesse'sche Coordinaten. Projectivische Coordinaten.

III. Die übrigen Entwickelungen der Methoden. Das Dualitätsprincip. Das Princip der Constantenabzählung. Die Methode der abgekürzten Bezeichnung. Anwendung der Symbolik. Die Geometrie der Geraden.

Sda.

P. G. TAIT. On the claim recently made for Gauss to the invention (not the discovery) of quaternions. Edinb. Proc. **23,** 17-23.

Gegen Felix Klein in Gött. Nachr. 1899, 19-23 (Geschäftl. Mitt.)

Lp.

C. G. KNOTT. Professor Klein's views of quaternions. Edinb. Proc. **23,** 24-34.

H. G. ZEUTHEN. Historisk og geometrisk Studie af Descartes' Tangentkonstruktion. Nyt Tidss. for Math. **11**B, 49-58.

Descartes hat durch weitläufige Rechnungen bewiesen, dass man die Normale einer Curve, deren Gleichung in einem bipolaren Coordinatensystem $ar + br_1 + c = 0$ ist, dadurch bestimmen kann, dass sie Winkel mit r und r_1 bildet, deren Sinus mit b und a proportional sind. Durch die genannten Rechnungen kann man wohl die Richtigkeit des Satzes beweisen, ihn selbst aber dadurch nicht finden. Der Verf. meint nun, Descartes habe ihn gefunden durch Analogie mit den Kegelschnitten, indem die angeführte Gleichung einen solchen darstellt, wenn der eine Pol unendlich fern liegt.

Ueberhaupt vermutet der Verf., Descartes habe unter der einen oder der anderen Form den Satz gekannt, dass in einem bipolaren Coordinatensystem die Sinus der Winkel, welche die Normale mit den Fahrstrahlen bildet, zu dr und dr_1 proportional sind, und dass er dadurch oder durch ähnliche Betrachtungen in kinematischer Form die Construction der Normale einer Konchoide hergeleitet hat.

Auf ähnliche Weise kann er die Construction der Normale einer Cykloide gefunden haben. Der Beweis, welchen Descartes ausführt, besteht darin, dass er das Rollen des Kreises als zusammengesetzt aus unendlich vielen successiven Drehungen betrachtet, indem er den Kreis als Grenze eines Polygons ansieht; er sagt aber selbst, dass er einen anderen Beweis hat, welchen er wegen seiner Weitläufigkeit nicht mitteilt, obgleich er ihm einen gewissen Vorzug giebt. V.

W. Schmidt. Archimedes' Ephodikón. Bibl. Math. (3) **1**, 13-14.

Eine Notiz aus Heron's „Metrika" I, 32 veranlasst Schmidt zu der Vermutung, der echte Titel der Archimedischen Schrift über die Quadratur der Parabel sei „Ephodikón" gewesen, welches Wort möglicherweise „Exhaustionsmethode" bedeuten könnte. E.

E. Wölffing. Bibliografia della cocleoide. Loria Boll. Bibl. **3**, 97-99.

Eine Liste von 29 Schriften betreffend die Cochleoide, d. i. die Curve, deren polare Gleichung:

$$r = a \frac{\sin \Theta}{\Theta}$$

ist. Vi.

G. Loria. Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. Bibl. Math. (3) **1**, 75-89.

Loria lenkt zuerst die Aufmerksamkeit auf die grosse Bedeutung, die Torricelli's hinterlassene Manuscripte, welche sich in der „Biblioteca Nazionale" in Florenz finden, für die Geschichte der Mathematik des 17. Jahrhunderts haben, und giebt eine Uebersicht über ihren Inhalt. Dann bringt er zum Abdruck einen unter denselben befindlichen Aufsatz: „De hemhyperbola logaritmica", worin die wichtigsten Eigenschaften der logarithmischen Curve angegeben und bewiesen werden. Es geht daraus hervor, dass Torricelli nicht nur erkannt hatte, dass die Subtangente dieser Curve constant ist, sondern auch die von der Curve, der Asymptote und einer Ordinate begrenzte Fläche, sowie das Umdrehungsvolumen, wenn die Asymptote als Axe gewählt wird, berechnet hatte. E.

D. J. Korteweg. La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette. Bibl. Math. (3) **1**, 97-108.

Das von Jacob Bernoulli im Jahre 1690 gestellte Problem, die Kettenlinie zu finden, wurde bekanntlich auch von Huygens gelöst, und seine Lösung erschien 1691, enthielt aber nur das Resultat. Ueber die Methode, die dabei angewendet wurde, erhalten wir jetzt zum ersten Mal Auskunft durch Korteweg, der Huygens' hinterlassene Handschriften untersucht hat. Es ergiebt sich daraus, dass Huygens die Lösung im September 1690 fand, und zwar dadurch, dass er vermittelst einer einfachen Betrachtung den Satz bewies: Wenn die Bogenlänge der Curve gleichmässig zunimmt, so wächst auch gleichmässig die Tangente des Winkels, den die Berührungslinie der Curve mit der Abscissenaxe bildet, also in moderner Schreibweise $\frac{d\frac{dy}{dx}}{ds} = a$. Die Gleichung der Ketten-

linie in cartesischen Coordinaten gab Huygens nicht, aber aus seinem Fundamentalsatze leitete er viele wichtige Folgerungen her; so z. B. bestimmte er die Bogenlänge der Kettenlinie und ihrer Evolute, sowie die Fläche des Umdrehungskörpers der Kettenlinie. Die Methode, deren er sich dabei bediente, ist zwar geometrisch; aber um zu den Resultaten zu gelangen, musste er anfangs Infinitesimalbetrachtungen anwenden, die nur der Form nach von denen der Leibniz'schen Differentialrechnung verschieden sind. E.

R. S. Woodward. The century's progress in applied mathematics. American M. S. Bull (2) **6**, 133-163.

R. S. Woodward. Die Fortschritte der angewandten Mathematik im letzten Jahrhundert. Naturw. Rundsch. **15**, 249-252, 262-266, 273-276.

Als „Presidential address delivered before the American Mathematical Society at its sixth annual meeting, december 28, 1899", giebt diese Rede einen hübschen Ueberblick über die Leistungen der Forscher auf dem Gebiete der angewandten Mathematik im 19. Jahrhundert; deshalb hat Sklarek die deutsche Uebersetzung in der Naturwissenschaftlichen Rundschau abgedruckt. Am Schlusse sagt der Redner: „Wenn wir über die Fortschritte nachdenken, die hier so summarisch und unzureichend skizzirt sind, so wird es offenbar werden, dass die Mathematiker des 19. Jahrhunderts einen glänzenden Vorrat bleibender Bereicherungen der Kenntnisse auf dem Gebiete der exacteren unter den physikalischen Wissenschaften zusammengebracht haben. . . Es scheint kein Grund vorzuliegen, andere als optimistische Erwartungen zu hegen. . . Wir brauchen nur dem Beispiele zu folgen, das gegeben ist durch Laplace, Poisson, Green, Gauss, Maxwell, Kirchhoff, Saint-Venant, Helmholtz und ihre hervorragenden Zeitgenossen und Nachfolger. . . Dieselbe Art der Treue bei der Untersuchung und dieselbe Richtung des Geistes auf unablässigen Fleiss, welche jene Meister befähigte, die grossen Ergebnisse des 19. Jahrhunderts zu zeitigen, wird, wie zuverlässig zu erwarten ist, gleich grosse Ergebnisse im 20. Jahrhundert herbeiführen." Etwas wunderbar ist es, dass der mathematischen Optik gar nicht gedacht ist, und dass daher Forscher wie Fresnel und Franz Neumann nicht erwähnt sind, obschon sonst mancher unbedeutendere Gelehrte genannt ist. Lp.

H. Weber. Ueber die Entwickelung unserer mechanischen Naturanschauung im neunzehnten Jahrhundert. Strassburg: J. H. Ed. Heitz. 23 S. 8°.

Die wertvollste Errungenschaft der Physik im neunzehnten Jahrhundert ist die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie gewesen. In der Gegenwart hat die Physik am tiefsten das Streben nach einer einheitlichen Erklärung scheinbar getrennter Gebiete ergriffen, wie

es z. B. in der Maxwell'schen elektromagnetischen Theorie seinen Ausdruck findet. Mi.

L. Boltzmann. Ueber die Entwickelung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. Deutsch. Math. Ver. 8_1, 70-95.

Nach einer kurzen Darlegung über den Wert der Forschungsmethode als des Skelettes, das den Wissenschaftsfortschritt trägt, und über die Unstetigkeit des Fortschreitens der theoretischen Physik geht der Vortrag über zu einer gedrängten Schilderung der Entwickelungsstufen der theoretischen Physik seit Galilei und Newton: der „alten klassischen" Physik traten Maxwell und seine Anhänger entgegen, welche die Theorie nur als Bild der Natur auffassen; die Unruhe und Verwirrung ward vermehrt durch die Kirchhoff-Hertz'schen Aenderungen an der klassischen Mechanik, welche die Kraft und die Bewegungen infolge von Fernkräften ausmerzten und die Theorie nicht als etwas Objectives, sondern nur als ein geistiges Bild der Erscheinungen aufzufassen lehrten; ihnen folgte die Schule der sogenannten Energetiker, welche die gesamte Physik aus dem Satze von den zwei Energiefactoren und aus einem anschliessenden Variationssatz ableiten wollen; sie werden abgelöst durch die Phänomenologen, die als Extreme, als reine Mathematiker ohne jede Hypothese, ohne jede Veranschaulichung oder mechanische Erläuterung für die Naturvorgänge nur Gleichungen aufschreiben, aus ihnen den Verlauf der Vorgänge quantitativ berechnen und nun mit der Erfahrung vergleichen — oder als Gemässigtere, die unter Verzicht auf jede einheitliche Naturauffassung die Vorgänge einfach genau beschreiben. Der Vortrag sucht objectiv die genannten Grundauffassungen nach Wichtigkeit und inneren Beziehungen zu würdigen, kämpft aber mit Wärme gegenüber den Neuerern für das Alte, Klassische. Tn.

H. Dutordoir. Sur la différence de la philosophie naturelle et des mathématiques d'après Aristote. Brux. S. sc. 24A, 32-34.

Uebersetzung einer Stelle aus dem Commentar des Simplicius über die Physik. Mn. (Lp.)

P. Duhem. Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? Bibl. Math. (3) 1, 15-19.

Als Entdecker des sogenannten „Hydrostatischen Paradoxons" giebt man allgemein Stevin an, aber Lagrange hat in seiner „Mécanique analytique" die Entdeckung auf Archimedes zurückgeführt. Duhem hat darum die Sache näher untersucht und dabei gefunden, dass die Ansicht des Lagrange möglicherweise begründet sein könnte, wenn man einige Zeilen in Archimedes' Schrift über schwimmende Körper herausnimmt und dieselben an und für sich zu deuten versucht, dass aber die Lagrange'sche Deutung dieser Zeilen sich als unrichtig erweist, sobald man

sie in ihrem Znsammenhange betrachtet. In der That geht Archimedes bei seinen Beweisen einiger Sätze davon aus, dass der Druck, den eine Flüssigkeit auf den Boden eines Gefässes ausübt, von der Form der Wände abhängig ist. Dass Archimedes trotz dieser unrichtigen Voraussetzung zu richtigen Resultaten gelangt ist, erklärt sich dadurch, dass in den von ihm betrachteten Fällen die zwei Bedingungen erfüllt sind, unter denen das „Hydrostatische Paradoxon“ aufhört, ein Paradoxon zu sein, und mit der Archimedischen Hypothese identisch wird. E.

F. Knauff. Die Physik des Heron von Alexandria. Pr. (64) Sophien-Gymn. Berlin. 23 S. 4°.

Aus sechs Werken Heron's wird alles zusammengestellt, was in ihnen über Physik zu finden ist, und zwar in den folgenden Abteilungen: Allgemeine Eigenschaften, Mechanik der festen Körper (fünf einfache Maschinen, Druck auf stützende Säulen), Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper, Wärmelehre, Optik. Tn.

C. de Vaux. Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. Bibl. Math. (3) **1**, 28-38.

Enthält Notizen aus einer in Oxford aufbewahrten arabischen Handschrift über hydraulische Maschinen und Automaten. Nach dem Titel würde die Schrift von Heron unter Benutzung von Philon und Archimedes verfasst worden sein; aber C. de Vaux ist der Ansicht, dass sie von einem morgenländischen Compilator herrührt, dem verschiedene Arbeiten von Heron, Philon und anderen griechischen Mechanikern zur Verfügung standen. Man findet hier u. a. einige Vorschläge zur Construction eines „Perpetuum mobile“ und eine Beschreibung der sogenannten cardanischen Aufhängung. Möglicherweise ist ein Teil der Handschrift mit einer von den Söhnen des Musa ben Schakir verfassten Mechanik identisch. E.

W. Schmidt. Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft? Bibl. Math. (3) **1**, 297-318.

Diese Frage, die der Verf. schon in der Einleitung (S. XVIII) zum ersten Bande seiner Heron-Ausgabe gestreift hat, wird hier eingehend untersucht und mit Bezug auf Vitruv verneint. Genaue Uebereinstimmungen zwischen Heron und Vitruv sind nämlich sehr spärlich und von so allgemeiner Art, dass sie gar nichts beweisen, während die Abweichungen zahlreich und wesentlich sind. Dagegen hält der Verf. für möglich, dass Columella und die Agrimensoren mittelbar von Heron abhängig sind; aber auch hier ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass

sowohl dieser als jene ähnliche Vorlagen benutzt haben. Im Vorübergehen bemerkt er auch, dass das ein paar mal citirte ἄλλο βιβλίον des Heron, das nach Cantor eine neue, jetzt verschollene Ausgabe von Heron's Geometrie bezeichnet, vielmehr als mit „liber Geeponicus“ identisch betrachtet werden muss. E.

F. Kucharzewski. Sur quelques niveaux du seizième siècle. Blibl. Math. (3) **1**, 60-63.

Der Verf. bemerkt, dass die Geschichte der Wasserwagen vor Picard sehr unvollständig bekannt ist, und beschreibt vier solche Instrumente aus dem 16. Jahrhundert, von denen das erste von J. Dubravius (1545) und die drei übrigen von O. Strumieński (1573) herrühren. Die erste Beschreibung giebt ihm Veranlassung, einige Bemerkungen über die „Dioptra“ des Vitruvius hinzuzufügen. E.

M. Curtze. Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. Bibl. Math. (3) **1**, 51-59.

Die erste Notiz bezieht sich auf die Schrift Euklid's „De gravi et levi“, von der Curtze in zwei Handschriften eine lateinische Uebersetzung entdeckt hat, die eine andere ist als die von Herwagen (1537) herausgegebene. Curtze bemerkt, dass die letzte offenbar direct aus dem Griechischen stammt, während die neu aufgefundene, in deren Figuren die Buchstabenfolge a, b, g, d, e, z, h, t ist, sicherlich nach einer arabischen Version, möglicherweise durch Gherardo Cremonese, übersetzt ist, wodurch der Zweifel, ob die Araber die Schrift gekannt hätten, als grundlos erwiesen ist. Zuletzt werden die beiden Uebersetzungen neben einander abgedruckt.

In der zweiten Notiz bringt Curtze einen Aufsatz des Robertus Linconiensis (Greathead) zum Abdruck, der „Tractatus de fractionibus und reflexionibus radiorum“ betitelt ist und über Spiegelung und Brechung der Strahlen handelt. E.

J. Klug. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bei Galilei. Pr. Gymn. Würzburg. 50 S. 8°.

Nach einem Rückblick auf das mechanische Wissen der Alten und der unmittelbaren Vorgänger Galilei's wird dessen Forschungsmethode und seine Aufstellung des genannten Gesetzes klar gelegt; dann werden seine durch Galilei gegebenen Anwendungen auf hydrostatische Dinge, sowie auf Schraube und schiefe Ebene vorgetragen und dabei der abgeklärte Kraftbegriff des grossen Forschers, sowie seine Erkenntnis von den Gesetzen des Stosses hervorgehoben. Eine kurze Betrachtung über die erkenntnistheoretische Seite von Galilei's Geistesarbeit macht den Beschluss. Tn.

Ch. Éd. Guillaume et L. Poincaré. Rapports présentés au congrès international de physique réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société Française de physique.

Tome I. Questions générales. — Métrologie. — Physique mécanique. — Physique moléculaire. XV + 698 S.

Tome II. Optique. — Électricité. — Magnétisme. 570 S.

Tome III. Électro-optique et Ionisation. — Applications. — Physique cosmique. — Physique biologique. 619 S. Paris: Gauthier-Villars.

Das durch die Mitwirkung einer grossen Anzahl von Forschern aller Länder in kurzer Zeit zustande gebrachte Werk legt Zeugnis ab von der Umsicht, mit welcher der internationale Physiker-Congress vorbereitet und geleitet worden ist, so dass die drei starken Bände noch Ende 1900 in die Hände der Mitglieder des Congresses kommen konnten. Obschon für Physiker bestimmt, geben die Berichte, deren Wert allerdings je nach den Verfassern der einzelnen Abschnitte ungleich ausgefallen ist, ein zutreffendes Bild von dem Stande der Forschung zur Zeit der Abfassung und bieten somit auch dem Mathematiker wertvolles Material. Lp.

E. Robel. Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik. Teil IV: Die Analyse der Sirenenklänge. Pr. (102) Luisenst. Realgymn. Berlin. 40 S. 4°. 13 Fig.

Zu den früher (F. d. M. **23,** 41, 1891 und **26,** 66, 1895) besprochenen ersten drei Teilen der Arbeit erscheint hier der vierte als vorletzter. Er giebt zunächst eine Uebersicht des Inhaltes der früheren Teile und führt dann die Hauptthatsachen der Terquem'schen Arbeit von 1870 vor die Augen des Lesers. Terquem hat die von Ohm (1843) gegebene Erklärung des Klangproblems theoretisch auf die mit den verschiedenen Sirenenformen angestellten Versuche ausgedehnt, und zwar unter Benutzung der Fourier'schen Reihe, und die mathematischen Entwickelungen Terquem's für die vier Hauptfälle führt Robel vor (S. 5-38). Zum Schluss findet noch R. König's experimentelles Studium der Sirenenklänge durch manometrische Flammen Erwähnung. Tn.

W. Elsässer. Die Function des Auges bei Leonardo da Vinci. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45,** 1-6.

Aus Handschriften da Vinci's werden Stellen mitgeteilt, die zwar keinen erheblichen wissenschaftlichen Gewinn für die Theorie des Sehens bedeuten, aber doch eine Reihe interessanter und gelungener Versuche enthalten und erstmals die Idee eines reellen, objectiven, geometrisch construirbaren Bildes benutzen. Tn.

A. Haebler (†). Die Lehren des Claudius Ptolemaeus von den Bewegungen der Planeten. Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45,** 161-198.

Nach einer litterargeschichtlichen Einleitung, die insbesondere auch die Halma-Ausgabe des Ptolemaeus kritisirt, werden (nach Proklus) die Hauptaufgaben der altgriechischen Astronomie aufgezählt (S. 173), und dann wird deren Lösung durch die Vorgänger des Ptolemaeus und durch diesen selbst dargelegt: der Reihe nach werden die Excentricitäten der Planetenbahnkreise (S. 176ff.), die Epicyklen (S. 182ff.), die sogenannte Breitenbewegung der Planeten (S. 185ff.), hauptsächlich die des Mondes, behandelt. In letzterer Beziehung werden die Unterlassungen deutscher Bearbeiter der Geschichte getadelt, und es werden die Auffassungen von Delambre und Tannery richtig gestellt (S. 192ff.). Tn.

J. Thirion. L'évolution de l'astronomie chez les Grecs. Paris: Gauthier-Villars. 286 S. 12mo.

Nach den neuesten Arbeiten, besonders denen von Schiaparelli, werden die Ansichten oder Systeme von Pythagoras, Philolaus, Platon, Eudoxus, Heraklid aus Pontos, Aristarch, Hipparch und Ptolemaeus dargestellt. In einem Anhange wird die Arbeit Mansion's über den geometrischen Charakter der alten Astronomie zusammenfassend behandelt und der wahre Gesichtspunkt gewonnen, von dem aus man die Leistung des Koppernikus und den Process Galilei's sachgemäss beurteilen muss. Mn. (Lp.)

A. Bouché-Leclerc. L'astrologie grecque. Paris: Ernest Leroux. XX + 658 S. 8° (1899). [Darboux Bull. (2) **24,** 37-41, Anzeige von P. Tannery.]

M. Curtze. Ein Nachtrag zu meinem Aufsatze in der Festschrift zu M. Cantor's 70. Geburtstage. (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.) Zeitschr. f. Math. Hl. A. **45,** 41-46.

Zu einem früher veröffentlichten deutschen Text kosmographischen Inhaltes wird hier die lateinische Quelle nachgewiesen (aus einer Wolfenbütteler Handschrift). Tn.

L. A. Birkenmajer. Commentariolum super theoricas novas planetarum Georgii Purbachii in studio generali Cracoviensi per Mag. Albertum de Brudzewo diligenter corrogatum. Post editionem principem Mediolanensem A. MCCCCXCV ad fidem codicum praestantissimorum denuo edendum curavit Ludovicus Antonius Birkenmajer, Cracoviae, typis et sumptibus Universitatis Jagellonicae 1900. LVI u. 169 S. 8°.

A. Favaro. Le osservazioni di Galileo circa i pianeti medicei dal 7 gennaio 1610 al 23 febbraio 1613. Comunicazione. Ven. Ist. Atti **59** [(8), **2**], 519-526.

Als Galilei 1610 die Jupitersmonde entdeckt hatte, machte er sich Zeichnungen von deren wechselnder Stellung zum Hauptplaneten. Diese Zeichnungen hat der berühmte Galilei-Forscher und -Herausgeber photomechanisch vervielfältigen lassen, und gelegentlich der Uebersendung eines Abzugs an das Institut zu Venedig fügt er erklärende Anmerkungen bei betreffs der Abfassung jener Zeichnungen und ihres Zusammenhanges mit Galilei's sonstigen zugehörigen schriftlichen Aufzeichnungen.

Tn.

A. Gutzmer. Bericht betreffend die Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgrössen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 138.

R. Mehmke. Bericht über die Winkelteilung. Deutsche Math. Ver. 8_1, 139-158.

J. Bauschinger. Gutachten über die decimale Winkel- und Zeitteilung. Deutsche Math. Ver. 8_1, 159-163.

A. Schülke. Die Decimalteilung des Winkels vom Standpunkte des Unterrichts. Deutsche Math. Ver. 8_1, 164-177.

Der von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung schon früher eingesetzten Tafelcommission war 1898 die Frage der Winkelteilung zur Vorberatung zugewiesen worden; in München hatte für sie zunächst Mehmke Bericht zu erstatten, und da der betreffenden Versammlung auch die Frage der Zeitteilung aufs Programm gesetzt wurde, berichteten hierüber Bauschinger und Schülke, jener vom Standpunkte des Astronomen, dieser von dem des Schulmannes aus. Mehmke begründet unter Beigabe reicher geschichtlicher und litterarischer Nachweisungen, dass für die reine Mathematik, für die Physik und die Geodäsie der rechte Winkel die beste Winkeleinheit und dessen decimale Teilung und Unterteilung die rationellste Winkelteilung sei; Bauschinger kommt zu dem Schluss, diese Vorschläge seien zurückzuweisen, ebenso wie die decimale Teilung der bis jetzt üblichen Stunde als Zeiteinheit; Schülke wünscht den bisherigen Grad $= \frac{1}{90} R$ beibehalten, wünscht aber dessen Zehnteilung.

Tn.

E. Pasquier. De la décimalisation du temps et de la circonférence. Brux. S. sc. **24**B, 59-104.

J. Thirion. Rapport. Brux. S. sc. **24**A, 123-124.

Historische und kritische Darlegung der verschiedenen Systeme der Einteilung des Kreises (360 Grade mit sexagesimalen oder decimalen Untereinteilungen, 240, 400, 200 oder 100, decimal geteilt) und des Tages (24 Stunden mit sexagesimalen oder decimalen Unterteilungen, 10, 20 oder 100, decimal geteilt) nach den seit 125 Jahren gemachten

Vorschlägen. Die Unmöglichkeit, die Abschaffung der herkömmlichen Teilung des Tages in Stunden, Minuten und Secunden beim Publicum und bei den Physikern durchzusetzen; die einfachen Beziehungen dieser Tageseinteilung zu der sexagesimalen Kreisteilung, die vielen in diesen alten Systemen abgefassten Documente stärken die Neigung der Mehrzahl der Gelehrten für ihre Beibehaltung. Trotzdem kann man immerhin den Tag und den Grad zu dem Zwecke der Erleichterung und Beschleunigung der Rechnungen decimal teilen. Mn. (Lp.)

E. GOEDSEELS. Tables de réduction relatives à l'heure et au degré divisés décimalement. Brux. S. sc. **24**B, 105-110. Mn.

V. STROUHAL. Die Frage über die decimale Teilung von Zeit und Winkel. Věstník **9**, No. 3, 157-161. (Böhmisch).

Der Verf. beurteilt die mannigfaltigen Schwierigkeiten, welche eine Modification der gebräuchlichen Einteilung notwendig zur Folge haben müsste, und spricht sich für die Beibehaltung der bestehenden Einrichtung aus. Sda.

H. BOSMANS. Le degré du méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-Zoom et de Malines par Willebrord Snellius. Brux. S. sc. **24**B, 111-132.

C. LE PAIGE. Rapport. Brux. S. sc. **24**A, 124-125.

Eine mit Noten versehene Veröffentlichung von handschriftlichen Zusätzen, die Snell zu einem Exemplar seines Eratosthenes Batavus gemacht hat. Mn. (Lp.)

W. F. WISLICENUS. Astronomischer Jahresbericht. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben. I. Band, enthaltend die Litteratur des Jahres 1899. Berlin: Georg Reimer. XXIV u. 537 S. gr. 8°.

Nach dem Vorbilde der Fortschritte der Physik und des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik soll der „Astronomische Jahresbericht" einen Bericht über die litterarischen Erscheinungen auf dem Gesamtgebiete der Astronomie geben und dadurch als bibliographisches Hülfsmittel für die Forschung dienen. Der gesamte Stoff ist in vier Teile gesondert: 1. Allgemeines und Geschichtliches, 2. Astronomie, 3. Astrophysik, 4. Geodäsie und nautische Astronomie. Jeder Teil ist in Kapitel und Paragraphen geteilt, so dass im ganzen 74 Paragraphen vorhanden sind. Zufolge dieser von einer Commission der Astronomischen Gesellschaft beratenen und festgesetzten Einteilung des Stoffes, an der nicht sobald grössere Aenderungen vorgenommen werden sollen, konnte ein genaueres Sachverzeichnis fortbleiben, und auch im alphabetischen

Personenregister sind immer nur die Seitenzahlen des Bandes vermerkt, wo Artikel der Autoren stehen, ohne dass eine Bezeichnung der Schriften gegeben ist. Die Aufsuchung bestimmter Arbeiten wird daher eine grössere Zeit beanspruchen, als in den „Fortschritten" der Physik und der Mathematik erforderlich ist, wo durch ausführliche Sach- und Personenregister dem Bedürfnisse mehr entgegengekommen ist. Allerdings wird durch diese Beschränkung der Umfang um etwa vier bis fünf Bogen verringert, mithin der Preis erheblich heruntergedrückt. Eine andere Abweichung besteht darin, dass bei den Abhandlungen aus Zeitschriften nicht die Anfangs- und Schlussseiten angegeben sind, sondern die Anzahl der Seiten jedes Artikels. Endlich sind sämtliche Referate numerirt; die Zahl der Referate dieses ersten Bandes ist 1768. In Bezug auf die Haltung der Referate ist objective Berichterstattung als Norm aufgestellt, Kritik und Polemik sind ausgeschlossen.

Der Löwenanteil der Arbeit ist dem Herausgeber zugefallen; als Mitarbeiter haben ihn unterstützt Burrau (Dänemark), E. F. van de Sande Bakhuyzen (Holland), Iwanow (Russland), R. von Kövesligethy (Ungarn), Láska (Galizien). Die Ueberwältigung der zu leistenden enormen Arbeit ist ein bewundernswertes Zeugnis für die Arbeitskraft des Herausgebers. Von der Astronomischen Gesellschaft gestützt, wird der Jahresbericht gewiss guten Erfolg und dauernden Bestand haben, besonders solange er sich eines so energischen Herausgebers erfreuen kann. Als deutsches Unternehmen desselben Verlages, in dem das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik erscheint, begrüssen wir den Astronomischen Jahresbericht aufs herzlichste.

Lp.

W. T. Lynn. Difficulties in the calendar. Nature 61, 493-494. •

Kurze Besprechung der Schwierigkeiten in der Bestimmung von Ostern, das je nach der Lage des Ortes nicht auf den ersten Sonntag nach dem ersten Frühlingsvollmond zu fallen braucht. Lp.

Weitere Litteratur.

G. F. Fitzgerald. Lord Kelvin, professor of natural philosophy in the University of Glasgow, 1846-1899. With an essay on his scientific work. Glasgow. 4°.

Ommaggio all'astronomo G. V. Schiaparelli, 30 giugno 1840 — 30 giugno 1900, dai astronomi italiani. (Vita, osservazioni, bibliografia ecc.) Milano. 87 S. Mit Bildnis.

J. J. Urlaub. Abriss der Geschichte der Optik und der optischen Fabrication in Russland. St. Petersburg. 50 S. 8°. (Russisch).

F. X. Kugler. Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne. Auf Grund mehrerer von J. N. Strassmaier copirten Keilinschriften des

britischen Museums. Mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln. Freiburg i. B.: Herder. XV + 214 S. Lex. 8°.

ERATOSTHENIS Catasterismorum fragmenta Vaticana, edidit A. Rehm. Praemissum est de Catasterismorum recensionibus commentariolum. Auerbach. XXVI + 18 S. 8°.

AL-BATTANI sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem Codicis Escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a. C. A. Nallino. Pars III, textum arabicum continens. Mediolani. 4°. (1899).

C. LAGRANGE. Mathématique de l'histoire, géométrie et cinématique. Lois de Brück. Chronologie géodésique de la bible. Bruxelles. 884 S. 8°.

J. C. V. HOFFMANN. Zum Jahr Null. Hoffmann Z. **31**, 17-18.

J. C. V. HOFFMANN. Aeusserungen berühmter Männer (Mathematiker) über den Beginn der Jahrhunderte (Wolff, Bode, Hindenburg, Gauss). Ebenda, 93-94.

J. C. V. HOFFMANN. Der Streit über den Beginn des Jahrhunderts in neuer Beleuchtung. Ebenda, 169-177.

E. BERGOLD. Zum Jahrhundert-Streit. Ebenda, 94-96.

KEWITSCH. Erwiderung gegen Bergold. Ebenda, 139-140.

W. FÖRSTER Zwei Aeusserungen über die Jahrhundertwende. Ebenda, 178-182.

G. SCHWAB. Der Beginn des Jahrhunderts. Ebenda, 356-358.

M. KOPPE. Der Anfang des Jahrhunderts. Eine Betrachtung über Zählen und Messen. Poske Z. **13**, 1-9.

F. PIETZKER. Der Anfang des neuen Jahrhunderts. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 2-6.

S. GÜNTHER. G. L. Lichtenberg und die Geophysik. Abhdl. Geogr. Ges. Wien. 17 S. Lex. 8°.

Kapitel 2.

Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

P. J. MÖBIUS. Ueber die Anlage zur Mathematik. Leipzig: J. A. Barth. VII u. 331 S. mit 51 Bildnissen.

W. WEYGANDT. Die Anlage zur Mathematik. Hoffmann Z. **31**, 573-576.

Der Enkel des Mathematikers Möbius will in seinem Buche, das dem Ref. nicht vorgelegen hat und ihm nur durch Recensionen bekannt geworden ist, die körperliche Anlage für die Mathematik in einer Vor-

wölbung der Stirn am äusseren Augenwinkel, besonders am linken, localisiren. Der ärztliche Autor des Artikels in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erkennt zwar den Grundgedanken dieser Anschauung als einen fruchtbaren an und zollt auch der Verehrung Gall's, die Möbius für diesen jetzt in Verachtung geratenen Forscher bekundet, einen gewissen Beifall, hält aber die Frage nach dem „Organ für Mathematik" für durchaus noch nicht spruchreif, weil über die Localisirung der Functionen des Gehirns nur erst die allgemeinsten Umrisse sicherer Kenntnisse gewonnen sind. Unbedingtes Lob wird der Sprache des Buches gespendet. Lp.

A. Vassilief. Les idées d'Auguste Comte sur la philosophie des mathématiques. Ens. mat. **2**, 157-172.

Vassilief sieht in Auguste Comte wohl mit Recht einen Philosophen der Mathematik, dessen Ideen sich im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts bestätigt und fortentwickelt haben. Dies gilt ebenso sehr von Comte's Idee, dass die concrete Mathematik (Geometrie und Mechanik) von der abstracten (Algebra und Arithmetik) zu scheiden sei, als von der Annahme einer Erfahrungsgrundlage der concreten Mathematik, der Ueberordnung der Arithmetik über die Geometrie, der Bevorzugung und Vereinheitlichung der Analyse und der Einsicht in die Analogie analytischer Formeln für verschiedene Phänomene der Physik. Er hat in seinen Ideen Männer wie Lobatschewsky, Ueberweg, Helmholtz, Cauchy, Lamé, Chasles, Thomson, Kirchhoff, Maxwell, Mach etc. zu Nachfolgern, so dass ihm ein ehrenvoller Platz in der Geschichte der Philosophie der Mathematik stets verbleiben wird. Mi.

Otto d'Alencar Silva. Quelques erreurs de Comte. Lisboa Jornal da Ac. (2) **6**.

Der Verf. zergliedert einige Fehler in dem Werke „Synthèse subjective" von A. Comte. Tx. (Lp.)

L. Couturat. Les mathématiques au congrès de philosophie. Ens. math. **2**, 397-409.

Die Mathematik ist auf dem ersten internationalen Philosophencongress zu Paris in der III. Section für Logik und Geschichte der Wissenschaften durch bedeutende Gelehrte Frankreichs, Deutschlands, Italiens etc. vertreten gewesen, und es haben innerhalb dieser Section Erörterungen über die Geschichte der Infinitesimalrechnung und der Begriffe der Gravitation, sowie über algebraische Logik, die Grundlagen der Geometrie und die physikalischen Grundhypothesen stattgefunden. Auch Erörterungen über die Idee einer Universalsprache fanden ausserhalb der Section statt.

Für den nächsten derartigen Congress soll eine beschränkte Zahl von Fragen für die III. Section ausgewählt werden. Mi.

Z. G. de Galdeano. **Estudios de crítica y pedagogía matemática.** Zaragoza: Imprenta de la Vda. de C. Ariño. 152 S. 8°.

In diesem Buche wird die Philosophie der Mathematik nebst einigen auf ihren Unterricht bezüglichen Fragen behandelt. Zunächst werden die in der Mathematik benutzten philosophischen Systeme angegeben, ebenso die wichtigeren Werke der mathematischen Kritik, die veröffentlicht sind; die in dieser Wissenschaft nötigen Grundbegriffe werden aufgezählt, ferner die Teile, in welche sie zerfällt. Dann folgt die Kritik jedes einzelnen dieser Zweige, indem der Verf. nach einander betrachtet: die Arithmetik, die Geometrie, die Algebra, die Algebra der Logik, die analytische Geometrie, die abzählende Geometrie, die Functionentheorie, die kinematische Geometrie, die Differentialgeometrie, die Theorie der Transformationsgruppen. Endlich werden die Begriffe des Imaginären und des Unendlichen untersucht.

In dem für den Unterricht bestimmten Teile des Buches werden einige Andeutungen über den Unterricht im allgemeinen gegeben, hierauf über den mathematischen im besonderen. Tx. (Lp.)

J. L. Fuchs. **Ueber einige Thatsachen in der mathematischen Forschung des neunzehnten Jahrhunderts.** Berlin: G. Schade. 23 S. 4°.

Den Arbeiten der Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts haben zwei in erkenntnistheoretischer Hinsicht wichtige Thatsachen ihr besonderes Gepräge aufgedrückt, erstens die Realisirung und unbedingte Verwendung der bis dahin als imaginär bezeichneten Grössen und zweitens die Methode, die functionalen Beziehungen zwischen veränderlichen Grössen begrifflich so zu fixiren, dass die Abhängigkeit derselben für ihren ganzen Verlauf vollkommen und unzweideutig, unabhängig davon, ob für die formalen Beziehungen geeignete Darstellungen durch analytische Formen herstellbar sind, bestimmt wird. Mi.

E. Netto. **Ueber die Grundlagen und die Anwendungen der Mathematik.** Giessen: v. Münchow. 27 S. 4°.

Zwischen der Theorie und Praxis der Mathematik besteht eine Kluft. Sie ist notwendig durch die Begriffsbildung und Arbeitsmethode der Mathematik, die von der Wirklichkeit abführt. Denn die Mathematik erreicht den Vorzug der Allgemeinheit und Notwendigkeit ihrer Resultate, indem sie bei der Aufstellung der Begriffe unter Anknüpfung an die äussere Erfahrung doch vor allem den Weg der Abstraction und des

Gedankenzwanges geht und ihre Methode weniger in Ableitung aus der Anschauung als in logischen Schlüssen findet, wobei kühne künstlerische Gebäude aufgeführt werden und die Formel den Gedanken trägt und fördert. So gelangt die Mathematik zu Begriffen und Resultaten, die in der Wirklichkeit kein Abbild finden, und so erscheint die Verwendung der mathematischen Ideen in der Welt des Wirklichen unmöglich. Aber die Schwierigkeit löst sich, sobald wir zugeben, dass reine mathematische Sätze thatsächlich in der Wirklichkeit nicht auftreten, dass wir es vielmehr überall in der Wirklichkeit und in der angewandten Mathematik nur mit mehr oder minder angenäherten mathematischen Sätzen zu thun haben. Die Gedankenrichtung Netto's stellt sich also im wesentlichen ebenso wie die Stuart Mill's und der empiristischen Richtung. Mi.

H. Laurent. Sur les définitions. Ens. math. **2**, 194-195.

Logisch lässt sich die unbenannte Zahl unabhängig von der benannten definiren. Beim Unterricht aber muss die natürliche Anordnung und Entwickelung des Gedankens Berücksichtigung finden. Hier muss von der benannten Zahl ausgegangen werden. Ueberhaupt müssen bei den Grunddefinitionen die Anschauungen vorausgesetzt werden, die bereits durch Worte für vertraute Gegenstände fest bezeichnet sind. Mi.

G. Vivanti. Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Batt. G. **38**, 265-314.

Indem Vivanti eine zweite Bearbeitung seiner geschichtlichen Untersuchung über den Begriff des Unendlichkleinen beginnt, erweitert er dieselbe durch einen Teil, der die philosophische Entstehung des Begriffes behandelt; er beschränkt sich aber dabei auf diejenigen neueren Denker, die dem Begriff des Unendlichkleinen in der Mathematik Bürgerrecht verschafft haben, so dass er mit Newton abschliessen kann. Er behandelt zunächst in drei Kapiteln die misslungenen Begriffsbestimmungen: Leibniz sieht in dem Unendlichkleinen eine mathematische Fiction und setzt es, nicht ohne sich selbst zu widersprechen, gleich Null; Johann Bernoulli, Fontenelle, Poisson u. a. fassen es als constante reelle Grösse; das Problem des Berührungswinkels, das Campanus, Nicolaus Cusanus, Cardano, Peletier, Clavius u. a. beschäftigt hat, hat zu keiner neuen Begriffsbestimmung des Unendlichkleinen geführt. Diese bahnt sich erst an, wie ein viertes Kapitel ausführt, durch Giordano Bruno und Hobbes, die das Unendlichkleine als entweder kinematisch oder dynamisch erfasste intensive Grösse, als das Erzeugungselement der endlichen Grössen, bestimmen. Der Standpunkt des Giordano Bruno beruht auf dem Gedanken der Integral-, der des Hobbes auf dem der Differentialrechnung, und diese letzte Auffassung des Begriffs ist dann die des Newton geworden. Mi.

Zwetan Radoslawow-Hadji-Denkow. Untersuchungen über das Gedächtnis für räumliche Distanzen des Gesichtssinnes. Wundt Philos. Studien **15**, 318-452.

Entsprechend der von Ebbinghaus aufgestellten Formel

$$\frac{b}{v} = \frac{k}{(\log t)^c},$$

wo b das Behaltene, v das Vergessene bedeutet, k und c Constanten, t die Zeit, kommt der Verf. auf Grund eines ausgedehnten Versuchsmaterials zu dem Ergebnis, „dass die Veränderungen der Gedächtnisschärfe mit der Zeit nicht dieser selbst, sondern annähernd ihrem Logarithmus proportional geschehen, so dass der Verlauf der Gedächtnisschwelle die Form einer logarithmischen Linie annimmt.“ Wir müssen es uns hier versagen, auf die vielen interessanten Schlüsse, die der Verf. zieht, näher einzugehen, lenken aber die Aufmerksamkeit der Liebhaber solcher Betrachtungen auf diese der experimentellen Psychologie Wundt'scher Richtung angehörende Arbeit mit Nachdruck hin. Lp.

O. Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig: B. G. Teubner. 75 S. gr. 8°.

Die Rede (S. 1-23) behandelt die Frage nach der Art und Weise, wie in der Geometrie Erkenntnisse gewonnen werden, in einer für einen grösseren Hörerkreis berechneten, höchst ansprechenden Form und berührt dabei alle erkenntnistheoretischen Fragen, die in Betracht zu ziehen sind. Die „Anmerkungen und Zusätze“ (S. 24-73) geben dann weitere Begründungen und Ausführungen nebst reichlichen litterarischen Belägen. Der Gedankengang der Rede zielt darauf ab, dass die sogenannte Anschauung in ihre aus der Erfahrung stammenden Elemente aufzulösen ist, steht also auf rein empirischem Boden. „Dadurch, dass man alle anschaulichen Voraussetzungen besonders formulirt, kann man die geometrische Deduction selbst der Anschauung entkleiden. Bezeichnet man die geometrischen Elemente und die Operationen durch Symbole und durch Aneinanderreihen von Symbolen, so kann man in einfacheren Fällen die geometrische Deduction vollständig in einen mit Symbolen ausgeführten Calcul auflösen“. Als eigentümlich für die Schlussweise der Geometrie und der Mechanik wird „eine Art von Experiment“ bezeichnet, „auf Grund dessen wir schliesslich voraussagen, wie die Messungen ausfallen müssten, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen könnten. Wir haben also ein Gedankenexperiment an Stelle eines Realexperimentes gesetzt, und darin besteht die Deduction“. Nach Beleuchtung dieser allgemeinen Sätze durch Beispiele aus der Geometrie und zuletzt auch aus der Mechanik kehrt der Verf. am Schlusse zu ihnen zurück. „Dieses Verfahren der Deduction besteht aus Schlüssen

von ganz eigenartiger Form. Die mathematischen Wissenschaften haben also in der That eine besondere Methode. Die Besonderheit beruht im Gegenstand, der lange Reihen von Denkoperationen in gewissen charakteristischen Reihen vorzunehmen gestattet, so dass dadurch besondere Schlussformen entstehen. In diesem Sinne kann man also sagen, dass die Mathematik und die exacten Naturwissenschaften ihre eigene Logik haben". Lp.

A. Wassilieff. Raum und Bewegung. Phys.-math. Jahrbuch No. I, 1-13 (Russisch.)

Gemeinverständliche Darstellung der Arbeiten von Poincaré über die Grundlagen der Geometrie. Verf. hebt hervor, dass Ueberweg in seinen „Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt" die Abhängigkeit des Raumbegriffs von Bewegungserscheinungen bemerkt hat, und giebt eine Zusammenstellung einiger Citate aus Lobatschewsky's Werken, wo der russische Gelehrte analoge Ansichten ausspricht. Si.

G. Fontené. Question de langage géométrique. Ens. math. 2, 134-135.

Schlägt vor, bei Raumcurven die Namen „Ordnung, Klasse, Rang" zu gebrauchen, ganz wie dies Salmon thut; dann wird noch auf die Verbesserungsfähigkeit geometrischer Namengebung hingewiesen. Tn.

D. Hilbert. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900. Gött. Nachr. 1900, 253-297.

Verf. betont die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft, was er durch historische Beispiele belegt, und stellt, um die Lebenskräftigkeit der Mathematik darzuthun, eine Anzahl von Problemen auf, die der Lösung harren und von der mutmasslichen Entwickelung dieser Wissenschaft in der nächsten Zukunft eine Vorstellung geben. Von diesen Problemen seien die folgenden hervorgehoben: 1. Cantor's Problem von der Mächtigkeit des Continuums. 2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome. 3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe (Unmöglichkeit des Beweises durch Zerlegung in congruente Teile). 4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte. 5. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik. 6. Irrationalität und Transcendenz bestimmter Zahlen (z. B. $2^{\sqrt{2}}$, e^{π}). 7. Primzahlenprobleme. 8. Beweis des allgemeinsten Reciprocitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper. 9. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. 10. Ausdehnung des Kronecker'schen Satzes über Abel'sche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

11. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7. Grades mittels Functionen von nur zwei Argumenten. 12. Strenge Begründung von Schubert's Abzählungscalcül. 13. Problem der Topologie algebraischer Curven und Flächen. 14. Darstellung definiter Formen durch Quadrate. 15. Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern. 16. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch? 17. Allgemeines Randwertproblem. 18. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe. 19. Uniformisirung analytischer Beziehungen mittels automorpher Functionen. 20. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung. Wbg.

A. Padoa. Riassunta delle conferenze su l'algebra e la geometria quali teorie deduttive tenute nella R. Università di Roma l'anno 1900. Parte I. 60 S. (lith.)

Es kommen in jeder deductiven Theorie einige constante, allgemeine Begriffe vor, die als „deductive Begriffe“ bezeichnet werden mögen; sie können auf 10 zurückgeführt werden, nämlich: „ist“, „es folgt“, „oder“, „es ist dasselbe wie“, „und“, „solches dass“, „es giebt“, „nicht“, „ist gleich“, „was gleich ist“. Ihre Untersuchung bildet den Zweck der „deductiven Logik“, und ihre allgemeinen Eigenschaften werden als „logische Axiome“ bezeichnet. Will man dann eine besondere deductive Theorie aufstellen, so sollen ersichtlich „primitive“ (d. h. auf Grund vorhergehender Begriffe nicht definirbare) specielle Begriffe und „primitive“ (d. h. auf Grund vorhergehender Sätze nicht beweisbare) specielle Sätze (Postulate) eingeführt werden; diese letzteren müssen von einander unabhängig und auf eine kleinere Zahl nicht zurückführbar (irreducibel) sein. Die besprochenen Begriffe haben freilich nur einen formalen Sinn; m. a. W.: man legt denselben keine reelle Bedeutung bei. Genügt also eine Interpretation derselben den primitiven Sätzen, so genügt sie auch allen abgeleiteten Sätzen.

Eine deductive Theorie, welcher nur zwei primitive Begriffe zu Grunde liegen, heisst eine „fundamentale“ Theorie. Eine solche ist die deductive Algebra, deren primitive Begriffe eine Klasse N und eine Relation $\longrightarrow$ sind; der Entwickelung dieser Lehre ist der grösste Teil der vorliegenden Schrift gewidmet. Man erhält die gewöhnliche Algebra, indem man N als die Klasse der natürlichen Zahlen (mit Einschluss der Null), $\longrightarrow a$ als die auf a folgende Zahl interpretirt. Vi.

G. Peano. Formules de logique mathématique. Revue de Math. 7, 1-41.

Eine neue Auflage der schon wiederholt, zuletzt im Formulaire de mathématiques (Turin: Bocca-Clausen; F. d. M. **30**, 73-75, 1899) veröffentlichten mathematisch-logischen Formeln. Als eine der erheblichsten Veränderungen gegenüber der letzten Ausgabe möge die Wieder-

einführung eines besonderen Symbols für die Nullklasse hervorgehoben werden. Einige allgemeine Bemerkungen und ein Litteraturverzeichnis gehen voran. Vi.

P. S. Poretzky. Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. Kasan Ges. (2) **10**, No. 1, 50-84; No. 2, 132-180.

Fortsetzung der Arbeit: Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques (F. d. M. **30**, 71, 1899). Bericht erfolgt im nächsten Bande des Jahrbuchs nach Abschluss der Arbeit. Si.

P. Buffa. Alcune formole di logica. Revue de Math. **7**, 56-58.

Es sind 34, meistens ganz einfache, logische Formeln. Vi.

G. Vacca. Additions au Formulaire. Revue de Math. **7**, 59-66.

M. Chini. Additions au Formulaire. Revue de Math. **7**, 66.

G. Eneström. Additions au Formulaire. Revue de Math. **7**, 66.

G. Peano. Additions au Formulaire. Revue de Math. **7**, 67-70.

T. Boggio. Additions au Formulaire. Revue de Math. **7**, 70-72. Vi.

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Deutsche Math. Ver. 8_2, 1-250.

Diese umfang- und inhaltreiche Schrift ist mehr als ein blosser „Bericht“. Der Verf. derselben hat sich nicht damit begnügt, die von verschiedenen Seiten erhaltenen Resultate zusammenzufassen und systematisch zu ordnen; er hat sich immer bemüht, bis in den Kern der Sache einzudringen, scheinbar weit liegende Untersuchungs- und Beweismethoden auf einen einzigen Begriff zurückzuführen, zerstreute Resultate zu einem organischen Ganzen zu verbinden. Durch diese „organisirende“ Arbeit wird die Mengenlehre, nach des Verf. Ausdrucksweise, zu einer „molecularen Theorie der mathematischen Gesetze“.

Der bisher erschienene Teil des Berichtes erstreckt sich auf die Mengenlehre und auf deren Anwendung auf die Theorie der Functionen reeller Variablen. Er zerfällt in drei Abschnitte, die nach einander möglichst kurz besprochen werden mögen.

Erster Abschnitt. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen. Kap. 1. Die Mächtigkeit oder Cardinalzahl. — Der Hauptzweck der Mengenlehre ist, die Eigenschaften der endlichen Zahlen auf die unendlichen Mengen, dem Princip der Permanenz formeller Gesetze gemäss, zu übertragen. Als Grundlage dazu gilt der Mächtigkeits- oder Aequivalenz-Begriff. Die unendlichen Mengen weisen aber eine für dieselben charakteristische Eigenschaft auf: eine unendliche Menge ist einer ihrer

Teilmengen äquivalent. Davon abgesehen, verhalten sich die Mächtigkeiten in Bezug auf Addition, Multiplication und Potenzirung ganz wie die endlichen Zahlen.

Kap. 2. Die abzählbaren Mengen. Ist $\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, $\mathfrak{e}$ die Mächtigkeit einer beliebigen endlichen Menge, ν irgend eine gewöhnliche Zahl, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \nu\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}.$$

Die Menge der rationalen, bezw. algebraischen Zahlen ist abzählbar. Eine unendliche Menge von ausser einander liegenden Teilgebieten eines stetigen Raumes ist abzählbar. Sind $M_0, M_1, M_2, \ldots$ solche Mengen, dass jede derselben eine Teilmenge der vorhergehenden ist, und bezeichnet M_ω den Inbegriff der allen diesen Mengen gemeinschaftlichen Elemente, was durch die Schreibweise:

$$M_\omega = \mathfrak{D}(M_0, M_1, M_2, \ldots)$$

ausgedrückt wird; ist ferner $N_0, N_1, N_2, \ldots$ eine Mengenreihe von derselben Beschaffenheit wie $M_0, M_1, M_2, \ldots$, und

$$N_\omega = \mathfrak{D}(N_0, N_1, N_2, \ldots), \quad M_0 \sim N_0, \quad M_1 \sim N_1, \quad M_2 \sim N_2, \ldots$$

(wo $\sim$ die Aequivalenz bezeichnet); so folgt $M_\omega \sim N_\omega$.

Kap. 3. Der Grössencharakter der Mächtigkeiten. — Sind M, N zwei Mengen, und bezeichnen M_1, N_1 irgend welche Teilmengen derselben, so findet einer und nur einer der folgenden vier Fälle statt:

a) Es giebt ein $M_1 \sim N$ und ein $N_1 \sim M$.

b) Es giebt ein $M_1 \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$.

c) Es giebt ein $N_1 \sim M$, aber kein $M_1 \sim N$.

d) Es giebt kein $M_1 \sim N$ und kein $N_1 \sim M$.

Im Falle a) ist $M \sim N$. In den Fällen b), c) sagt man, die Mächtigkeit von M, sei grösser, bezw. kleiner als diejenige von N. Der Fall d) findet für äquivalente endliche Mengen statt; ob er für unendliche Mengen möglich ist, hat sich bisher nicht entscheiden lassen.

Kap. 4. Die einfachsten nicht abzählbaren Mengen. — Das Continuum ist nicht abzählbar; bezeichnet $\mathfrak{c}$ seine Mächtigkeit, so ist:

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}, \quad \nu\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{e}^\mathfrak{a} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c}^\nu = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c}^\mathfrak{a} = \mathfrak{c}.$$

Die Menge der irrationalen, bezw. transcendenten Zahlen hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Dieselbe Mächtigkeit kommt dem Inbegriff aller stetigen, bezw. analytischen Functionen einer Variable zu; dagegen ist die Mächtigkeit des Inbegriffes aller Functionen einer Variable grösser als $\mathfrak{c}$. Ist $\mathfrak{m}$ eine beliebige Mächtigkeit, so ist $\mathfrak{m}^\mathfrak{m} > \mathfrak{m}$, wodurch das Mittel geliefert wird, Mengen von unbeschränkt zunehmenden Mächtigkeiten zu erzeugen.

Kap. 5. Die geordneten Mengen und die Ordnungstypen. — Man kann, von dem Aehnlichkeitsbegriffe ausgehend, eine Arithmetik der (einfachen) Ordnungstypen bilden, die freilich von der gewöhnlichen Arithmetik in einigen Punkten abweicht. Definirt man dann das „Grenzelement“ einer in einer geordneten Menge enthaltenen steigenden oder

fallenden „Fundamentalreihe“, so hat man dadurch das Analogon der Theorie der Irrationalzahlen, und diejenigen formalen Begriffe, die man gewöhnlich als Eigenschaften des linearen Zahlencontinuums ansieht, können auf die Ordnungstypen übertragen werden. Einige Worte über die Typen R, C der Mengen der nach zunehmender Grösse geordneten rationalen, bezw. reellen Zahlen und über die mehrfachen Ordnungstypen schliessen das Kapitel.

Kap. 6. Die wohlgeordneten Mengen und die Ordnungszahlen.

Kap. 7. Die höheren Zahlenklassen. — Die Theorie der wohlgeordneten Mengen und der transfiniten Zahlen wird hier wesentlich nach den letzten Arbeiten Cantor's (Math. Ann. **46** und **49**) entwickelt; als Anwendung wird ein wichtiger, die mehrwertigen analytischen Functionen betreffender Satz angeführt, worauf die Theorie der du Bois-Reymond'schen „Unendlich der Functionen“ folgt.

Zweiter Abschnitt. Theorie der Punktmengen. Kap. 1. Allgemeine Sätze über Punktmengen. — Grenzpunkte, abgeleitete Mengen.

Kap. 2. Die Mächtigkeit der Punktmengen.

Kap. 3. Die abgeschlossenen und perfecten Punktmengen. — Mächtigkeit der abgeschlossenen Mengen, nirgends dichte abgeschlossene Mengen, Mächtigkeit der perfecten Mengen; Uebertragung der Eigenschaften der im stetigen Raume liegenden Mengen auf die Teilmengen einer nirgends dichten geschlossenen Menge.

Kap. 4. Der Inhalt der Punktmengen. — Die verschiedenen Definitionen des Inhalts nach Hankel-Cantor, Peano-Jordan und Borel; darauf bezügliche Sätze.

Kap. 5. Beispiele und Punktmengen besonderer Art. — Specielle Mengen sind von verschiedenen Autoren construirt worden. Besonders wichtig ist die Spaltung des Continuums in überall dichte Teilmengen von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, womit die neuesten Untersuchungen von Baire zusammenhängen.

Dritter Abschnitt. Anwendungen auf Functionen reeller Variablen. Kap. 1. Der Stetigkeitsbegriff. — Dieser Begriff kann auch dann Anwendung finden, wenn der Bereich der unabhängigen Veränderlichen nicht ein stetiges Intervall, sondern eine beliebige nicht isolirte Punktmenge P ist; dann erscheint die Functionsbeziehung als eine Abbildung zweier Punktmengen. Der Satz von der gleichmässigen Stetigkeit gilt auch noch, so oft die Punktmenge P abgeschlossen ist. Ist P perfect, und bezeichnet U eine in P überall dichte Teilmenge von P, so kann man eine für die Punkte u von U gegebene Function $F(u)$ zu einer für die Punkte p von P definirten Function $F(p)$ dadurch „erweitern“, dass man, wenn p Grenzpunkt einer Folge $u_1, u_2, \ldots$ ist, für $F(p)$ den Grenzwert von $F(u_1), F(u_2), \ldots$ nimmt; $F(p)$ ist stets und nur dann in P stetig, wenn $F(u)$ in U gleichmässig stetig ist. Die Peano-Hilbert'sche Abbildung eines Quadrats auf eine Strecke bietet ein Beispiel für diesen „Erweiterungsprocess“ dar.

Kap. 2. Die punktweise unstetigen Functionen. — Man kann als Mittelpunkt für die Theorie dieser Functionen den Satz bezeichnen, nach

welchem aus einer punktweise unstetigen Function alle „unwesentlichen Unstetigkeiten" durch Subtraction einer sogenannten „Nullfunction" entfernt werden können.

Kap. 3. Die Ableitungen der monotonen Functionen. — Die allgemeine Aufgabe, um welche es sich hier handelt, ist die, eine monotone Function zu bilden, deren (im du Bois-Reymond'schen Sinn aufgefasste) Ableitungen bestimmte Stetigkeitseigenschaften aufweisen.

Kap. 4. Die unendlich oft oscillirenden und die streckenweise constanten, resp. linearen Functionen. – Man muss die eigentlichen von den uneigentlichen Extremen unterscheiden. Die eigentlichen Extreme einer nirgends constanten Function bilden eine endliche oder abzählbare Menge. Was die Functionen mit einer überall dichten Menge uneigentlicher Extreme, d. i. die überall oscillirenden Functionen betrifft, so ergiebt sich die merkwürdige Thatsache, dass eine solche Function in jedem Punkte eine eigentliche Tangente haben kann. Die streckenweise constanten Functionen reduciren sich unter bestimmten Bedingungen auf Constanten; jedenfalls dürfen sie, sobald sie monoton sind, aus punktweise unstetigen, mit Sprüngen behafteten Functionen durch Umkehrung entstehen. Aus den streckenweise constanten Functionen werden die streckenweise linearen Functionen durch Integration erhalten; man kann aber ihre Existenz auch unabhängig vom Integralbegriff nachweisen.

Kap. 5. Das bestimmte Integral. — Integrirbarkeitsbedingung, uneigentliche Integrale, mehrfache Integrale und deren Zurückführung auf mehrmalige Integrale, bedingt convergente Doppelintegrale.

Kap. 6. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung. — Der Verf. bezeichnet damit den Satz von der Reciprocität zwischen Differentiation und Integration. Die Ausnahmen, welche dieser Satz erleidet, und die Bedingungen, unter welchen er besteht, werden hier erörtert.

Kap. 7. Die Convergenz der Reihen und die Functionenfolgen. — Das Princip der Verdichtung der Singularitäten bietet ein Mittel dazu dar, mit einer überall dichten Menge von Unstetigkeitspunkten behaftete Functionen durch Reihen von Functionen darzustellen, deren jede eine einzige Singularität aufweist. Man kann umgekehrt fragen, welchen Einfluss die Stetigkeit oder Unstetigkeit der Glieder einer Reihe auf die Summe derselben hat. Es ergiebt sich in dieser Hinsicht, dass eine convergente Reihe stetiger Functionen eine stetige oder punktweise unstetige Function, eine gleichmässig convergente Reihe stetiger, resp. punktweise unstetiger Functionen eine stetige, resp. punktweise unstetige Function darstellt. Ist aber die Summe eine stetige Function, so ist die Reihe, deren Glieder ebenfalls stetige Functionen sein mögen, nicht notwendig gleichmässig convergent; und es bietet sich die Frage dar, die Verteilung der Punkte ungleichmässiger Convergenz zu untersuchen. Die betreffenden Resultate werden auf die Theorie der gliedweisen Integration der Reihen angewandt. Das Problem, eine unstetige Function durch stetige Functionen darzustellen, ist kürzlich von Baire behandelt worden. und hat ihn zu einer Einteilung der Functionen in Klassen geführt, von denen die erste (Kl. 0) die stetigen Functionen, die zweite (Kl. 1) die

durch Folgen stetiger Functionen darstellbaren unstetigen Functionen, die dritte (Kl. 2) die durch Folgen von Functionen der Klassen 0,1 darstellbaren Functionen umfasst. Es bleibt nur noch übrig, die Punkte zu untersuchen, in welchen eine Functionenreihe nicht convergirt; eine Frage, welche ihre Anwendung in der Theorie der Fourier'schen Reihen findet.

Vi.

B. Levi. Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_2$, 72-79.

Enthält eine perfecte Punktmenge A, welche in einem Raume liegt, dessen Dimensionenzahl endlich oder abzählbar unendlich sein möge, eine abgeschlossene Menge a, so heisst a „nirgends dicht" in A, wenn in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes von A Punkte von A liegen, die der Menge a nicht angehören. Ist A nicht perfect, sondern nur abgeschlossen, so heisst die Menge a nirgends dicht in A, wenn ihre in der grössten perfecten Teilmenge B von A enthaltene Teilmenge in B nirgends dicht ist.

Eine Menge heisst „von der ersten Kategorie und vollkommen in Bezug auf A", wenn sie die Summe einer abzählbaren Menge von abgeschlossenen, in A nirgends dichten Mengen ist.

Nun teilt der Verf. folgenden Fundamentalsatz mit: „Jede wohldefinirte Menge, welche in einem Raume liegt, dessen Dimensionenanzahl endlich oder abzählbar unendlich sein möge, ist die Summe einer abzählbaren Menge von Differenzen zwischen abgeschlossenen Mengen und in Bezug auf diese vollkommenen Teilmengen derselben von der ersten Kategorie."

Dieser Satz giebt zu mengentheoretischen, funtionentheoretischen und geometrischen Anwendungen Anlass; es möge unter den ersteren der bisher nicht bewiesene Cantor'sche Satz hervorgehoben werden, nach welchem das Continuum die zweite Mächtigkeit besitzt.

Es ist zu beachten, dass der Verf. hier nur die von ihm erhaltenen Resultate vorläufig mitteilt, mit dem Vorbehalt, die bezüglichen Beweise später herauszugeben. Vi.

Ch. Méray. L'„Esperanto", langue auxiliaire artificielle de M. le Dr. Zamenof, ouvrant les plus larges perspectives à la littérature scientifique internationale. Ens. math. **2**, 265-292.

Nach einem Rückblick auf das Volapük und verwandte Bestrebungen werden die einfachen Grundgedanken der zwischenvolklichen Verständigungssprache „Esperanto" (seit 1887 ausgedacht durch den Russen Zamenof) dargelegt, ebenso die Vorteile einer solchen Sprache bei der stets allgemeineren Verbreitung der Wissenschaft. Tn.

Weitere Litteratur.

Congrès international de philosophie, 1-5 août 1900. Section III. Logique et histoire des sciences. Rev. de métaph. **8**, 538-547, 555-565, 589-598. 638-647, 671-678.

K. Pearson. The grammar of science. Second edition, revised and enlarged. London: Adam and Charles Black. XVIII + 548 S. 8°. [Nature **62**, 49-50.]

Wl. Lewicky. Ueber die Klassification der mathematischen Wissenschaften. Lemberg. Sammelschr. **6**, 1-16.

G. Sorel. Le système de mathématiques. Revue de métaph. **8**, 407-428.

E. Cassirer. Descartes' Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis. Marburg. 102 S. 8°.

P. Boutroux. L'imagination et les mathématiques, selon Descartes. Paris: Alcan. 51 S. 8°. (Bibl. de la Fac. des lettres de l'Univ. de Paris. No. X.)

Des Cartes. De solidorum elementis. Texte latin (original et revu). suivi d'une traduction française avec notes par de Jonquières. Mém. Ac. Paris 1899, 55 S. 4°.

E. O. v. Lippmann. Zum 300-jährigen Geburtstage René Descartes'. Stuttgart. 35 S. 8°

R. Hahn. Die Entwickelung der Leibniz'schen Metaphysik und der Einfluss der Mathematik auf dieselbe bis zum Jahre 1686. Halle. 35 S. 4° (1899).

R. Reininger. Kant's Lehre vom inneren Sinn und seine Theorie der Erfahrung. Wien: W. Braumüller. III + 155 S. gr. 8°.

Ed. Wegener. Zum Zusammenhang von Sein und Denken. Ein Beitrag zur Theorie der vierten Raumdimension. 2. Aufl. Leipzig: O. Mutze. 23 S. gr. 8°.

L. Bachelier. Théorie de la spéculation. Paris: Gauthier-Villars. 70 S. 4°.

G. J. Stokes. The theory of mathematical inference. American Assoc. **48**, 71; Amer. Math. Monthly **7**, 1-8.

E. Müller. Ueber die Algebra der Logik. Die Grundlagen des Gebietecalculs. Pr. Tauberbischofsheim. 30 S. 4°.

L. Couturat. Sur une définition logique du nombre. Rev. de métaphys. **8**, 23-36.

G. Milhaud. Les philosophes géomètres de la Grèce, Platon et ses prédécesseurs. Paris: Alcan.

C. de Freycinet. Essais sur la philosophie des sciences: Analyse, mécanique. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars. XIII + 336 S. 8°.

H. Poincaré. Zusammenhang zwischen Mathematik und mathematischer Physik. Ins Russische übertragen von E. Bunitzki. Spaczinski's Bote No. 277, 2-10.

P. Pacher. Die Kraft ist keine Eigenschaft des Stoffes. Wien. VIII u. 34 S. 8°.

J. Hörhager. Das Werden der Welt als Entwickelung von Kraft und Stoff. Ein Beitrag zur einheitlichen Weltanschauung. Leipzig: E. Günther. VII + 104 S. gr. 8°.

L. Barbera. Critica del Newtonianismo ovvero delle cause dei moti planetari. Bologna. XXIV + 396 S. 8°.

J. B. Staub. Die naturgemässe Erklärung der Bewegung durch die Entdeckung oder Erkenntnis der eigentlichen Grundursache derselben. Leipzig: G. Schlemminger. 36 S. 8°.

E. G. Spaulding. Beiträge zur Kritik des psycho-physischen Parallelismus vom Standpunkte der Energetik. Halle: M. Niemeyer. VII + 109 S. gr. 8°. (14. Heft der Abhdl. zur Philosophie und ihrer Gesch., von B. Erdmann).

Kraft und Energie. Eine kritische Betrachtung über die Grundbegriffe der Mechanik. Wiesbaden: J. F. Bergmann. VI + 65 S. 8°.

E. J. Wilczynski. Poetry and mathematics. Berkeley: University Press. 16 S. 8°.

B. Pädagogik.

J. Pierpont. Mathematical instruction in France. American M. S. Bull (2) **6,** 225-249.

In diesem sehr lesenswerten Artikel giebt der Verf. auf Grund eigener Anschauung und unter Benutzung eines ihm bereitwillig zur Verfügung gestellten reichen Materials eine interessante Schilderung des ganzen mathematischen Unterrichts in Frankreich, vorzugsweise in Paris, nebst den Angaben über die Prüfungen, die Anzahl der Bestandenen, die Aussichten dieser Letzteren auf Stellungen im Staate. Der Verf. ist ein vortrefflicher Kenner der deutschen Universitäten und versteht es daher, die verschiedenen Tendenzen der Lehr- und Lernfreiheit der deutschen Hochschulen und des vorgeschriebenen gebundenen Ganges der Studien in Frankreich mit den vielen Prüfungen zu charakterisiren und vorurteilsfrei die Vorzüge hüben und drüben zu beleuchten. Jedem, der Interesse für das Unterrichtswesen hat, ist das Lesen des inhaltsreichen Aufsatzes zu empfehlen. Lp.

W. H. Maltbie. The undergraduate mathematical curriculum. Report of the discussion at the seventh summer meeting of the American Mathematical Society. American M. S. Bull (2) **7,** 14-24.

Die Schlusssitzung der Sommerversammlung (Juni 1900 in New York) der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft wurde einer wohl vorbereiteten Erörterung der Frage gewidmet: Welche Kurse in der Mathematik sollen dem Studenten geboten werden, der die Hälfte, ein Drittel

oder ein Viertel seiner Lernzeit vor Erlangung eines akademischen Grades der Vorbereitung zur Erreichung desselben in der Mathematik widmen will? In dem vorliegenden Artikel werden zuerst die zur Erörterung gestellten Fragen kurz aufgezählt. Dann folgen die einzelnen Gutachten, eingeliefert von Moore, Harkness, Osgood, Morley, Young. Es ist nicht ersichtlich, ob die Versammlung die Absicht gehabt hat, aus den verschiedenen Aeusserungen gewisse Ansichten als allgemein angenommen zu bezeichnen, oder sich mit der Anhörung der einzelnen Meinungen begnügt hat. Lp.

Z. G. de Galdeano. La matemática y su enseñanza. Progreso mat. (2) **2**, 49-54.

Fortsetzung einer im vorigen Bande des Progreso begonnenen Betrachtung (F. d. M. **30**, 69, 1899). Der Verf. prüft die Einrichtungen des mathematischen Unterrichts in Spanien und die an ihnen zu schaffenden Wandelungen, um sie auf die möglich höchste Stufe zu bringen. Tx. (Lp.)

J. Cardinaal. L'enseignement mathématique en Hollande. Ens. math. **2**, 307-339.

Auf Grund der Arbeiten hauptsächlich von Bierens de Haan wird zunächst Umfang und Art des mathematischen Betriebes und Unterrichts im 17. und 18. Jahrhundert gekennzeichnet; dann wird der stets weiteren Ausbreitung der betreffenden Strebungen und ihrer mehr und mehr verordnungsmässigen Festlegung im 19. Jahrhundert gedacht, insbesondere betreffs der Militär- und Kunstgewerbeschulen. Die Zergliederung einer bezüglichen pädagogischen Schrift des Steyn Parvé (1850) führt zur Darlegung des heutigen mathematischen Unterrichts auf den verschiedenen Stufen holländischer Schulen, niederen wie höheren, Knaben- wie Mädchenschulen. Tn.

J. W. A. Young. The teaching of mathematics in the higher schools of Prussia. New York: Longmans. XIV + 141 S. 8°.

P. Mansion. Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. Bibl. Math. (3) **1**, 232-236.

Seit 1890 ist die Geschichte der Mathematik obligatorisch für die Studenten, welche in Belgien den Grad eines „Docteur en sciences physiques et mathématiques“ erlangen wollen, und folglich werden jetzt an allen belgischen Universitäten Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten. In Gent wird das ganze Pensum im Laufe von zwei Jahren erledigt, und Mansion, der seit 16 Jahren solche Vorlesungen gehalten hat, giebt hier genaue Auskunft über die Anordnung derselben.

Sie bringen jedesmal eine zusammenhängende Uebersicht über die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart; aber zuweilen werden gewisse Punkte eingehend behandelt, wodurch die Vorlesungen nicht nur encyklopädischen, sondern zum Teil auch special-wissenschaftlichen Charakter bekommen. E.

R. Bettazzi. La pratica nell'insegnamento della matematica. Atti Acc. Lucchese **30**, 503-528.

Es wäre nach des Verf. Meinung sehr vorteilhaft, den rein deductiven Unterricht in der Mathematik mit Anwendungen derselben auf die wirkliche Welt zu verflechten, wie z. B. die Behandlung von Fragen aus der Physik und Mechanik, die Ausführung von Zeichnungen und von Messungen, die Construction von Modellen aus Papier oder Eisendrähten u. s. w. Auch Betrachtungen über den je nach den zu behandelnden Problemen und den zu Gebote stehenden Mitteln erreichbaren Annäherungsgrad sollten im mittleren Unterricht ihren Platz finden. Vi.

R. Bettazzi. L'application dans l'enseignement de la mathématique. Ens. math. **2**, 14-30.

Im Anschluss an Ideen Klein's betont R. Bettazzi den Nutzen der Anwendungen der reinen Mathematik im Unterrichte, indem er im Rückgang vom Abstracten zum Concreten einen ebenso wichtigen Teil des mathematischen Unterrichts sieht, wie im Uebergang vom Concreten zum Abstracten. Namentlich auf der unteren Stufe sind Zeichnungen, Anfertigung von Modellen, Vermessungen, Uebungen im Gebrauch der Instrumente von Wichtigkeit; aber auch auf der mittleren und höheren Stufe dürfen diese Uebungen, sowie die angewandten Aufgaben aus dem Gebiete der Astronomie, Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung etc. nicht fehlen. Mi.

The position that universities should take in regard to investigation. Nature **61**, 417-418.

Der Artikel entnimmt aus einer Versammlung amerikanischer Naturforscher die Zustimmung zu der Ansicht, dass die Universitätslehrer die selbständige Forschung als ihr Lebenswerk erachten müssen. Lp.

M. Schilling. Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. Nachtrag. Halle a/S. 19 S. 8°.

Die Verlagshandlung von M. Schilling, in deren Besitz der unter der Firma L. Brill in Darmstadt geführte Verlag von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht übergegangen ist, hat die bekannten

älteren Modelle durch neue Serien bereichert. Als wissenschaftlicher Leiter dieses Unternehmens steht ihr Prof. F. Schilling in Göttingen zur Seite, der selbst eine Reihe wertvoller kinematischer Modelle construirt hat. Ein Gesamtkatalog wird in kurzem ausgegeben. M.

E. Czuber. Le droit des écoles techniques supérieures à la promotion au grade de docteur. Ens. math. **2,** 49-54.

Czuber erkennt den Fortschritt, der in der Hebung der technischen Hochschulen Preussens mit der Verleihung des Rechtes an Schüler zur Führung des Dr. Ing.-Titels gemacht ist, an und fordert für Oesterreich eine entsprechende Reorganisation des Examens, wie sie in Preussen eingetreten ist, und dieselbe Berechtigung der Hochschulen. Mi.

J. Perry. England's neglect of science. Nature **62,** 221-226.

Betont die Notwendigkeit eines Unterrichts in den exacten Wissenschaften für alle gelehrten Stände. Lp.

J. Perry. Electrical engineering as a trade and as a science. Nature **63,** 41-47.

Eine Rede vor der Institution of Electrical Engineers; unter selbstbewusster Betonung des Standpunktes des Technikers wird aber auch der engste Anschluss an die reine Wissenschaft dringend empfohlen. Lp.

W. Ripper. Technical instruction in relation to industrial progress. Nature **61,** 356-357.

Betont die Notwendigkeit technischer Erziehung für England, das durch Deutschland und Amerika schon auf manchen Gebieten überholt sei. Lp.

G. H. Bryan. The mathematical tripos. Nature **61,** 346.

Befürwortet die Abschaffung des Titels Senior Wrangler in Cambridge als nicht mehr zutreffend, weil die Erteilung von Zufälligkeiten abhängt und durchaus nicht den Wert des glücklichen Siegers verbürgt. Lp.

Engineering at Cambridge. Nature **61,** 346-348.

Bericht über die Einweihung eines Instituts, für das die Witwe des im August 1898 verunglückten Hopkinson (vergl. F. d. M. **29,** 19,

1898) 5000 Pfund gestiftet hatte, um Studien in der Richtung des Verstorbenen zu fördern. Lp.

W. H. PREECE. The functions of the engineer. Nature **61**, 374-377.

Eine Uebersicht über die Thätigkeit des Ingenieurs; Rede, gehalten in Glasgow vor einer Ingenieur-Versammlung. Lp.

F. W. BURSTALL. American technical education. Nature **61**, 299-301.

Kurze Erörterung des Studienganges auf den amerikanischen Bildungsanstalten, die dort an Stelle unserer technischen Hochschulen stehen. Als besonders gut beschaffen erscheinen die dortigen Werkstätten, in denen alle Studenten arbeiten müssen. „Der amerikanische Student arbeitet stärker als sein englischer confrère, und sein Werk ist ihm nach streng nützlichen Linien abgezirkelt.“ Lp.

H. WEBER. Wirkung der neuen preussischen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten auf den Universitätsunterricht. Deutsche Math. Ver. 8_1, 95-104.

Zuerst werden die an den Mittel- und an den Hochschulunterricht zu stellenden allgemeinen Anforderungen erörtert, dann werden die drei letzten preussischen Prüfungsordnungen (von 1866, 1887, 1898) für Lehrer der Mathematik verglichen, endlich die für die Universitäten daraus fliessenden Folgerungen gezogen, nämlich Notwendigkeit der Aufnahme und lebendigen Verknüpfung der angewandten Mathematik mit der Theorie, insbesondere Aufnahme der darstellenden Geometrie und Abhaltung der Staatsprüfungen durch Hochschullehrer. Tn.

G. HAUCK. Correferat. Deutsche Math. Ver. 8_1, 105-118.

F. KLEIN. Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten. Deutsche Math. Ver. 8_1, 118-119.

A. KRAZER. Ueber den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strassburg. Deutsche Math. Ver. 8_1, 119-120.

E. STUDY. Einige Bemerkungen zu der neuen preussischen Prüfungsordnung. Deutsche Math. Ver. 8_1, 121-137.

Hauck schliesst sich den vorgenannten Wünschen Weber's an und macht Vorschläge betreffs ihrer praktischen Ausführung, insbesondere betreffs der Einreihung des Neuen in die üblichen Hochschulfächer: grosser Nachdruck wird auf die praktischen Uebungen gelegt. Eine grössere Ausführung betrifft den stofflichen und zeitlichen Umfang jener Uebungen, sowie die Art ihres Betriebes. Zum Schluss wird die entsprechende Gestaltung des Studienganges künftiger Hochschullehrer behandelt.

Klein tritt dafür ein, dass die Grundauffassungen der technischen Mechanik bei den künftigen Lehrern hauptsächlich durch messende Versuche an Apparaten und Maschinen gestützt werden sollten; auch wünscht er, dass an jeder Hochschule ein ihren Verhältnissen angepasster Studienplan abgefasst, veröffentlicht, aber auch berücksichtigt werde.

Krazer teilt mit, dass für den Unterricht in darstellender Geometrie ein Lehrgang von zwei Halbjahren mit wöchentlich je zwei Stunden Vorlesung und einer Nachmittagsübung in Strassburg eingerichtet worden sei; der stoffliche Umfang des Lehrganges wird angegeben.

Study legt ausführlicher seine bezüglichen Ansichten dar. Er wünscht noch weitere Entlastung der Candidaten, insbesondere durch Abschaffung der sogenannten allgemeinen Prüfung; er verwirft, wohl mit Recht, die Zuziehung von Mittelschulprofessoren als Prüfenden bei den Fachprüfungen, und er erachtet die Beiziehung der angewandten Mathematik in den Prüfungsplan oder vielmehr ihre zu starke Betonung als im allgemeinen nicht wünschenswert; es solle nur Geodäsie oder darstellende Geometrie, jedes Fach in bescheidenem Umfang, verlangt werden, und im ganzen solle man nicht den Universitäten zuschieben, was Sache der technischen Hochschulen sei. Tn.

F. Klein und E. Riecke. Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. (Mit 84 Textfiguren.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VI + 252 S. gr. 8°.

„Was sind angewandte Mathematik und Physik im Sinne der neuen Prüfungsordnung, und was bedeuten sie für die höheren Schulen? Wie kann der Lehrer sich nötigenfalls durch Selbstunterricht die erforderlichen Kenntnisse erwerben? Wie andererseits sind mit Rücksicht auf das Bedürfnis der Schulen wie der Wissenschaft überhaupt unsere bezüglichen Universitätseinrichtungen zu ergänzen? — Dies etwa sind die Fragen, welche in den folgenden Aufsätzen behandelt werden sollen.“ — Die Aufsätze entsprechen im grossen und ganzen den Vorträgen, die in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Feriencursus für Oberlehrer der Mathematik und Physik gehalten wurden; es sind die folgenden: I. Zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität Göttingen. Von Ed. Riecke. II. Allgemeines über angewandte Mathematik. Von F. Klein. III. Ueber technische Mechanik. Von F. Klein. IV. Ueber darstellende Geometrie. Von Fr. Schilling. V. Einführung in die Geodäsie. Von E. Wiechert. VI. Ueber Versicherungsmathematik. Von G. Bohlmann. VII. Ueber Wärmekraftmaschinen. Von Eug. Meyer. VIII. Ueber Elektrotechnik. Von Th. Des Coudres.

Die ersten vier Aufsätze sind mehr allgemein gehalten, während die vier letzten eine wirkliche Einführung in die speciellen von ihnen be-

handelten Gebiete geben; besonders zeichnen sich die Aufsätze V-VII durch klare zusammenfassende Darstellung aus; der Artikel über Elektrotechnik ist sehr interessant und reichhaltig, aber in der Form etwas zu aphoristisch. — Angefügt sind noch vier bereits früher erschienene Aufsätze von Klein: I. Ueber den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen, Vortrag, gehalten am 6. December 1895 im Hannoverschen Bezirksverein des Vereins deutscher Ingenieure. II. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtscandidaten. Vortrag, gehalten im Hannoverschen mathematischen Verein am 20. April 1896. III. Universität und technische Hochschule. Vortrag, gehalten in der ersten allgemeinen Sitzung der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Düsseldorf am 19. September 1898. IV. Ueber die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen (aus der Physikalischen Zeitschrift. Leipzig: Hirzel. December 1899); unter Fortlassung aller polemischen Erörterungen, die in einem Nachwort ihre Stelle finden. — Das Buch wird den Mathematik- und Physiklehrern mannigfaltige Anregung gewähren, manches darin auch unmittelbare Anwendung im Schulunterrichte finden können. Das nach modernen Tendenzen verfasste Werk erscheint mit entsprechend modernem Gewande in opulenter Ausstattung. Wbg.

H. Schotten. Wissenschaft und Schule. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 37-42, 61-66.

Die Ausführungen des Verf. beanspruchen für die höheren Schulen im wesentlichen als Ziel den erziehlichen Unterricht im Sinne von Herbart. Lp.

A. Richter. Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts auf den preussischen Gymnasien während des neunzehnten Jahrhunderts. Hoffmann Z. **31**, 253-262.

Kurze Uebersicht unter den Titeln: A. Das achtzehnte Jahrhundert. B. Der Beginn des neunzehnten Jahrhunderts. C. Der Widerspruch gegen die Hypothese von der formalen Bildung. D. Der Widerstand gegen die der Mathematik eingeräumte Zeit und Bedeutung. E. Der Umfang des Unterrichtsstoffes. F. Die innere Entwickelung. G. Der mathematische Unterricht am Schlusse des Jahrhunderts. — Das zwanzigste Jahrhundert. Lp.

Karkass. Die Directoren-Conferenz der Provinz Schleswig-Holstein, 11. October 1899. Hoffmann Z. **31**, 71-72.

Elf Leitsätze über den mathematischen Unterricht auf Mittelschulen. Lp.

D. E. Smith. The teaching of elementary mathematics. New York: The Macmillan Company. XV + 312 S.

Dieses Werk kann allen Lehrern der elementaren Mathematik warm empfohlen werden. Wenn auch nicht viel Neues in dem Buche steht, so liegen der ganzen Erörterung vernünftige Ansichten zugrunde. Als eine selbstverständliche Thatsache betrachten wir es, dass viele Lehrer ihre Klassen so weit führen, wie die Umstände es gestatten (wie z. B. die Vorbereitung der Schüler für vorschriftsmässige Prüfungen); aber jeder Lehrer wird durch ein sorgfältiges Studium des Buches irgend eine Anregung erhalten, selbst bei mancher Abweichung von den Anschauungen des Verf. Gbs. (Lp).

J. Perry. The teaching of mathematics. Nature **62**, 317-320.

D. Mair. The reform of mathematical teaching. Nature **62**, 389.

H. Wollen. The reform of mathematical teaching. Nature **62**, 436.

W. F. Beard. The reform of mathematical teaching. Nature **62**, 466.

C. E. Stromeyer. The reform of mathematical teaching. Nature **62**, 523.

O. Heaviside. The teaching of mathematics. Nature **62**, 548-549.

Perry stellt einen vollständig neuen Plan für den Unterricht in der Mathematik in englischen Schulen auf; er will vor allem die Praxis berücksichtigt wissen, schreitet rasch vorwärts, so dass er bis zum Differentialquotienten auf der Schule gelangt. Die übrigen Autoren stimmen bei oder begründen ihre abweichenden Meinungen. Lp.

M. C. P. Schmidt. Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. I. Buch. Leipzig: Dürr. VIII u. 128 S. + 56 Fig. 8°.

M. C. P. Schmidt. Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. II. Buch. Leipzig: Dürr. VI u. 170 S. 2 Taf. 8°.

M. C. P. Schmidt. Realistische Stoffe im humanistischen Unterricht. Leipzig: Dürr. 60 S. 8°.

M. C. P. Schmidt. Zur Reform der klassischen Studien auf Gymnasien. Leipzig: Dürr. 40 S. 8°.

Der Gegensatz zwischen Humanismus und Realismus im Unterrichtswesen hat sich nur dadurch zu seiner vollen Schärfe entwickeln können, dass das Gymnasium stets einen kleinen Ausschnitt aus der antiken Litteratur, die poetische, rhetorische, philosophische Litteratur, in den Vordergrund gestellt hat, die realistischen Wissenszweige dagegen die Geschichte ihrer Wissenschaft wenig gepflegt haben. Der Gegensatz

schwächt sich aber bedeutend ab, wo die altklassische Litteratur in ihrem weiteren Umfange ins Auge gefasst wird, und wo auch die exacten Wissenschaften historische Gesichtspunkte in sich aufnehmen. Hier berühren sich Humanismus und Realismus in der Erforschung des Menschlichen. Das Altertum hat die Grundbegriffe auch des realen Wissens geschaffen, und jede geschichtliche Forschung über dieselbe führt wieder zu den Griechen und Römern zurück; so reicht das Altertum in die Gegenwart hinein. Nicht nur die exacten Wissenschaften können daher auf dem Gymnasium durch methodische Annäherung an die humanistischen Disciplinen, sondern auch der philologische Zweig des Unterrichts kann durch Auswahl geeigneten Lectürestoffes aus dem Altertum zur Versöhnung des Gegensatzes beitragen. Es liegen in der Gegenwart zahlreiche gute Ausgaben alter Schriften von Mathematikern, Astronomen, Medicinern, Geographen etc. vor. Aus ihnen kann für das Gymnasium eine Reihe wichtiger, mathematischer und naturwissenschaftlicher Probleme und technischer Anwendungen und Erfindungen als Lectürestoff ausgewählt werden; namentlich sind hierbei auch solche Entdeckungen des Altertums zu berücksichtigen, die noch heute nicht nur die alte Form bewahrt haben, sondern auch mit dem Namen des Entdeckers verbunden geblieben sind. Dieses Material wird für das Gymnasium am besten in der Form einer Chrestomathie, die gelegentlich zur Lectüre benutzt wird, flüssig gemacht werden, und von einer solchen Chrestomathie giebt uns M. Schmidt einen glücklichen Anfang. In einem I. Teil, von dem zwei Bücher bereits erschienen sind, soll in drei Büchern das Wichtigste aus der Grössenlehre, aus der Kenntnis von Himmel und Erde und von den Erfindungen des Altertums gegeben werden. Einleitungen bereiten den Stoff vor; Anmerkungen, die über Schwierigkeiten hinwegführen, begleiten den Text, und so wird in der That die Lectüre eines fein ausgewählten, an sich nicht leichten Stoffs aus Euklid, Ptolemaeus, Nikomachos, Diophant, Geminos, Strabo etc. zu einem Genuss umgeschaffen, bei dem den Schülern unserer Gymnasien erst die wirkliche Wertschätzung des Altertums erwachsen kann. Der Chrestomathie ist daher recht verbreitete Anwendung auf den Gymnasien zu wünschen. Die neuen Lehrpläne gestatten in den oberen Klassen den Gebrauch eines solchen Buches.

Mi.

P. Appell. Sur la classe de mathématiques spéciales. Ens. math. 2, 340-345.

Der Verf. beklagt sehr den sportmässig gewordenen Unterricht der „Mathématiques spéciales“-Klassen, hervorgerufen durch den Zwang, vor allem für die „concours“ vorzubereiten; er schildert die Missstände für wahre Ausbildung und schlägt vor, die Wettbewerbsprüfungen als solche abzuschaffen und sie durch geordnete Notengebung während der zwei Unterrichtsjahre zu ersetzen.

Tn.

M. d'Ocagne. La nomographie dans l'enseignement. Ens. math. **2**, 207-210.

Der Artikel begründet den Wunsch, die Elemente der Nomographie als Anwendungen der analytischen Geometrie in den mathematischen Unterricht einzuführen. F.

F. Pietzker. Gleichung und Rechenexempel. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 8-11.

Bezieht sich auf die Schemata bei der Ausführung von Rechenaufgaben, in denen der Verf. eine grössere Genauigkeit verlangt. Lp.

A. Lechthaler. I. Einige allgemeine Bemerkungen zum Erscheinen der neuen Auflage des Lehrplanes und der Instructionen für den Unterricht an den Gymnasien in Oesterreich, Kapitel Mathematik. II. Zur Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen und der allgemeine Proportionalitätssatz. Pr. Staatsgymnasium zu Linz. 23 S.

R. Clasen. Ueber die Behandlung des Grenzbegriffes im Unterrichte. Jahresber. Ver. Naturw. Braunschw. **11**, 159-160 (1899).

F. Enriques. Questioni riguardanti la geometria elementare trattate da U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali. Raccolte e coordinate da Federigo Enriques. Con 10 tavole e 40 figure. Bologna: Zanichelli. VII + 532 S.

Wenn es auch eine offene Frage ist, ob und in welchem Masse die neuesten geometrischen und analytischen Untersuchungen auf den elementaren Unterricht einen Einfluss haben sollen, so ist allgemein anerkannt, dass die Lehrer an den Mittelschulen eine klare und genaue Vorstellung von dem unerwarteten Lichte haben müssen, welches die Modernen auf alte berühmte Probleme zu werfen wussten. Der Erste aber, der das Problem sich stellte und löste, die Resultate zu verbreiten, welche unsere Wissenschaft zeitigte, als sie auf die Fundamentalaufgaben der alten Geometrie angewandt wurde, ist F. Klein, dessen „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik" ein Echo des Lobes in der ganzen Welt hervorriefen. Einen ähnlichen, aber noch weiteren Zweck, hat der vorliegende Sammelband, dessen verschiedene Themata man aus dem folgenden Inhaltsverzeichnis ersehen kann:

1. F. Enriques. Ueber die wissenschaftliche und didaktische Bedeutung der Fragen über die Principien der Geometrie.

2. U. Amaldi. Ueber die Begriffe Gerade und Ebene.

3. A. Guarducci. Die Congruenz und die Bewegung.

4. G. Vitali. Ueber die Anwendungen des Stetigkeitgrundsatzes in der Elementargeometrie.

5. U. Amaldi. Ueber die Lehre von der Aequivalenz.

6. R. Bonola. Ueber die Theorie der Parallelen und die nichteuklidischen Geometrien.

7. E. Baroni. Ueber die elementaren Methoden, die geometrischen Aufgaben aufzulösen.

8. E. Daniele. Ueber die Auflösung der geometrischen Aufgaben durch den Zirkel allein.

9. A. Giacomini. Ueber die Auflösung der geometrischen Aufgaben mit elementaren Instrumenten.

10. G. Castelnuovo. Ueber die Auflösbarkeit der geometrischen Aufgaben mit den elementaren Instrumenten.

11. F. Enriques. Ueber die algebraischen Gleichungen, welche durch Quadratwurzeln auflösbar sind, und die Construirbarkeit der regulären Polygone.

12. E. Daniele. Ueber die verschiedenen Constructionen des regulären Siebzehnecks.

13. A. Conti. Probleme dritten Grades: die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung.

14. B. Calò. Ueber transcendente Probleme, insbesondere die Quadratur des Kreises.

In diesen vierzehn Aufsätzen sind alle Fragen behandelt oder mindestens berührt, denen jeder Lehrer der Geometrie in seinem Unterricht begegnen wird. Die Verfasser erweisen sich als gründliche Kenner nicht nur der Fragen selbst, sondern auch ihrer Litteratur; daher muss das besprochene Buch einen Platz in jeder Schulbibliothek finden. Es ist höchst wünschenswert, dass ihm bald ein anderes folge, welches in einem ähnlichen Sinne die entsprechenden Fragen der elementaren Algebra behandelt. La.

L. Ripert. Sur l'utilité de la notion de l'infini dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Ens. math. **2**, 127-133.

Nach einem Hinweis auf die Stellen, wo sich in der Arithmetik und Algebra die Idee des Unendlichgrossen und -kleinen von selbst darbietet, wird deren so leichte Einführung auch in den elementaren geometrischen Unterricht verlangt, und es wird gezeigt, dass, wo und wie dies geschehen könne. Tn.

P. Appell. Notion de l'infini en géométrie élémentaire (à propos d'un article de M. Ripert.). Ens. math. **2**, 205-206.

Appell wendet sich gegen den von Ripert (s. oben S. 86) ausgesprochenen Wunsch und Vorschlag: die Benutzung des Unendlichen gehöre in den späteren Unterricht, in die Lehre von der Abbildung der Ebene. Tn.

L. Ripert. Sur la notion de l'infini en géométrie élémentaire. Ens. math. **2**, 370-377.

Der Verf. sucht die Einwände zu widerlegen, welche Appell und Niewenglowski gegen einen früheren Aufsatz von ihm erhoben haben, in dem er für die Einführung des Unendlichkeitsbegriffes in die elementare Geometrie plädirt. F.

K. Rohn. Die Entwickelung der Raumanschauung im Unterricht. Festrede. Pr. Dresden: A. Dressel. 7 S. 4°.

J. Andrade. L'enseignement de la géométrie et les géométries non-euclidiennes. Ens. math. **2**, 114-126.

Der Verf. tritt dafür ein, dass der erste geometrische Unterricht euklidisch bleibe, dass aber das euklidische Postulat bereits als auf freier Wahl beruhend aufgezeigt werde; der weitergehende, d. i. der mittlere geometrische Unterricht müsse aber von der euklidischen Specialisirung befreit werden — wie, zeigt der Verf. in grossen Zügen. Er wünscht in einem ersten Teil seiner die ebene von der Raumgeometrie nicht scheidenden „natürlichen Geometrie" alles aufgenommen, was von dem euklidischen Postulat nicht abhängt; es ist ihm die „qualitative" Geometrie. Ein zweiter Teil, die quantitative, hat die metrischen Eigenschaften festzulegen. In der Ausführung seines Gedankens zeigt er die mögliche und notwendige Verschmelzung der allgemeinen Massgeometrie, der Statik und der Trigonometrie, dreier Zweige, die ihm nur als die drei Seiten einer und derselben Sache erscheinen. Als dritten Abschnitt der natürlichen Geometrie will er das Mass der Ausdehnungen angesehen wissen. Der Unterricht in der Geometrie müsse von kinematischen Betrachtungen beherrscht sein, Euler und Poinsot seien die kennzeichnenden Grössen. Tn.

F. Redl. Sur la démonstration des formules du demi-angle en trigonométrie plane. Ens. math. **2**, 201-204.

Es handelt sich um die geometrische Ableitung der Werte von $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und von ϱ, ausgedrückt durch die Seiten des Dreiecks; diese Ableitung scheint dem Verf. pädagogisch und wissenschaftlich besser als die von Meyer (1887), und Korschel (1893).

Der Hinweis auf die Beihülfe zum leichten Wiederfinden der Formeln macht den Schluss. Tn.

F. Pietzker. Die darstellende Geometrie im Lehrplan der höheren Schulen. Unterrichtsbl. f. Math. **6,** 101-106.

J. Schröder. Thesen (mit erläuternder Vorbemerkung). Ibid. 106-108.

Gutachten über den Unterricht in der darstellenden Geometrie von J. E. Böttcher, E. Gerland, Städtische Oberrealschule zu Halle (Saale), C. Hildebrandt, G. Holzmüller, C. H. Müller, J. Schröder, R. Schwann. Ibid. Beilage, 13 S. 4°.

R. Böger. Die Geometrie der Lage in der Schule. Unterrichtsbl. f. Math. **6,** 66-70.

Verf. ist ein begeisterter Anhänger der neueren rein synthetischen Geometrie und befürwortet ihre Einführung in den Lehrgang der Schulen vor dem Beginne der analytischen Geometrie, die er auf Kosten der ersteren gekürzt wissen will. Lp.

B. Schwalbe. Ueber Berücksichtigung der Nautik beim Schulunterricht. Unterrichtsbl. f. Math. **6,** 6-8.

Befürwortet diese Berücksichtigung unter näherer Begründung und Ausführung von Beispielen. Lp.

A. Schülke. Eine Reformbewegung auf Navigationsschulen. Hoffmann Z. **31,** 72-75.

Bei der Besprechung der zur Vereinfachung vorgeschlagenen Aenderungen im Lehrgange der Mathematik betont der Verf. besonders die Einführung vierstelliger Logarithmen, eine Massregel, für die er ja bei jeder Gelegenheit sein Wort erhebt. Lp.

Weitere Litteratur.

F. Mallet. Du rôle éducateur des mathématiques; discours prononcé à la distribution des prix du petit séminaire et école libre du Sacré-Cœur d'Aix, le 26 juillet, 1900. Aix: Nicot. 14 S. 8°.

Sanders. Bericht über die Verhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der (45.) Philologen- und Schulmänner-Versammlung in Bremen vom 26.-30. September 1899. Hoffmann Z. **31,** 66-71.

H. SCHOTTEN. Bericht über die in der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (zu München) gehaltenen Vorträge. Unterrichtsbl. f. Math. 6, 11-14.

Bericht über die neunte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Hamburg in der Pfingstwoche 1900. Unterrichtsbl. f. Math. 6, 49-53.

F. MILNER. On teaching geometry. Boston: Heath. 18 S. 16mo.

F. BIRABEN. Pedagogía matemática (bibliografía y crítica). Anales Soc. Argentina 48, 156-167.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Kapitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

E. NETTO. Vorlesungen über Algebra. (In 2 Bänden.) 2. (Schluss)-Lieferung des 2. Bandes. Leipzig: B. G. Teubner. XII + S. 193-519. 8°.

Die zweite Lieferung des zweiten Bandes, welche das für das Studium der Algebra wichtige Werk zum Abschluss bringt (vergl. F. d. M. **27**, 58, 1896; **29**, 65, 1898), ist der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten gewidmet. Nachdem der Hilbert'sche Irreducibilitätssatz vorausgeschickt ist, folgen die cyklischen und die allgemeineren Abel'schen Gleichungen, die Gruppen und die Functionengattungen, deren Theorie in möglichst unmittelbare Beziehung zu den Gleichungen gesetzt wird, die algebraischen Zahlen, die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen und endlich als Anwendung der allgemeinen Theorie das Problem der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, die auflösbaren und die allgemeinen Gleichungen 5. Grades.

F.

C. RUNGE. Praxis der Gleichungen. Leipzig: G. J. Göschen. 196 S. 8°. (Sammlung Schubert, No. XIV.)

In klarer, leicht verständlicher Sprache trägt der Verf. die Methoden für die numerische Auflösung der Gleichungen vor und erläutert sie an zahlreichen, bis ins Einzelne ausgeführten Beispielen, so dass der praktische Rechner unmittelbar den gegebenen Vorschriften folgen kann. Berücksichtigt sind namentlich die rein rechnerischen Methoden, während die graphischen nur gelegentlich zu Hülfe gezogen werden. F.

N. H. Abel. Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgeg. von A. Loewy. Leipzig: W. Engelmann. 50 S. 8°. (Ostwald's Klassiker, No. 111.)

Der Uebersetzung dieser von Abel im 4. Bande des Journals für Math. unter dem Titel „Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement" veröffentlichten bekannten Arbeit hat der Herausgeber eine Anzahl historischer und erläuternder Anmerkungen unter Berücksichtigung namentlich der Galois'schen Theorie und der Kronecker'schen Untersuchungen hinzugefügt. F.

F. Bucca. Studi di analisi. Palermo Rend. **14**, 115-141.

Unter diesem Titel sind fünf hinterlassene Noten des der Wissenschaft zu früh entrissenen Mathematikers veröffentlicht worden, nämlich:

1. Sullo sviluppo degli integrali d'un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno d'un punto singolare. — Die analytische Form der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes wird hier auf einem neuen Wege ermittelt.

2. Sulla riduzione del gruppo di Galois d'un'equazione algebrica coll'aggiunta di irrazionalità arbitrarie. — Ein einfacher Beweis eines bekannten Satzes (siehe: H. Weber: Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, Braunschweig, 1895, S. 516), nebst Aufstellung einiger Folgerungen.

3. Sulle espressioni algebriche costruibili geometricamente colle sole coniche o con curve di ordine superiore al secondo. — Soll eine irreducible algebraische Gleichung durch Wurzelgrössen mit den Indices $p, q, \cdots$, wo $p, q, \cdots$ Primzahlen bezeichnen, auflösbar sein, so darf ihre Ordnung keine anderen Primfactoren als $p, q, \cdots$ enthalten. Beachtet man nun, dass jeder aus lauter quadratischen und kubischen Wurzelgrössen gebildete Ausdruck mit Hülfe von Kegelschnitten construirbar ist, so ergiebt sich aus dem soeben angeführten Satze, dass eine irreducible Gleichung nur dann durch Kegelschnitte auflösbar ist, wenn ihre Ordnung die Form $2^\lambda 3^\mu$ hat. Das ist der Fall für die Kreisteilungsgleichungen, welche der Einbeschreibung eines regulären Vieleckes von $p = 2^\lambda 3^\mu + 1$ Seiten entsprechen, wo p eine Primzahl darstellt. Ist dagegen z. B. $p = 11 = 2 \cdot 5 + 1$, so muss man ausser einem Kegelschnitte auch eine rationale Curve dritter Ordnung benutzen.

4. Sulla irrazionalità icosaedrica. — Beweis und Erweiterung eines bekannten Satzes (siehe G. Vivanti: Sulla irrazionalità icosaedrica. Palermo Rend. **9**, 202-207; F. d. M. **26**, 178, 1895).

5. Sulla riduttibilità delle equazioni binomie. — Nachdem der Verf. einige von T. Vahlen (Ueber reductible Binome. Acta Math. **19**, 195-198; F. d. M. **26**, 121, 1895) und A. Capelli (Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. Napoli Rend. (3) **3**, 243-252; F. d. M. **28**, 90, 1897) erhaltenen Resultate auf rein arithmetischem Wege bewiesen hat, stellt er eine hinreichende Bedingung dafür auf, dass eine algebraische Gleichung eine binomische ist. Vi.

A. MACFARLANE. Space analysis. Brief of twelve lectures on the George Leib Harrison Foundation. Printing Company Philadelphia. 8°. 1-7.

Der Name „Raumanalysis" umfasst die verschiedenen, den besonderen Zwecken der Geometrie des Raumes angepassten Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Algebra. Im Vordergrunde steht die Quaternionentheorie und die Streckenrechnung. In seinen Vorlesungen über diesen Gegenstand hebt Macfarlane zuerst die Unterscheidungspunkte der beiden genannten Theorien hervor und stellt die beiderseitigen, einander zum Teil widersprechenden Grundformeln zusammen. Die Uebereinstimmung zwischen beiden Formelgruppen wird dadurch hergestellt, dass die in den Quaternionenformeln vorausgesetzten Drehungen der Axen in entgegengesetztem Sinne ausgeführt werden und die Axen i, j, k den Factor $\sqrt{-1}$ erhalten. Es werden dann die Producte von zwei und drei reellen oder imaginären Axen untersucht und die Ausdrücke für circulare und hyperbolische complexe Grössen, Winkel und Quaternionen aufgestellt. Es folgt der Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie, die Theorie der Exponentialgrössen und Logarithmen, wobei ein Irrtum Hamilton's berichtigt wird, der durch Nichtunterscheidung der Summe zweier von einem Punkt ausgehenden Vectoren von der Summe zweier aufeinander folgenden Vectoren entstanden ist. Den Schluss bilden Grundformeln der Trigonometrie auf dem gleichseitigen Hyperboloid, auf dem Umdrehungs- und dem allgemeinen Ellipsoid. Ueberall werden die Vorteile der Raum-Analysis zur Anschauung gebracht. Schg.

CH. J. JOLY. On the place of the „Ausdehnungslehre" in the general associative algebra of the quaternion type. Dublin Proc. (3) **6**, 13-18.

Zweck der Abhandlung ist die Untersuchung der Frage, ob die „Ausdehnungslehre" in die distributive und die associative Algebra einbegriffen werden kann, deren Einheiten den Gesetzen der Quaternionen gehorchen: $i_s^2 = -1$ und $i_s i_t + i_t i_s = 0$. Das Ergebnis der Untersuchung wird vom Verf. in folgenden Worten ausgesprochen: „Wir schliessen somit, dass die einem Raume von n Dimensionen angepasste Ausdehnungslehre als ein Teil der durch mehr oder weniger willkürliche Beschränkungen eingeengten associativen Algebra von $n+1$ Dimensionen betrachtet werden kann. Wir sehen, dass die Begriffe der progressiven und der regressiven Multiplication stückweise Schauseiten einer vollständigen Operation sind, die allein auf den Namen Multiplication Anspruch hat. In dieser Hinsicht ähnelt die Ausdehnungslehre mehreren Systemen der Vectoranalysis, und zwar aus sehr gleichartigen Gründen. Das Punktsymbol wird durch den Kunstgriff eingeführt, dass der Ursprung willkürlich gelassen wird, nicht wie Hamilton es that in dem unter Erörterung stehenden Raume, sondern in einem Raume von einer um 1 höheren Dimension".

Gbs. (Lp.)

L. Königsberger. Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen. J. für Math. **121**, 320-359.

In einer früheren Arbeit („Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen“, J. für Math. **115**, 53-78; F. d. M. **26**, 116, 1895) hat der Verf. gezeigt, wie man aus der speciellen Entwickelungsform algebraischer Functionen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes und der dadurch bedingten Gestalt der sie definirenden algebraischen Functionalgleichung Irreductibilitäts-Kriterien für algebraische Gleichungen herleiten kann. In dem vorliegenden Aufsatz wird zunächst die notwendige und hinreichende Form gefunden, die eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen einer Veränderlichen sind, haben muss, damit die ihr genügende algebraische Function gegebene Verzweigungen besitze (betreffs der hierauf bezüglichen Lehrsätze muss ihres Umfanges wegen auf die Arbeit selbst verwiesen werden). Indem man nun für die algebraischen Functionen nur solche Verzweigungen wählt, welche ein Durchlaufen aller Blätter der zugehörigen Riemann'schen Fläche gestatten, ohne durch einen Verzweigungspunkt zu gehen, und in der so erhaltenen algebraischen Functionalgleichung die rationalen Functionen durch rationale Zahlen, die zu den Verzweigungspunkten gehörigen linearen Teiler durch Primzahlen ersetzt und der Bedingung des Nichtverschwindens einzelner Coefficienten für die Verzweigungspunkte die Nichtteilbarkeit der ganzzahligen Coefficienten durch die Primzahlen substituirt, erhält man viel allgemeinere Irreductibilitätskriterien als in der im Anfange citirten Arbeit. Unter den verschiedenen Resultaten werde beispielsweise der Satz angeführt: „Ist eine ganzzahlige algebraische Gleichung, deren Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch eine Primzahl teilbar sind, durch ein ganzes Polynom, dessen Coefficienten wiederum dieselbe Primzahl als Factor enthalten, teilbar, so wird, wenn der letzte Coefficient dieses Polynoms die Primzahl nur einmal weniger enthält als der letzte Coefficient der Gleichung, der Quotient ein mit Adjungirung rationaler Zahlen irreductibles Polynom sein“, welcher Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von der Irreductibilität der zu einer Primzahlpotenz gehörigen, von den nichtprimitiven Einheitswurzeln befreiten Kreisteilungsgleichung bildet. — Für bestimmte Klassen von Gleichungen wird das vorher angegebene Princip auch benutzt, um die Reductibilität algebraischer Gleichungen bei Adjungirung gewisser Grössen festzustellen. F.

H. Hancock. Méthode de décomposition des polynômes entiers à plusieurs variables en facteurs irréductibles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 89-102.

Die benutzte Methode ist eine Verallgemeinerung des von Mandl (J. für Math. **113**, 252-261; F. d. M. **25**, 145, 1894) für Zerlegung ganzer rationaler Functionen einer Veränderlichen angegebenen Verfahrens. Das

Eigentümliche der Methode besteht darin, zu zeigen, dass die gegebene Function $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} x_k &= x'_k + h_0, \\ x_{k-1} &= x'_{k-1} + h_1(x'_k), \\ x_{k-2} &= x'_{k-2} + h_2(x'_k, x'_{k-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_1 &= x'_1 + h_{k-1}(x'_k, x'_{k-1}, \dots, x'_2). \end{aligned}$$

wo h_0 eine passend gewählte ganze Zahl, $h_1, h_2, \dots, h_{k-1}$ geeignete ganze ganzzahlige Functionen bedeuten, in eine ganze Function F von $x'_1, \dots, x'_k$ umgewandelt werden kann, welche die Eigenschaft hat, dass ihre sämtlichen Coefficienten und die aller ihrer reellen Teiler positive ganze Zahlen sind. Die Entscheidung, ob F reductibel oder irreductibel ist, führt auf die Untersuchung, ob ein System diophantischer Gleichungen durch ganze rationale Functionen mit positiven ganzzahligen Coefficienten (bei Mandl durch positive ganze Zahlen) befriedigt wird oder nicht.

F.

J. Carnoy. **Principe fondamental de la théorie des équations.** Rom. Acc. P. d. N. L. **53**, 167-172.

Durch die hier vorgetragenen Ueberlegungen wird die Existenz der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung nicht bewiesen.

F.

S. N. Antajew. **Die Ableitung der Grundeigenschaften der Gleichung n^{ten} Grades aus der Betrachtung des Systems der n Gleichungen, denen die Wurzeln einer gegebenen Gleichung genügen.** Mosk. Math. Samml. **21**, 33-91. (Russisch.)

Fortsetzung (Kap. IV u. V) der in F. d. M. **28**, 92, 1897, besprochenen Arbeit. Hier werden im § 1 des Kap. IV drei Sätze und im § 5 ihre Umkehrungen bewiesen. Diese ermöglichen es, durch die Eigenschaften des Systems der gegebenen Gleichung die Vertauschbarkeit ihrer Gruppe zu charakterisiren und dadurch eine einfache und kurze Darstellung des bekannten Sylow'schen Satzes zu geben. Im Kap. V werden die bekannten Kriterien der Auflösbarkeit der Gleichung vom Primzahlgrade p ohne Zuhülfenahme der Adjunction der $p$ten Einheitswurzeln zum Rationalitätsbereiche abgeleitet. Si.

D. Th. Seliwanow. **Ueber Gleichungen, deren sämtliche Wurzeln reell sind.** Kasan Ges. (2) **9**, No. 4, 51-53. (Russisch.)

Beweis des von P. S. Florow auf der X. Versammlung Russischer Naturforscher in Kiew 1898 angegebenen Satzes (F. d. M. **29**, 70, 1898): Sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $\Sigma(n)_i\, a_i x^{n-i}$ reell, und a_k, a_{k+m}

von Null verschieden, so sind es auch sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$a_k x^m + m a_{k+1} x^{m-1} + \cdots + a_{k+m} = 0.$$

Daraus folgt einfach, dass im Falle $a_{k+1} = a_{k+2} = 0$ die Gleichung imaginäre Wurzeln besitzt. Si.

L. Autonne. **Sur les équations algébriques anharmoniques.** C. R. **130,** 313-316, 390-393.

L. Autonne. **Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés.** S. M. F. Bull **28,** 90-107.

Die beiden Noten in den Comptes Rendus setzen die Arbeit „Sur les intégrales algébriques de l'équation de Riccati" fort, über welche in F. d. M. **30,** 297, 1899, referirt worden ist. Anharmonisch nennt der Verf. diejenigen irreduciblen algebraischen Gleichungen beliebigen Grades mit Coefficienten, die rationale Functionen einer Veränderlichen sind, deren sämtliche Wurzeln einer Riccati'schen Differentialgleichung als Integrale genügen, weil bei ihnen das Doppelverhältnis von vier Wurzeln sich als constant erweist. Auf Grund der Theorie der Gruppen gebrochener linearer Substitutionen von endlicher Ordnung werden die Haupteigenschaften dieser anharmonischen Gleichungen abgeleitet und eine Methode zu ihrer wirklichen Herstellung gegeben.

In der dritten Arbeit geschieht dasselbe für die anharmonischen Gleichungen speciell des vierten und fünften Grades auf elementarerem Wege. Den Ausgangspunkt bildet hier die Constanz des Doppelverhältnisses von vier Wurzeln. F.

J. Richard. **Continuité des racines d'une équation.** Revue de Math. spéc. **10,** 499-500.

„Wenn die Coefficienten des Polynoms $F(z)$ variiren und als Grenzen diejenigen des Polynoms $f(z)$ besitzen, wenn ferner die Gleichung $f(z) = 0$ die p-fache Wurzel z_0 hat, so haben p Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$ als Grenze z_0". Wbg.

P. Sondat. **Théorème sur les équations algébriques.** Nouv. Ann. (3) **19,** 25-28.

Wenn eine algebraische Gleichung $n$ten Grades (n ungerade) eine $\frac{1}{2}(n+1)$-fache Wurzel besitzt, so ist der Wert derselben $\varDelta_1/\varDelta = \varDelta_2/\varDelta_1$, wo $\varDelta, \varDelta_1, \varDelta_2$ homogene Functionen zweiten Grades der Gleichungscoefficienten bedeuten. F.

J. Pierpont. **Galois' theory of algebraic equations. [Part. II. Irrational resolvents.]** Annals of Math. (2) **1,** 113-143; (2) **2,** 22-56. (Auch sep. Cambridge: Harvard University. 67 S. 4°.)

Die beiden Aufsätze bilden den Inhalt einer im September 1896

gehaltenen Vorlesung über die Galois'sche Theorie. Der erste ist bestimmt, dem Anfänger in leicht verständlicher Darstellung eine allgemeine Uebersicht zu geben, der zweite bringt eingehendere Begründungen und Ergänzungen, insbesondere den Nachweis, dass jede von der Galois'schen Theorie verlangte Operation in einer endlichen Anzahl von Schritten wirklich vollzogen werden kann. Fernerhin werden irrationale Resolventen eingeführt, d. h. solche, deren Wurzeln sich nicht rational in den Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen, und zur Lösung mehrerer bekannter Probleme benutzt. Die Darstellung steht unter dem Einflusse deutscher Mathematiker, insbesondere Kronecker's. F.

W. Dudensing. Ueber die durch eine allgemeine dreigliedrige algebraische Gleichung definirte Function und ihre Bedeutung für die Auflösung algebraischer Gleichungen von höherem als viertem Grade. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 56 S. gr. 8°.

In der Arbeit werden die Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung beliebigen Grades durch Potenzreihen dargestellt, ihre Convergenzbezirke aufgesucht und die beiden für verschieden grosse Werte der unabhängigen Veränderlichen gültigen Reihen in eine gemeinsame Form gebracht. Leider scheint dem Verf. die mathematische Litteratur der letzten Jahrzehnte nicht bekannt geworden zu sein, so dass er es noch für nötig hält, aufs lebhafteste für Ideen zu plaidiren, die jedem Mathematiker längst geläufig sind. Durch Einführung eines besonderen Symbols für die einer dreigliedrigen Gleichung genügende Function (die er übrigens als eine transcendente bezeichnet) glaubt er einen grossen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Gleichungen herbeizuführen und bezeichnet als „Höhepunkt" seiner Untersuchungen, als „höchst merkwürdiges Resultat" den Satz: „Soweit unsere gegenwärtige Kenntnis über die Auflösbarkeit, bezw. die Lösungsfunctionen algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade reicht, hängt der Grad der Schwierigkeit für die Auflösbarkeit derselben, bezw. die Complicirtheit der Lösungsfunction nicht, wie bisher stillschweigend angenommen, von dem Grade der aufzulösenden Gleichung, sondern von der Anzahl der Glieder derselben ab, also davon, ob ihre Auflösung auf höchstens binomische, höchstens trinomische, höchstens quadrinomische Gleichungen zurückgeführt werden kann." F.

O. Biermann. Ueber die näherungsweise Bestimmung der Lösungen mehrerer Gleichungen. Monatsh. f. Math. 11, 148-154.

Ist (α_0, β_0) ein Näherungswert einer Lösung des Gleichungssystems $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, und kann man einen Bereich angeben, in welchem sowohl dieser Näherungswert wie eine Lösung (x', y') liegt und in dem die Functionaldeterminante Δ von f, g ihr Vorzeichen nicht

wechselt, so handelt es sich um Aufsuchung von Functionen F, G derart, dass die nach einander zu bildenden Wertsysteme

$$\alpha_1 = F(\alpha_0, \beta_0), \qquad \beta_1 = G(\alpha_0, \beta_0),$$
$$\alpha_2 = F(\alpha_1, \beta_1), \qquad \beta_2 = G(\alpha_1, \beta_1) \text{ u. s. w.}$$

der Stelle (x', y') immer näher rücken und endlich mit ihr zusammenfallen. Die Untersuchung lehrt, dass es unendlich viele solcher Functionen F, G giebt, zu denen auch die Functionen

$$F(x,y) = x - \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad G(x,y) = y - \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{vmatrix}$$

gehören, welche die Verallgemeinerung der Newton'schen Methode darstellen, und die auch geometrischer Deutung fähig sind. Das algebraische Resultat lässt sich sofort auf n Gleichungen mit n Unbekannten ausdehnen. F.

A. Macfarlane. **Théorie de l'équation quadratique.** Ens. math. **2**, 363-369.

Um die Lösung der quadratischen Gleichung in den beiden Fällen einer positiven und einer negativen Discriminante gleichmässig zu gestalten, werden hyperbolische Functionen eingeführt (vergl. F. d. M. **28**, 97, 1897 und **29**, 76, 1898) und die Resultate geometrisch gedeutet. Auf seine Methode ist der Verf. gekommen bei der Lösung der Differentialgleichung, zu welcher man durch Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie auf die Entladung eines elektrischen Condensators geführt wird. F.

T. von Trotha. **Die kubische Gleichung und ihre Auflösung für reelle, imaginäre und complexe Wurzeln.** Berlin, W. Ernst u. Sohn. 61 S. 8°.

Eine Arbeit, über welche nicht leicht zu referiren ist. Ohne die vorhandene Litteratur zu berücksichtigen, sucht der Verf. durch lange, umständliche Rechnungen, die wegen der vielen eingeführten Bezeichnungen schwer zu übersehen sind, die Aufsuchung der Wurzeln auf die Benutzung von Tabellen zurückzuführen. Welchen Vorzug dieses Verfahren vor den bekannten Auflösungsmethoden haben soll, wenn auch alle Rechnungen richtig sind, hat Ref. nicht erkennen können. F.

G. Candido. **Piccole note.** Supplem. al Per. **3**, 113.

Die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ kann durch den Ansatz:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + y} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - y}$$

und Kubirung dieses Ausdrucks, sowie Identification des Resultates mit jener Gleichung bewirkt werden.

Eine zweite Bemerkung derselben Notiz wiederholt aus Mackay: Notice sur le journalisme mathématique en Angleterre (F. d. M. **25**, 11, 1893), dass die sogen. Euler'sche Dreiecksformel $R^2 - 2Rr = d^2$ von William Chappell 1745 in den Miscellanea Curiosa Mathematica, herausgegeben von Fr. Holliday, veröffentlicht ist. Lp.

L. Gegenbauer. Sur la théorie des équations algébriques et en particulier sur le cas irréductible de la formule de Cardan. Liége Mém. (3) **2**. 6 S.

Einfacher Beweis des folgenden Satzes: „In einem bestimmten reellen Rationalitätsbereiche kann eine Wurzel einer irreduciblen algebraischen Gleichung vom Primzahlgrade p nicht als ganze Function mit reellen Coefficienten von einer Wurzel einer anderen irreduciblen Gleichung desselben Grades ausgedrückt werden, welche demselben Rationalitätsbereiche angehört, und welche eine ungerade Anzahl conjugirt imaginärer Wurzelpaare mehr oder weniger als die erste hat". Verschiedene Zusätze, unter anderem der folgende: Der sogenannte casus irreducibilis bei den Gleichungen dritten Grades ist wirklich irreducibel. Mn. (Lp.)

E. Cesàro. Relazioni fra le radici dell'equazione cubica e quelle della sua derivata. Periodico di Mat. (2) **3**, 81-83.

In Nieuw Archief **15**, 140 hat van den Berg den Satz ausgesprochen: Die Wurzelpunkte der Ableitung einer Gleichung mit n verschiedenen Wurzeln sind die $n-1$ Brennpunkte einer Curve $(n-1)$ter Klasse, welche die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten des durch die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung bestimmten n-Ecks in ihren Mitten berührt (vergl. F. d. M. **20**, 75, 1888). In der vorliegenden Note wird dieser Satz für die kubische Gleichung $f(z) = 0$ in der Form bewiesen: Die Wurzeln von $f'(z) = 0$ sind die Brennpunkte der grössten Ellipse, die dem Dreiecke einbeschrieben ist, welches die Wurzeln von $f(z)$ zu Ecken hat. Zusätzliche geometrische Betrachtungen. Lp.

A. Del Re. Quistione 314. Periodico di Mat. (2) **2**, 166-167.

Die kubische Gleichung für ϱ:

$$\begin{vmatrix} \varrho-(\beta^2+\gamma^2) & \alpha\beta+2\gamma' & \gamma\alpha-2\beta' \\ \alpha\beta-2\gamma' & \varrho-(\gamma^2+\alpha^2) & \beta\gamma+2\alpha' \\ \gamma\alpha+2\beta' & \beta\gamma-2\alpha' & \varrho-(\alpha^2+\beta^2) \end{vmatrix} = 0$$

kann so geschrieben werden:

$$\varrho^3 - 2\,\omega^2\varrho^2 + (\omega^4 + 4\omega'^2)\,\varrho - 4\,\omega^2\omega'^2\sin^2\theta = 0,$$

wo gesetzt ist: $\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\omega'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$, $\omega\omega'\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$.

Die weitere Aussage, dass diese Gleichung eine einzige reelle, unter $\omega^2 \sin^2 \theta$ liegende Wurzel hat, ist, wie F. Castellano zeigt, unrichtig. Es können auch drei reelle Wurzeln von der besagten Eigenschaft auftreten. Lp.

J. Diekmann. Zur Lehre von den kubischen Gleichungen. Hoffmann Z. **31**, 81-92.

J. Diekmann. Zur Auflösung der biquadratischen Zahlengleichungen. Ibid., 512-516.

C. Frenzel. Vervollständigung der Lagrange'schen Lösung biquadratischer Zahlengleichungen. Ibid., 421-431.

Bemerkungen bezüglich der Methode bei dem Unterrichte auf Mittelschulen. Lp.

R. E. Gaines. A graphical method of deducing the criteria for the nature of the roots of cubic and quartic equations. Annals of Math. (2) **1**, 111-112.

Die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3+3Hx+G=0$ sind die Abscissen der Schnittpunkte der Curve $y=x^3$ und der Geraden $y=-3Hx-G$. Die von dem Punkte $(0, -G)$ an die Curve gezogene Tangente trennt die Geraden, welche die Curve einmal schneiden, von denen, die sie dreimal schneiden, so dass aus der Gleichung dieser Tangente sich leicht die Bedingung für die Existenz von drei oder von einer reellen Wurzel herleiten lässt. Ein ähnliches Verfahren ist auch auf die biquadratische Gleichung anwendbar. F.

H. Vogt. Réduction de la forme binaire biquadratique à la forme canonique. — Application de la réduction de la forme biquadratique à la résolution de l'équation du 4e degré. Revue de Math. spéc. **10**, 401-407, 425-431.

Die beiden kleinen Arbeiten haben den Zweck, zu zeigen, dass die Kenntnis der Hesse'schen Covariante allein ausreicht (gerade so wie in der Theorie der kubischen Formen), die biquadratischen Formen zu untersuchen, ihre Reduction auf die kanonische Form auszuführen, ihre Invarianten zu bestimmen und die Gleichung vierten Grades vollständig zu discutiren. Wbg.

G. Darbi. Sulle equazioni di 4° grado. Batt. G. **38**, 153-164.

Die Arbeit bringt zunächst eine neue Methode für die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung. Durch die Substitution $x=u+p\cdot z$ wird die vorgelegte Gleichung in x in eine andere für z übergeführt, die bei passender Wahl von u und p eine reciproke, also lösbar wird. u ist Wurzel einer kubischen Gleichung, und p lässt sich mittels einer Quadratwurzel durch u ausdrücken. Ausserdem sucht der

Verf. die Bedingungen dafür auf, dass alle Wurzeln einer irreducibIen Gleichung vierten Grades sich durch eine von ihnen rational ausdrücken lassen, insbesondere dafür, dass die Gleichung eine cyklische ist. F.

BEURIGER. Bemerkungen zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Zeitschr. f. Math. **45**, 341-344.

1. Eine Vorzeichenbestimmung für die von Heilermann (F. d. M. **30**, 103, 1899) angegebene Zerlegung einer ganzen Function vierten Grades in zwei quadratische Factoren.

2. Darstellung von Wurzeln der kubischen Resolvente durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung. F.

A. WEILL. Die geometrische Interpretation der Gleichung fünften Grades auf invariantentheoretischer Grundlage. Diss. J. Singer. Strassburg i/E. 60 S. 8°.

Die Bedingungen für die Realität der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades sind von Hermite, Sylvester und Cayley mittels der Fundamentalinvarianten der binären Form fünften Grades ausgedrückt worden. Die beiden letzteren Forscher haben die Bedingungen geometrisch interpretirt, indem sie die drei Fundamentalinvarianten (Sylvester), resp. drei Verbindungen derselben (Cayley) als Coordinaten eines Punktes im Raume auffassten und den Raum in drei Blöcke teilten, denen die Gleichungen mit einer oder drei oder fünf reellen Wurzeln entsprechen. Die vorliegende Dissertation entwickelt, von einer bestimmten Normalform ausgehend, die Hermite'schen Kriterien und macht sie durch Hinzuziehen derjenigen Function der Fundamentalinvarianten, die positiv sein muss, wenn den Invarianten eine Gleichung mit reellen Coefficienten entsprechen soll, für die geometrische Interpretation geeigneter. In dem besonderen Fall einer verschwindenden Discriminante führt der Verf. die Fundamentalinvarianten selbst als Coordinaten ein, im allgemeinen Falle die Cayley'schen Verbindungen derselben. F.

F. GLAGE. Anwendung der Gruppentheorie auf die irreduciblen Gleichungen vom sechsten Grade. Monatsh. f. Math. **11**, 155-169.

Von dieser Arbeit giebt der Verf. selbst die folgende Inhaltsübersicht: „Im § 1 werden zunächst die zwei umfassendsten auflösbaren transitiven Gruppen vom sechsten Grade angeführt; diese sind eine Gruppe 72. Ordnung mit zwei Systemen der Imprimitivität und eine Gruppe 48. Ordnung mit drei Systemen der Imprimitivität. Sodann werden sämtliche transitiven und mithin auch imprimitiven Untergruppen jener beiden umfassendsten Gruppen — 10 an der Zahl — angegeben,

die nach einem bekannten Satz der Algebra auch auflösbar sind, so dass also zwölf auflösbare transitive Gruppen sechsten Grades existiren. Im § 2 werden hierauf die verschiedenen Typen der auflösbaren Gleichungen sechsten Grades aufgestellt." F.

J. J. Bellankin. Ueber die binomische Gleichung 11ten Grades. Kiew Univ. No. 12. Bericht d. Phys.-Math. Ges. 4-8.

Einfache explicite Darstellung der Wurzeln der Gleichung $x^{11}-1=0$. Si.

W. Burnside. On cyclotomic trisection. Messenger 30, 101-102.

Verf. zeigt, wie das Problem der kubischen Kreisteilungskörper ohne den Gebrauch von Tabellen irgend welcher Art durch eine verhältnismässig kleine Anzahl von Versuchen vollständig gelöst werden kann. Wbg.

L. J. Rogers. Note on the quinquisectional equation. Lond. M. S. Proc. 32, 199-207.

Die Arbeit betrifft das Kreisteilungsproblem für den Fall einer Primzahl p von der Form $5\lambda+1$. Unter „Quinquisectional equation" wird die Gleichung 5. Grades verstanden, welcher die 5 Perioden von je λ Gliedern genügen. Unter Benutzung der von Tanner in seiner Arbeit „On the binomial equation $x^p-1=0$: Quinquisection" (Lond. M. S. Proc. 18, 214—234; F. d. M. 19, 85, 1887) abgeleiteten Formeln wird gezeigt, dass das 16fache jeder Primzahl der Form $5\lambda+1$ sich, und zwar nur auf eine einzige Art, in der Form darstellen lässt:

$$16p=a^2+125l^2+50(m^2+n^2),$$

wo a, l, m, n ganze Zahlen bedeuten, unter denen die Relation besteht

$$al=m^2-4mn-n^2.$$

Da die Coefficienten der Gleichung 5. Grades für die Perioden sich durch a, l, m, n ausdrücken lassen, so hat man sofort diese Gleichung für alle Primzahlen p, für welche die angegebene Darstellung durch Probiren oder auf einem anderen Wege gefunden ist. F.

G. Meslin. Sur une machine à résoudre les équations. C. R. 130, 888-891.

An einem Wagebalken sind mittels verschiebbarer Scharniere an starren Stangen Rotationskörper $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ mit verticaler Axe befestigt, die in eine darunter befindliche Flüssigkeit tauchen. Sie enden in Spitzen, die alle in derselben Horizontalebene liegen, und haben eine solche Form, dass das Volumen zwischen der Spitze und einer Horizontal-

ebene proportional der ersten, zweiten, ..., n-ten, ... Potenz des Abstandes von der Spitze ist. Soll die Gleichung

$$px^n + p_1 x^{n_1} + \cdots + p_a x^{n_a} = A$$

aufgelöst werden, so stelle man die Rotationskörper in Distanzen von dem Mittelpunkt des Wagebalkens ein, die den Coefficienten $p, p_1, \ldots, p_a$ proportional sind, und zwar nach rechts oder links, je nachdem sie positive oder negative Vorzeichen haben. Dann bringe man durch Auflegen von Gewichten die Wage ins Gleichgewicht. Hierauf werde in der Entfernung Eins vom Mittelpunkte das Gewicht A angebracht, rechts oder links, je nachdem A positiv oder negativ ist, und durch Einlassen von Flüssigkeit bewirkt, dass der Wagebalken wieder horizontal steht. Die Höhe der Wasserschicht, von den Spitzen ab gerechnet, giebt alsdann den Wert der Unbekannten x.

Der Verf. hat einen Apparat dieser Art construirt, der gestattet, für Gleichungen bis zum 4. Grade die Wurzeln zwischen 0 und 10 aufzufinden. Er hofft ihn so zu vervollkommnen, dass er die Wurzeln bis auf $^1/_{100}$ genau angiebt (vergl. auch R. Skutsch: „Ueber Gleichungswagen". Zeitschr. f. Math. **47,** 85-104, 1902). St.

F. Schilling. Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Leipzig: B. G. Teubner. 47 S. gr. 8°.

Ein Auszug aus dem ausführlichen Werke von d'Ocagne (F. d. M. **30,** 106, 1899), der einen grösseren Leserkreis in die Nomographie einzuführen bestimmt ist. F.

M. d'Ocagne. Sur quelques principes élémentaires de nomographie. Darboux Bull. **24,** 286-304.

M. d'Ocagne entwickelt nochmals, als Anwendung der Elemente der analytischen Geometrie, die Principien seiner Nomographie und ihren Gebrauch zur Auflösung algebraischer Gleichungen mit einer Unbekannten, indem er für die weitere Ausführung auf sein grösseres Werk (F. d. M. **30,** 106) verweist. F.

M. d'Ocagne. Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré. C. R. **131,** 522-524.

In einer Mitteilung auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris hat Hilbert unter anderem als eine Aufgabe, deren Lösung wünschenswert sei, den Nachweis bezeichnet, dass die Gleichung 7. Grades durch die nomographischen Methoden nicht gelöst werden könne. Die durch Transformation auf die Form

$$z^7 + \lambda z^3 + \mu z^2 + \nu z + 1 = 0$$

gebrachte Gleichung lässt sich aber, wie d'Ocagne hier ausführt, sehr wohl lösen, wenn man nur einen Rechenplan (Abacus) mit einer beweg-

lichen geraden Linie benutzt, der es gestattet, den durch eine Gleichung zwischen vier Grössen (λ, μ, ν, z) bedingten Zusammenhang graphisch darzustellen. F.

M. d'Ocagne. Sur l'application de la nomographie à la prédiction des occultations d'étoiles par la Lune. C. R. **130**, 554-556.

Auflösung der von Cruls (Rio de Janeiro, 1899) angegebenen Gleichungen zur Berechnung der Bedeckung eines Sterns durch den Mond nach den Methoden der Nomographie. F.

G. Pesci. Abbachi trigonometrici. Periodico di Mat. (2) **2**, 201-216.

G. Pesci. Costruzione elementare di due abbachi trigonometrici. Suppl. al Per. **3**, 81-86, 97-100.

Der Verf. erläutert den Teil der „Nomographie" von d'Ocagne, der von den alineirten Punkten mit zwei Coten handelt, und wendet diese Methode auf die Lösung mehrerer Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie an. Am Schlusse seines ersten Aufsatzes vergleicht er die rechnerische und die zeichnerische Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten und betont die Anregung, welche der Zeichner bei der nomographischen Auflösung erhält. Lp.

Weitere Litteratur.

J. Carnoy. Cours d'algèbre supérieure: principes de la théorie des déterminants; théorie des équations; introduction à la théorie des formes algébriques. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars.

G. Chrystal. Algebra. Elementary textbook. 2. edition. Part II. London. 632 S.

G. Ricci. Lezioni di algebra complementare. Padova-Verona: Drucker. XVII u. 466 S. 8°.

Bericht in Loria Bollettino **4**, 46-49, 1901. Vi.

J. M. Villafrañe y Viñals. Tratado de analisis matemática (algebra superior). 2. edición, corregida y aumentada. Barcelona. 996 S.

J. V. Collins. Note on Grassmann's proof that there can be but two kinds of lineal multiplication of two factors. American Assoc. **48**, 69-71.

J. V. Collins. An elementary exposition of Grassmann's „Ausdehnungslehre". Amer. Math. Monthly **6**, 261-266, 297-301; **7**, 31-35, 163-166, 181-187.

P. G. Tait. On the linear and vector function. Edinb. Proc. **24**, 547-549.

M. A. McGinnis. The universal solution for numerical and literal equations, by which roots of equations of all degrees can be expressed in terms of their coefficients. Kansas City: Mathematical Book Co; London: Sonnenschein. X + 295 S. 12mo.

A. Söderblom. Résolution numérique des équations algébriques. Göteborgs Vetensk. Handl. (4) **2**, 107-125 (1898).

A. Flechsenhaar. Ueber Multiplicität von Gleichungen. Diss. Giessen. 27 S. 8°.

R. F. Davis. Porismatic equations. Math. Gazette 1899/1900, 273-275.

A. Berger. Sur quelques relations entre les racines de certaines équations du troisième degré. Upsala Nova Acta (3) **18**, 14 S.

G. Krohs. Die algebraisch lösbaren irreduciblen Gleichungen fünften Grades. Teil I. Berlin. 4°.

K. Wilske. Zur Kreisteilung. Bromberg. 25 S. 8° (1899).

L. Moreau. Analyse ou nombre de solutions et fixations des racines remarquables de l'équation $a^x = x$. Bruxelles. 16 S. 8°.

H. Teege. Ueber die $\frac{1}{2}(p-1)$-gliedrigen Gauss'schen Perioden in der Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zu anderen Teilen der höheren Arithmetik. Diss. Kiel. 38 S. 8°.

L. Gegenbauer. Ueber die MacMahon'sche Verallgemeinerung der Newton-Girard'schen Formeln. Amst. Versl. **9**, 332-336.

Kapitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

H. Andoyer. Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. Tome I. Paris: Gauthier-Villars. VI + 508 S. 8°.

So zahlreich die Lehrbücher-Litteratur über Invariantentheorie ist, so fehlte es doch noch an einem Werke, das den verschiedenen Zweigen der Formentheorie, wie ihren geometrischen Anwendungen gleichmässig gerecht wird. Abgesehen von den Clebsch-Lindemann'schen Vorlesungen, die einen viel weiter gehenden Zweck verfolgen, macht sich in den formentheoretischen Lehrbüchern und Abhandlungen in den letzten Jahrzehnten das Bestreben nach immer grösserer algebraischer Abstraction geltend, während die Geometrie in gleichem Masse zurücktritt. Man könnte aber behaupten, dass gerade dadurch die Invariantentheorie, je systematischer sie auf der einen Seite ausgebildet wurde, um so mehr an allgemeinerem Interesse eingebüsst hat.

Der Hauptreiz, den diese Theorie in ihren ersten Entwickelungsstadien auf eine Reihe der hervorragendsten Mathematiker und weite mathematische Kreise überhaupt ausübte, bestand doch wohl in der Er-

öffnung der Aussicht, dass die höhere Geometrie, in erster Linie die projective, in dem Algorithmus jener Theorie ihren adäquaten und daher fruchtbaren Ausdruck finden würde.

Von dem zu besprechenden Werke behandelt der erste vorliegende Band in zwei Büchern das binäre und ternäre Gebiet, während ein zweiter Band dem quaternären Gebiet gewidmet werden soll.

Der Ref. kann zuvörderst nicht umhin, dem Bedauern Ausdruck zu geben, dass der Verf., vermutlich aus didaktischen Gründen, die ganze Theorie der vollen Systeme, bis auf specielle Fälle, ausscheiden zu müssen geglaubt hat. Wenn diese Theorie auch zum Teil über einen elementaren Standpunkt hinausgeht, so besteht doch wohl kein Zweifel, dass sie erst, vor allem durch die abschliessenden klassischen Untersuchungen von Hilbert, die Formentheorie überhaupt zum Range einer Wissenschaft erhoben hat.

Die Grundlage des ersten Buches bildet eine allgemeine Theorie der Invarianten binärer Systeme.

An Allgemeinheit lässt diese Grundlage nicht viel zu wünschen übrig, und man kann Andoyer nur Glück wünschen zu Hörern, denen ein so hoher Standpunkt keine wesentlichen Schwierigkeiten bereitet. Wenn er aber gleich zu Beginn den Inhalt seiner „Leçons" als „Höhere analytische Geometrie" bezeichnet, so will das dem Ref. im Hinblick auf die vorwiegend formentheoretische Seite des Gegenstandes nicht recht zweckmässig erscheinen. Denn seine „Geometrie" geht doch über eine Reihe geometrischer Deutungen von grundlegenden Formenbildungen nicht hinaus.

Eine binäre Form wird gleich als eine solche mit m Reihen von Variabeln (x_1, x_2), (y_1, y_2), ... von den Ordnungen $p, q, \ldots$ eingeführt; in demselben Sinne auch der allgemeinste Begriff der Polare, während die linearen Substitutionen S, denen die Variabeln unterworfen werden, zunächst nur congruente sind, während gleichzeitig eine Reihe binärer Formen betrachtet wird.

Mit den ursprünglichen Variabeln werden zugleich ihre contragredienten verwendet: der Verf. bedient sich der Bezeichnung „Variable erster und zweiter Art". Die Gruppe der S wird nach Lie als eine endliche continuirliche (von 4 Parametern) erklärt.

Die S, deren Coefficienten $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ seien, induciren eine lineare, in den λ rationale Transformationsgruppe der Coefficienten e_i der Urformen: $e_i' = f_i(e, \lambda)$. Ausgehend von der Matrix der partiellen Ableitungen der f nach den λ, gelangt der Verf. zu den absoluten Invarianten und deren charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen: letztere werden ermittelt vermöge Zusammensetzung einer S aus vier Fundamentalsubstitutionen und Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze.

Von hier aus entwickelt sich, im Anschlusse an Aronhold, der Begriff der relativen Invarianten, die in gerade und schiefe zerfallen, nebst ihren fundamentalen Eigenschaften.

Der Begriff „Invariante“ deckt sich hierbei mit dem allgemeinen „Concomitante“ oder „Comitante“; in demselben Sinne werden auch die Seminvarianten behandelt, die aber als „seminvariante Functionen“ bezeichnet werden, sowie auch die mehrfachen Invarianten oder Combinanten.

Das zweite Kapitel bringt eine eingehendere Untersuchung der wichtigsten allgemeinen invariantiven Bildungen (Jacobi'sche, Hesse'sche Form u. a.) und invariantiven Differentiationsprocesse. Im dritten Kapitel finden diese Methoden ihre erste Anwendung auf lineare Systeme, im besonderen auf das Doppelverhältnis und die Darstellung der Invarianten einfach binärer Formen durch deren Wurzeln.

Von den Wurzeln ausgehend, entwickelt der Verf. die Hauptsätze über Resultanten und Discriminanten, wobei auch die Fälle mehrfacher gemeinsamer, resp. gleicher Wurzeln berücksichtigt werden. Die Wichtigkeit dieses Kapitels hätte wohl eine weitere Ausführung verdient, so bezüglich der charakteristischen Differentialgleichungen für Resultante und Discriminante, der Bézout'schen Darstellung der Resultante u. a. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die beiden folgenden Kapitel über die bilinearen und über quadratische Formen, für die bekanntlich eine ansehnliche Reihe schöner Anwendungen existirt.

Die nächsten Kapitel lassen endlich specielle Formen zu ihrem Rechte kommen, die binären Formen der ersten fünf Grade nebst ihrer kanonischen Darstellung, die lineo-quadratische und zweifach quadratische Form nebst Verallgemeinerungen, sowie zum Schluss einen sehr gedrängten Abriss der metrischen binären Geometrie.

Auf „typische“ Darstellungen wird nicht eingegangen, so dass u. a. auch die schönen Untersuchungen Hermite's über Gleichungen 5. Grades keine Stelle finden. Bedenkt man, dass der ganze den binären Formen gewidmete Abschnitt nicht mehr als 145 Seiten umfasst, von denen ein wesentlicher Teil auf ganz allgemeine Untersuchungen entfällt, — ohne dass doch etwa der Standpunkt Lie's zu seinem vollen Rechte kommt —, so drängt sich leicht die Meinung auf, dass in einem der Formentheorie gewidmeten grossen Handbuche die einfachen binären Formen als solche ziemlich stiefmütterlich behandelt sind (simultane Invarianten von solchen, sowie die Theorie der symbolischen Darstellung treten ganz zurück); der Leser erhält schwerlich eine Vorstellung davon, welche Rolle diese Gebilde, besonders hinsichtlich ihrer irrationalen Invarianten, heutzutage in den verschiedensten Disciplinen der Mathematik spielen.

Der zweite Hauptabschnitt ist, wie schon erwähnt, dem ternären Gebiet gewidmet, wobei gleich vorausgeschickt werden soll, dass hier den geometrischen Anwendungen ein erheblich breiterer Raum gewährt wird. Die ersten drei Kapitel bieten eine ersichtliche Analogie zu den entsprechenden der ersten Abschnitte dar; nach einer Zusammenstellung der allgemeinen Definitionen, Bildungen und Grundsätze werden die linearen Systeme studirt, sowie die Begriffe der Resultante und Discriminante mit ihren einfachsten Eigenschaften.

Hieran schliesst sich die formentheoretische Behandlung der singulären Elemente einer ebenen algebraischen Curve (Tangente, Polare, Doppelpunkt und Doppeltangente, Wende- und Rückkehrpunkt), die in einer auf Reihenentwickelungen der bezüglichen Formen begründeten Aufstellung der Plücker'schen Formeln ihren Abschluss findet.

Um den weiteren Entwickelungen, insbesondere den Erzeugungen ternärer Gebilde die erforderliche algebraische Grundlage zu geben, schickt der Verf. das Notwendigste über den Process der Elimination voraus, ohne dass neuere Gesichtspunkte (Kronecker, Perrin, Mertens) berücksichtigt werden. Dieselbe wird im Anschlusse an Bézout aus Identitäten von der Form $f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n = 0$ hergeleitet. Eine wichtige Anwendung ist u. a. die Frage nach dem geometrischen Ort der gemeinsamen Punkte von zwei Curvenscharen $f_1(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 0$, $f_2(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 0$, wo λ einen variablen Parameter bedeutet, und auf allgemeinere Fragen nach Enveloppen dieser Art.

Es zeigt sich hierbei der nahe Zusammenhang zwischen den ternären Formen mit einer und den binären Formen mit zwei Reihen von Variabeln.

Ein instructiver Specialfall wird durch die interessanten Beziehungen zwischen der Hesse'schen, Steiner'schen und Cayley'schen Curve geliefert.

Ein dankenswertes Kapitel, das später noch einmal aufgenommen wird, ist der bilinearen Form gewidmet und der Rolle, die sie in der geometrischen Theorie der Homographie, resp. Reciprocität, insbesondere im Falle zweier coincidenten Ebenen spielt, wobei die verschiedenen Ausnahmefälle genau untersucht werden.

Ausführlich wird sodann die quadratische Form durchgenommen; ein grosser Teil dieser überwiegend elementaren Entwickelungen bildet einen Bereich, der gewöhnlich der analytischen Geometrie zugewiesen wird. In ähnlichem Sinne, wenn auch die einfachsten simultanen Invarianten herangezogen werden, bewegt sich das Kapitel über ein System von zwei quadratischen Formen. Gelegentlich der Ausnahmefälle wäre eine erste Einführung der Elementarteiler wohl am Platze gewesen. Von Interesse ist ein Kapitel über das Schliessungsproblem.

Sehr kurz geraten ist ein Kapitel über das System von zwei bilinearen Formen und die quadratische ein-eindeutige Verwandtschaft.

Gerade diese Verwandtschaft, als die erste und wichtigste der höheren Verwandtschaften in der Ebene (man denke nur an deren zahlreiche Anwendungen auf die Theorie des Dreiecks, der algebraischen Curven u. a.), hätte ein eingehenderes Studium verdient.

Es folgt ein gleichfalls sehr gedrängtes Kapitel über ein Netz von Kegelschnitten. Etwas ausführlichere Behandlung finden die kubische Form nebst der trilinearen, sowie die biquadratische Form.

Anwendungen der Theorie auf die allgemeine und specielle metrische Geometrie beschliessen den ersten Band.

Wenn die Anlage des Ganzen eine gewisse Aehnlichkeit mit den Clebsch-Lindemann'schen Vorlesungen über Geometrie aufweist, so

ist doch nicht zu verkennen, dass die Grundlagen des letzteren Werkes (ganz abgesehen von den höheren Partien über Abel'sche Integrale u. s. f.) ungleich tiefer sind. Das zeigt sich schon darin, dass der Standpunkt der nicht-euklidischen Geometrie im vorliegenden Werke ganz bei Seite gelassen ist. Die nahezu gänzliche Verzichtleistung auf Anführung von Autorennamen ist nicht gerade nachahmenswert; nicht einmal ein Hinweis auf den grossen Bericht des Referenten, bezw. auf den betreffenden Artikel der Encyklopädie ist gegeben worden.

Im übrigen soll gern anerkannt werden, dass das Buch auch viele Vorzüge besitzt, dass insbesondere die Darstellung eine schöne und abgerundete ist. My.

P. Gordan. Les invariants des formes binaires. Journ. de Math. (5) 6, 141-156.

Der Verf. hat, wie man weiss, die Endlichkeit des binären Formensystems bewiesen, und Hilbert den entsprechenden Satz für n Variabeln. Hier wird auf combinatorischem Wege ein umfassenderer Satz hergeleitet.

Es kann sich im folgenden nur darum handeln, einige der dem Satze und dessen Beweise zu Grunde liegenden Begriffe anzuführen.

Aus den Producten $T = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ wird ein „System S“ gebildet, indem man die Exponenten k gewissen Relationen $\theta_1, \theta_2, \dots$ unterwirft. So definirt die Bedingung $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$ das System $x_1^3, x_1^6, x_1^9, \dots$; ferner die Bedingung $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}$ das System x_1^3, $x_1^4 x_2^2$, $x_3^7 x_4^2, \dots$; endlich die Bedingungen

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3},$$
$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

das System $x_1^2 x_2$, $x_1 x_3 x_4^4$, $x_1 x_3^2 x_4^3, \dots$

Lässt man von den Producten T eines Systems S diejenigen weg, die durch andere desselben Systems teilbar sind, so reducirt sich S auf ein „Elementarsystem Σ“, das nur noch aus Producten $P_1, P_2, \dots$ besteht.

So reducirt sich im ersten Beispiele S auf $\Sigma = x_1^3$; im zweiten Beispiele S auf $\Sigma = x_1^3, x_1^2 x_2$, $x_1^2 x_3$, $x_1^2 x_4$, $x_1 x_2^2$, $x_1 x_2 x_3$, $x_1 x_2 x_4$, $x_1 x_3^2$, $x_1 x_3 x_4$, $x_1 x_4^2$, x_2^3, $x_2^2 x_3$, $x_2^2 x_4$, $x_2 x_3^2$, $x_2 x_3 x_4$, $x_2 x_4^2$, x_3^3, $x_3^2 x_4$, $x_3 x_4^2$, x_4^3, also auf die Terme einer quaternären kubischen Form in der üblichen Anordnung, von der gesagt wird, dass sie dem Grade der Einfachheit nach erfolge: x_4^3 erscheint als der „einfachste“ Term, x_1^3 als der „zusammengesetzteste“.

Das System Σ des dritten Beispiels geht aus dem eben angeführten dadurch hervor, dass man die dritten Potenzen der einzelnen x streicht. Die Anzahl der Producte P in Σ wird „Index“ von Σ genannt und mit h_n bezeichnet, bei mehreren Systemen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ entsprechend mit $h_{n,1}, h_{n,2}, h_{n,3}, \dots$. In den obigen drei Beispielen

sind die Indices $h_1 = 1$, $h_4 = 20$, $h_4 = 16$. Gehört das Product $P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ dem Systeme Σ an, so kann man der Reihe nach die Partialsysteme bilden:

$L_0 = P_1$, $L_1 = x_1^g Q (g \leqq \lambda_1)$, $L_2 = x_2^{g-\lambda_1} Q (\lambda_1 < g \leqq \lambda_1 + \lambda_2)$ etc. bis zu L_g, deren Anzahl $1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 + \varrho$ ist.

So gehören zu dem zweiten der obigen drei Systeme Σ in Bezug auf $P_1 = x_1^3$ successive die Partialsysteme, deren Producte resp. den Factor x_1^3, x_1^2, x_1 haben, während die des letzten Systems L_4 x_1 gar nicht enthalten.

Gehört das Product $P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ dem Systeme Σ an, und fällt P nicht zusammen mit $P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$, so ist wenigstens ein Exponent $k_\sigma < \lambda_\sigma$, und P ist im System L_g enthalten, wo

$$k_\sigma = g - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{\sigma-1}.$$

In dem System L_g, das notwendig von der Gestalt ist:

$$x_\sigma^r Q_1, \; x_\sigma^r Q_2, \; x_\sigma^r Q_3, \dots,$$

bilden die Factoren $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ im System Σ_g, das nur noch $n-1$ Variabeln aufweist: Σ_g „correspondirt" dem Systeme L_g.

Hieraus folgt als erster Endlichkeitssatz, dass die Indices der Elementarsysteme endliche Zahlen sind; denn $h_1 \leqq 1$ ist endlich.

Die vorstehenden Betrachtungen werden nunmehr auf die Terme $P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ einer homogenen Function f der x angewandt. Ist P_1 der erste, also „complicirteste" Term, so setze man $f = c_1 P_1 + \chi$; dann sind die Terme von χ einfacher als P_1.

Die homogenen Functionen $f_1, f_2, \dots$ werden in umgekehrter Weise angeordnet wie die Terme einer solchen. Die f_i werden ihrem Grade nach geordnet, mit den untersten Graden beginnend; Formen desselben Grades werden nach ihren ersten Termen geordnet, so dass die mit den einfachsten ersten Termen vorangehen.

Sind die Coefficienten von Formen f_i an Relationen $Q_1, Q_2, \dots$ gebunden, so bilden die entsprechenden f_i selbst ein System S; ein solches System S heisst „einfach", wenn es die f_i sind.

Aus einem solchen Systeme S von f_i lassen sich Systeme η von (homogenen) Formen „ableiten" von der Gestalt:

$$\eta_1 = f_1, \quad \eta_2 = A_{21} f_1 + f_2, \quad \eta_3 = A_{31} f_1 + A_{32} f_2 + f_3 \text{ etc.}$$

Diese abgeleiteten Systeme lassen sich einem Reductionsprocesse unterwerfen. So gelangt man schliesslich zu einem „irreduciblen" Systeme $N = f_1, f_2, \dots$, dessen erste Terme ein System Σ bilden. Ist h der Index von Σ, so enthält N gerade h Formen. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Hilbert'sche Satz, indem jede Form f als Aggregat der h Formen von N erscheint.

Wendet man das Ergebnis auf die Invarianten i einer binären Form f an, so bilden dieselben ein Elementarsystem, dessen Relationen

$\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ durch die Differentialgleichungen der i geliefert werden, und irgend eine Invariante i von f erscheint in der Gestalt:

$$i = c_1 i_1 + c_2 i_2 + \cdots + c_h i_h.$$

Unterwirft man f einer linearen Substitution der Variabeln mit der Determinante Δ, so hat man

$$\Delta^\nu i = C_1 \Delta^{\nu_1} i_1 + C_2 \Delta^{\nu_2} i_2 + \cdots + C_h \Delta^{\nu_h} i_h,$$

wo die C nunmehr Formen der transformirten Coefficienten von f sind. Auf diese C wird die „Gordan'sche Reihenentwickelung" angewandt, so erhält man $\Delta^\nu = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_h i_h$. Hieraus geht ohne weiteres die Darstellung von i als ganzer rationaler Function der $i_1, i_2, \ldots, i_h$ hervor.

Man vergleiche noch den Auszug aus der vorliegenden Abhandlung, über den in F. d. M. **30**, 113, 1899 berichtet ist. My.

E. P. Elliott. Notes on concomitants of binary quantics. Lond. M. S. Proc. **32**, 213-239.

Der Verf. hebt hervor, dass man sich bisher im binären Gebiete zu sehr habe von der Thatsache bestimmen lassen, dass sich die contragredienten Variabeln von den cogredienten nur unwesentlich unterscheiden und demnach in praxi die Untersuchung der Covarianten (und Invarianten) genügte. Bedenkt man aber, welche Wichtigkeit im ternären Gebiet die Leitglieder der (sowohl die x wie die u enthaltenden) Comitanten besitzen, und dass diese Leitglieder Invarianten eines gewissen binären Systems sind, so wird man zu der Frage geführt: Bildet man analog im binären Gebiet das System aller die x_1, x_2 wie die u_1, u_2 enthaltenden Comitanten, durch welche Bedingungen lassen sich deren Leitglieder, als Formen der Coefficienten a einer Grundform $n$ter Ordnung betrachtet, charakterisiren?

Es ergiebt sich das bemerkenswerte und fruchtbare Resultat, dass ein solches Leitglied, bis auf eine selbstverständliche Gewichtsbedingung, eine ganz willkürliche Form der a sein darf. Es wird hierdurch Licht verbreitet über die bekannte Erscheinung, dass die Gesamtanzahl der Seminvarianten eines Grades i von f übereinstimmt mit der Anzahl der Terme einer beliebigen Form der a vom Grade i und dem zugehörigen Gewichte ($\frac{1}{2} ip$, resp. $\frac{1}{2}(ip-1)$). Eine derartige Form lässt sich nämlich durch wiederholte Differentiationsprocesse in Teile zerlegen, die Coefficienten der Covarianten sind, welche jene Seminvarianten zu Leitgliedern besitzen. Die fraglichen Teile lassen sich aber auch durch einen rein algebraischen Process erzeugen.

Die in Rede stehenden Sätze werden aus einem einfachen Systeme von Differentialoperatoren hergeleitet, von denen der eine Teil die charakteristischen Differentialgleichungen der Comitanten von f liefert, während der andere eine solche Comitante bis auf einen constanten Factor reproducirt.

My.

T. Cazzaniga. Due teoremi nella teoria delle forme. Batt. G. 88, 321-336.

Brioschi (F. d. M. **26**, 115, 1895; **27**, 89, 1896) hat ohne Beweis einige Sätze über die In- und Covarianten von reduciblen Formen ausgesprochen. Der Verf. beweist und erweitert dieselben und deckt die Stellung auf, die sie innerhalb des Ganzen einnehmen.

Sei $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, wo

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i}, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} b_i x^{n-i},$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} \binom{n_2}{i} c_i x^{n-i}, \quad n = n_1 + n_2.$$

Dann ist offenbar

$$\binom{n}{h} a_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{h-i} b_i c_{h-i}.$$

Hieraus folgt aber die fundamentale Identität:

$$\text{(I)} \qquad h a_{h-1} = \sum_{s=1}^{h} \left(s b_{s-1} \frac{\partial a_h}{\partial b_s} + c_{s-1} \frac{\partial a_h}{\partial c_s} \right),$$

die leicht auf den Fall ausdehnbar ist, dass f in mehr als zwei Factoren zerfällt.

Mit Hülfe von (I) lässt sich der erste (übrigens auch direct leicht ableitbare) Hauptsatz beweisen: „Jede Invariante J von f vom Grade g und Gewichte p ist eine Simultaninvariante von f_1 und f_2 vom Gewichte p und vom Grade g in den Coefficienten jedes Factors."

In der That liefert die Identität (I) die Erfüllung der erforderlichen Differentialgleichungen für J.

Der entsprechende Satz gilt für eine Covariante von f, und beide Sätze sind auf Formen f ausdehnbar, die in mehr als zwei Factoren zerfallen.

Lässt man insbesondere f in lauter lineare Factoren zerfallen, so gelangt man einmal zu der üblichen symbolischen Darstellung einer Invariante J von f, andererseits zu ihrer realen Darstellung in den Wurzeln von f, ebenso auch zu den beiderseitigen Differentialgleichungen für J. Eine andere fruchtbare Specialisirung tritt ein, wenn f_1 die Potenz einer Linearform ist, und man erhält: „Irgend eine Invariante von

$$f(x) = m_0 (x-y)^r f_{n-r}(x) \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

vom Grade g und Gewichte p ist eine Covariante der Ordnung rg, vom Grade g und Gewichte p der Form $f_{n-r}(y)$ oder auch von $f^{(r)}(y)$." Die Verallgemeinerung, dass f die Wurzeln $y_1, \dots, y_i$ von der resp. Vielfachheit $r_1, \dots, r_i$ besitzt, ist ersichtlich.

Analoge Sätze lassen sich aufstellen für mehrere Formen f, die gemeinsame Factoren besitzen. Die Fragestellung lässt sich auch einem Umkehrungsprocesse unterwerfen. My.

A. Bassi. **Sulla determinazione di alcuni coefficienti numerici di un sviluppo nella teoria delle forme.** Periodico di Mat. (2) **8**, 121-125.

Ist f eine Function zweier Variabeln $x\,(x_1, x_2)$ und $y\,(y_1, y_2)$, homogen und vom Grade m in x_1, x_2, n in y_1, y_2, und giebt man den Symbolen Δ, D, Ω die üblichen Bedeutungen, so besteht die Gleichung

$$f = \Delta^n D^n f + \alpha_1^{(n)}(xy)\Delta^{n-1}D^{n-1}\Omega f + \alpha_2^{(n)}(xy)^2\Delta^{n-2}D^{n-2}\Omega^2 f + \cdots + \alpha_n^{(n)}\Omega^n f,$$

in der die $\alpha_\lambda^{(n)}$ Zahlencoefficienten bezeichnen, die schon von Clebsch bestimmt sind. Der Verf. gelangt zu den Werten derselben ohne Benutzung der Theorie der Formen durch alleinige Zuhülfenahme algebraischer Mittel. Lp.

L. Ripert. **Sur les propriétés générales des formes quadratiques.** S. M. F. Bull. **28**, 56-58.

Aufstellung gewisser Identitäten zwischen einer quadratischen Form, ihrer adjungirten Form und ihrer Discriminante. Wbg.

A. Young. **The invariant syzygies of lowest degree for any number of quartics.** Lond. M. S. Proc. **32**, 384-404.

In einer voraufgehenden Arbeit (F. d. M. **30**, 118, 1899) hat der Verf. für irgend eine Anzahl von biquadratischen binären Formen f das irreducible System von Typen aufgestellt. Zur Reduction dienten dabei gewisse Gleichungen zwischen Formen derselben Ordnung und desselben Grades. Diese Relationen führen unmittelbar zu den gewünschten Invarianten-Syzygien, die bis zum Grade 7 incl. untersucht werden. Für einen Grad < 7 existirt noch keine solche Syzygie. Für den Grad 7 lässt sich dagegen eine Fundamental-Syzygie aufstellen (die erst bei mehr als zwei Grundformen existirt), aus der mit Hülfe von Differentiationsprocessen Syzygien höheren Grades zwischen Invarianten, sowie Syzygien zwischen Covarianten hervorgehen.

Es zeigt sich als vorteilhaft, eine Form f symbolisch als Quadrat einer quadratischen Form anzusetzen. My.

V. Jamet. **Sur les invariants de la forme biquadratique binaire.** Nouv. Ann. (3) **19**, 419-427.

Ist $f = 0$ eine biquadratische Gleichung mit dem ersten Coefficienten a, und sind x_1, x_2, x_3, x_4 ihre Wurzeln, so sind bekanntlich

$$h_1 = x_1x_2 + x_3x_4,\quad h_2 = x_1x_3 + x_2x_4,\quad h_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

die Wurzeln der Ferrari'schen Resolvente. Indem der Verf. f als ein Product von zwei quadratischen Formen ansetzt, erhält er durch explicite

Ausrechnung die Invarianten von f, sowie die Gleichung für die sechs Doppelverhältnisse der x, ausgedrückt durch die h. So ist, bis auf eine Potenz von a, die Invariante i zweiten Grades von f gleich $(h_1-h_2)^2+(h_2-h_3)^2+(h_3-h_1)^2$. My.

E. Ciani. Un teorema sopra il covariante S della quartica piana. Palermo Rend. **14**, 16-21.

Clebsch versteht unter der Covariante S einer ternären biquadratischen Form f diejenige, deren Verschwinden den Ort der Punkte anzeigt, deren kubische Polaren bez. $f=0$ aequianharmonisch sind. Bei der bekannten, von Klein (F. d. M. **11**, 297, 1879) zuerst untersuchten $f=x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1=0$, die eine endliche Gruppe von 168 Collineationen in sich zulässt, fallen f und S zusammen. Der Verf. zeigt, indem er von kanonischen Gestalten der f ausgeht, dass ausser der Klein'schen Curve 4. Ordnung nur noch ein Doppelkegelschnitt die fragliche Eigenschaft besitzt, dass f und S coincidiren. My.

A. Boulanger. Détermination d'invariants attachés au groupe G_{168} de M. Klein. C. R. **130**, 107-109.

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit (F. d. M. **27**, 78, 1896) für die endliche Hesse'sche ternäre Gruppe G_{216} ein gewisses geschlossenes System von vier Fundamentalinvarianten explicite berechnet als rationale Functionen zweier Parameter. Die Resultate einer analogen Rechnung werden hier für die Klein'sche ternäre Gruppe G_{168} mitgeteilt, deren 168 Substitutionen durch Zusammensetzung und Wiederholung dreier Fundamentalsubstitutionen erzeugbar sind. Mit Hülfe dieser vier Invarianten lassen sich gewisse Systeme linearer (Monge'scher) partieller Differentialgleichungen algebraisch integriren. My.

T. J. I'A. Bromwich. An algebraic identity with two geometrical applications. Messenger **29**, 184-191.

Sind die beiden Variablensysteme (xyz), $(x_0y_0z_0)$ durch die Relationen

$$S\equiv(abcfgh)(xyz)^2=0,$$
$$T\equiv(abcfgh)(xyz)(x_0y_0z_0)=0$$

mit einander verbunden, so lautet die fragliche Identität

$$\frac{ax+hy+gz}{yz_0-y_0z}=\frac{hx+by+fz}{zx_0-z_0x}=\frac{gx+fy+cz}{xy_0-x_0y}=\left(-\frac{\Delta}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo Δ die Discriminante von S und $S_0=S(x_0y_0z_0)$ ist. 1. Anwendung: Bestimmung des Krümmungsradius in homogenen Coordinaten, wenn die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten gegeben ist. 2. Anwendung:

Die Bedingung dafür, dass eine Linie die Erzeugende einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ist. Wbg.

T. J. I'A. BROMWICH. Correction of an error in a former paper. Messenger **30**, 34.

Verf. berichtigt einen Fehler in dem ersten Beweise der von ihm (Messenger **29**, 184) aufgestellten algebraischen Identität. Wbg.

T. J. I'A. BROMWICH. The conditions that a quadric may be of one sign. Messenger **30**, 31-34.

Nanson hat (Messenger **25**; F. d. M. **27**, 226ff., 1896) Bedingungen dafür angegeben, dass eine quadratische Form von n Variabeln immer dasselbe Vorzeichen hat, wenn die Variabeln durch gewisse lineare Relationen verknüpft sind. Verf. behandelt dasselbe, übrigens bereits von Gundelfinger (J. für Math. **91**, 221, 1881) erledigte Problem mittels einer Methode von Darboux (Journ. de Math. (2) **19**, 347ff., 1874). Wbg.

E. J. NANSON. Theorem relating to a quadratic expression. Messenger **30**, 61-65.

Das fragliche Theorem ist eine Erweiterung der von Bromwich (Messenger **29**, 184) gegebenen „algebraischen Identität" und lautet folgendermassen: Wenn $n-1$ Systeme von n Variabeln

$$x, x', x'', \dots, x^{(n-2)}$$

durch die quadratische Relation $S \equiv \Sigma_{pq}\, a_{pq}\, x_p\, x_q = 0$ und die $n-2$ linearen Gleichungen $\Sigma_{pq}\, a_{pq}\, x_p\, x_q^{(r)} = 0$ verknüpft sind, so ist

$$\frac{S_1}{X_1} = \frac{S_2}{X_2} = \dots = \frac{S_n}{X_n} = \left(-\frac{\varDelta}{|S_{rs}|}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \begin{pmatrix} p, q = 1, 2, \dots, n \\ r, s = 1, 2, \dots, n-2 \end{pmatrix},$$

wo $S_p = \Sigma_p\, a_{pq}\, x_q$, $S_{rs} = \Sigma_{pq}\, a_{pq}\, x_p^{(r)} x_q^{(s)}$, $\varDelta = |a_{pq}|$ und X_p der Factor von $x_p^{(n-1)}$ in der Determinante $(x_1, x_2', x_3', \dots, x_n^{(n-1)})$ ist. Wbg.

L. KOLLROS. Sur les formes bilinéaires ternaires d'Hermite. C. R. **131**, 173-175.

Eine definite und positive Hermite'sche Form:

$$f(x, y, z;\, x_0, y_0, z_0) = a_{11}\, x x_0 + a_{22}\, y y_0 + a_{33}\, z z_0$$
$$+ a_{12}\, x y_0 + a_{21}\, y x_0 + a_{13}\, x z_0 + a_{31}\, z x_0 + a_{23}\, y z_0 + a_{32}\, z y_0$$

sei vorgelegt, mit conjugirt-complexen Coefficienten und Variabeln. Setzt man dementsprechend:

$$a_{12}=b_{12}+ic_{12},\ a_{23}=b_{23}+ic_{23},\ a_{31}=b_{31}+ic_{31},$$
$$x=x_1+iy_1,\ y=x_2+iy_2,\ z=x_3+iy_3,$$

so erscheint f in der reellen Gestalt:

$$f=a_{11}(x_1^2+y_1^2)+\cdots+2b_{12}(x_1x_2+y_1y_2)+2c_{12}(x_1y_2-y_1x_2) \text{ etc.}$$

Durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ geht die Matrix der a über in die transponirte, f in die „correspondirende" Form. Auf Grund eines bekannten Reductions-Verfahrens von Hermite lässt sich von zwei correspondirenden Formen f stets die eine vermöge einer linearen Substitution der x, y, z mit ganzen complexen Coefficienten und der Determinante ± 1, resp. $\pm i$ auf einen von zwei reducirten Typen bringen, und zwar im allgemeinen nur auf eine einzige Art. My.

H. E. Timerding. Ueber die Reduction einer quadratischen Function. J. für Math. **122**, 172-178.

Die bekannte Discussion und Reduction der Gleichung eines Kegelschnitts, bezw. einer Fläche zweiter Ordnung in cartesischen Coordinaten wird hier auf n Variabeln ausgedehnt.

Es sei $f=f_2+f_1+f_0$ eine nicht homogene Function zweiter Ordnung der n Variabeln x, und f_2, f_1, f_0 resp. der quadratische Teil, der lineare Teil und die Constante. Sei ferner $\varDelta$ die Determinante von f, D die als „Discriminante" von f bezeichnete Determinante von f_2. Dann sind für die Reduction von f durch eine orthogonale Substitution S der x auf Grund bekannter, bezw. leicht beweisbarer Hülfssätze folgende vier Fälle zu unterscheiden:

I. $\varDelta$ und $D \neq 0$. Durch eine bestimmte S kann f auf die Form:

$$f=\sum_1^n G_\mu x_\mu^2+G$$

gebracht werden.

II. $\varDelta$ verschwindet mit allen $p$ten Minoren, ohne dass alle $p$ten Minoren von D verschwinden, dann geht f durch eine S über in:

$$f=\sum_1^{n-p} G_\mu x_\mu^2.$$

III. $\varDelta$ und D verschwinden mit allen $p$ten Minoren. Dann ist f vermöge einer S auf die Form:

$$f=\sum_1^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2+G$$

reducirbar.

IV. Es verschwinden alle $p$ten Minoren von D, nicht aber von $\varDelta$. Dann ist f vermöge einer S auf die Form:

$$f = \sum_1^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + G_{n-p} x_{n-p}$$

reducirbar.

Man vergl. übrigens die verwandten Untersuchungen von Hensel (F. d. M. **25**, 188, 1897). My.

V. Jamet. Sur la théorie des formes quadratiques. Marseille Ann. **10**, 127-144.

Die Reduction von zwei quadratischen Formen a_x^2, b_x^2 in n Variabeln x auf Aggregate derselben Quadrate wird auf Grund der fundamentalen Identität: $a_x^2 a_\alpha^2 - a_{x\alpha}^2 \equiv F(x,\alpha)$ durchgeführt, wo die Discriminante der Form F bez. der x (und auch der α) verschwindet. Die Form F lässt sich daher durch eine lineare Substitution der Variabeln auf eine Form von nur $n-1$ Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ reduciren, am einfachsten, indem man nach Kronecker setzt:

$$x_1 = y_1 + \alpha_1 y_n,\; x_2 = y_2 + \alpha_2 y_n, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1} + \alpha_{n-1} y_n, \quad x_n = \alpha_n y_n.$$

Im übrigen schliesst sich die Entwickelung an eine von Darboux gegebene an (F. d. M. **6**, 68, 1874). My.

A. Loewy. Ueber Scharen reeller quadratischer und Hermite'scher Formen. J. für Math. **122**, 53-72.

A. Loewy. Ueber die Transformation einer Hermite'schen Form von nicht verschwindender Determinante in sich. Gött. Nachr. 1900, 298-302.

Besitzt nach den grundlegenden Untersuchungen von Weierstrass die Determinante einer reellen Schar quadratischer Formen F_2 einen complexen oder mehrfachen Elementarteiler, so enthält die Schar der F_2 keine definite Form. Von Gundelfinger (F. d. M. **8**, 498, 1876; **26**, 633, 1895) rührt eine Erweiterung des Satzes auf semidefinite F_2 her.

Gerade wie nun Klein (1868, vergl. F. d. M. **16**, 715, 1884) und Loewy (F. d. M. **29**, 94, 1898) gezeigt haben, dass der Weierstrass'sche Satz nur als das erste Glied einer ganzen Kette analoger Sätze erscheint, so beschäftigt sich der Verf. in der ersten Abhandlung mit einer analogen Ausdehnung des Gundelfinger'schen Satzes. Zu dem Behuf überträgt er zunächst den von ihm früher (F. d. M. **30**, 120, 1899) eingeführten Begriff der Charakteristik q' einer reellen F_2 auf den Fall einer verschwindenden Determinante. Eine reelle F_2 von n Variabeln lässt sich durch reelle lineare Substitutionen S, wie man weiss, auf die Gestalt $\sum_1^q \zeta_\alpha^2 - \sum_{q+1}^r \zeta_\alpha^2$ bringen, wobei r und q constant sind. r ist der Rang, q der Trägheitsindex der Form; $n-r=d$ wird als ihr „Defect" bezeichnet. Die kleinere der beiden Zahlen $q, r-q$ sei q';

dann heisst q' die „Charakteristik" von F_2 auch in dem nicht allgemeinen Falle, wo $d > 0$.

Es sei jetzt φ eine F_2 (Det. $\neq 0$), ψ dagegen eine ganz beliebige (reelle) F_2 mit der Charakteristik q'; dann genügen die Elementarteilerexponenten der reellen Schar $\varrho\varphi - \psi$ der Ungleichheit:

$$\text{(I)} \qquad q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hier ist s die Summe der Exponenten der für ein imaginäres ϱ verschwindenden Elementarteiler, h durchläuft die Exponenten der für ein reelles $\varrho \neq 0$ verschwindenden Elementarteiler, und h' hat die entsprechende Bedeutung für $\varrho = 0$.

Die Anzahl der letzteren Elementarteiler ist gleich dem Defect d von ψ, also unabhängig von φ.

Dieser Satz bildet die Grundlage des Ganzen. Er lässt sich auch in einer etwas allgemeineren Form aussprechen, wo die Schar der F_2 in der homogenen Form $\varrho\varphi - \sigma\psi$ angesetzt ist. Aus dem angeführten Hauptsatze folgt sofort, dass die Determinante $(\varrho\varphi - \psi)$ nicht mehr als q' Elementarteiler, die nicht ein- oder zweifach sind, besitzen kann. Ist die letzere Anzahl genau q', so sind diese q' Teiler drei- oder vierfach: dann hat $|\varrho\varphi - \psi| = 0$ nur reelle Wurzeln, und die zwei- und vierfachen Teiler gehören dann nur zu etwaigen Wurzeln $\varrho = 0$.

Für $q' = 0$ fliesst hieraus das eingangs erwähnte Gundelfinger'sche Theorem.

Von besonderem Interesse ist noch der Fall $q' = 1$. Ist umgekehrt ψ beliebig gegeben, so kann man stets Formen φ finden, so dass $|\varrho\varphi - \psi|$ vorgegebene Elementarteiler besitzt, nur dass letztere dem obigen Hauptsatze zu genügen haben. Hieraus gewinnt man eine Reihe weiterer Definitionen der Charakteristik q' von ψ, die von dem Begriff der Elementarteiler von $|\varrho\varphi - \psi|$ ihren Ausgang nehmen.

Diese Untersuchungen lassen sich auf Scharen Hermite'scher Formen ausdehnen. Wie der Verf. bemerkt, ist der Fall $q' = 0$ Weierstrass schon lange bekannt gewesen.

In der Note aus den Gött. Nachr. behandelt der Verf. einen besonderen Fall des Satzes über Hermite'sche Formen: Ist S eine Hermite-sche Form (Det. $\neq 0$) mit der Charakteristik q', X eine beliebige Hermite'sche Form, so reducirt sich die Ungleichheit (I) auf:

$$\text{(II)} \qquad q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right).$$

Dieser Satz erweist sich nun als äquivalent mit dem folgenden:

$$\text{(III)} \qquad q' \geqq s_1 + \Sigma E\left(\frac{h_1}{2}\right).$$

Führt nämlich eine lineare Substitution A (mit ihrer conjugirten) S in sich über, so bedeutet s_1 die Summe der Exponenten aller Elementarteiler der charakteristischen Function von A, die für Grössen $\neq \pm 1$ ver-

schwinden, und h_1 durchläuft die Exponenten der entsprechenden Elementarteiler, die für Grössen $= \pm 1$ verschwinden. My.

T. J. I'A. Bromwich. Note on Weiertrass' reduction of a family of bilinear forms. Lond. M. S. Proc. **32,** 158-163.

Weierstrass (F. d. M. **1,** 54, 1868) setzt bei seiner Reduction einer Schar $rA - B$ von Formen zweiter Ordnung zunächst voraus, dass keine der Determinanten $|A|$, $|B|$ verschwindet. Verschwindet aber eine der letzteren, so ersetzt er A und B durch geeignete lineare Combinationen.

Stickelberger (F. d. M. **10,** 77, 1878) zeigte, dass auch bei der ursprünglichen Schar $rA - B$ die Bedingung $|A| \neq 0$ unnötig sei, sofern es sich nur um die endlichen Wurzeln von $|rA - B| = 0$ handelt. Der Verf. schlägt ein Verfahren ein, das auch die unendlichen Wurzeln von $|rA - B| = 0$ berücksichtigt; es treten dann bei der Reduction gewisse Zusatzglieder auf, die den verschwindenden Wurzeln von $|A - sB| = 0$ entsprechen.

Das Charakteristische der Methode ist, dass zugleich mit der, nach Potenzen von r entwickelten, reciproken Form $(rA - B)^{-1}$ operirt wird. My.

T. J. I'A. Bromwich. Canonical reduction of linear substitutions and bilinear forms, with a dynamical application. Lond. M. S. Proc. **32,** 79-118.

T. J. I'A. Bromwich. On a canonical reduction of bilinear forms (part. II), with special consideration of congruent reductions. Lond. M. S. Proc. **32,** 321-352.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **30,** 122, 1899) hat der Verf. eine eigenartige Methode entwickelt, eine lineare Substitution auf ihre kanonische Form zu bringen; die Methode wird jetzt ausgedehnt auf den allgemeineren Fall von n linearen Gleichungen $(i = 1, 2, \dots, n)$:

$$\text{(I)} \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n = b_{i1} \xi_1 + b_{i2} \xi_2 + \cdots + b_{in} \xi_n.$$

Die Endformeln erscheinen als Verallgemeinerung von solchen, die Stickelberger gegeben hat (F. d. M. **10,** 77, 1878). Von besonderem Interesse sind dabei die Unterfälle $|B| = 0$ und $|A - \lambda B| \equiv 0$, wo A, B bilineare Formen bedeuten.

Eine Anwendung finden diese Untersuchungen auf das dynamische Problem der kleinen Schwingungen um einen Zustand gleichförmiger Bewegungen. Im dritten und letzten Abschnitt wird die simultane Reduction eines Paares bilinearer Formen behandelt.

Die Gleichungen (I) werden mittels unbestimmter Multiplicatoren w zusammengefasst in die eine:

$$\text{(II)} \qquad \sum a_{rs} w_r x_s = \sum b_{rs} w_r \xi_s,$$

oder kürzer: $A(w, x) = B(w, \xi)$.

Zunächst hat man sich die Elementarteiler der Determinante $|A-\lambda B|$ bereits bestimmt zu denken, wo $B=B(w,x)$. Ist $\lambda-c$ ein Factor von $|A-\lambda B|$, so wird die reciproke Form $(A-\lambda B)^{-1}$ nach Potenzen von $\lambda-c=t$ entwickelt. Ist e der erste Exponent von $\lambda-c$, so beginnt die Entwickelung mit der $(-e)$-ten Potenz von t:

$$(A-\lambda B)^{-1}=Dt^{-e}+P(t),$$

wo D eine bilineare Form ist, die höchstens die $(e-1)$-te Potenz von t aufweist, und die bilineare Form $P(t)$ keine negativen Potenzen von t enthält. Mit Hülfe der Einheitsform

$$E=\sum wx=(A-\lambda B)(A-\lambda B)^{-1}=(A-\lambda B)^{-1}(A-\lambda B)$$

ergiebt sich die Entwickelung:

$$DA(x)=DB(\xi)=\eta_1+\eta_2 t+\cdots+\eta_e t^{e-1},$$

wenn

$$DB(x)=y_1+y_2 t+\cdots+y_e t^{e-1}$$

gesetzt wird, und die η_i die nämlichen Functionen der ξ sind, wie die y_i der x; hieraus fliessen die Kronecker'schen Relationen:

$$\eta_1=cy_1,\quad \eta_2=cy_2+y_1,\ldots,\quad \eta_r=cy_r+y_{r-1}.$$

Betrachtet man hierin die w als Constanten, so kann man sich auf eine der beiden Variabelnreihen ξ, x beschränken. Der Ausdruck $(A-\lambda B)^{-1}B$ gestattet eine übersichtliche Darstellung als Determinante.

Die y lassen sich unmittelbar zu Grössen Y verallgemeinern, indem sie mit ein- und derselben beliebigen Potenzreihe $Q(t)$ multiplicirt werden. Die Y sind zugleich die bei Stickelberger auftretenden. Für $B=E$ ergeben sich Grössen $Y=z$, die von Burnside (F. d. M. **30**, 121, 1899) genauer untersucht sind. Behufs weiterer Reductionen führt der Verf. eine Hülfsform ein:

$$X_k=x_{n+1}W_1+\cdots+x_{n+k}W_k+w_{n+1}X_1+\cdots+w_{n+k}X_k,$$

wo die W, resp. X arbiträre lineare Formen der $w_1,\ldots,w_n$, resp. $x_1,\ldots,x_n$ sind.

Auch das Product $[A+X_k-(c+t)B]^{-1}X_k$ lässt sich in die Form einer durchsichtigen Determinante kleiden, und man gelangt zu analogen Entwickelungen, wie oben, die eine gewisse Verallgemeinerung Stickelberger'scher Formeln zulassen.

Einer eigenartigen Methode bedient sich der Verf., um die genaue Anzahl der willkürlichen Constanten in den n reducirten Gleichungen zu ermitteln. Die Behandlung des Ausnahmefalles $|A-\lambda B|\equiv 0$ zeigt eine gewisse Vereinfachung gegenüber der bekannten, von Kronecker eingeschlagenen, wenn auch im wesentlichen von denselben invarianten Zahlen Gebrauch gemacht wird.

Die Untersuchungen gestatten, das Problem der Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten auf die einfachste Form zu bringen.

Im besonderen beschäftigt sich der Verf. im zweiten Teile der Ab-

handlung mit dem dynamischen Problem der kleinen Schwingungen um einen Zustand gleichförmiger Bewegung, indem Hamilton's (statt Lagrange's) kanonische Bewegungsgleichungen zu Grunde gelegt werden. In einem derartigen Systeme mit n Freiheitsgraden seien $x_1, \ldots, x_n$ die Coordinaten des Systems, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die entsprechenden Momente, so sind die Hamilton'schen Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \qquad -\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

wo H die Summe der quadratischen Terme in der Hamilton'schen Function bedeutet. Ist nun K die symmetrische bilineare Form:

$$\Sigma y_r \frac{\partial H}{\partial x_r} + \Sigma \eta_r \frac{\partial H}{\partial \xi_r},$$

A die alternirende: $\sum (x_r \eta_r - y_r \xi_r)$, so wird gezeigt, wie sich die Form der Lösung der Aufgabe bestimmt durch die Elementarteiler von $|K - \lambda A|$.

Die Untersuchung berührt sich vielfach mit einer bekannten von Weierstrass von 1879 (F. d. M. **11**, 270, 1879), auf die der Verf. erst nachträglich aufmerksam wurde. Er hat indessen noch beiderlei Methoden einer näheren Vergleichung unterzogen. Ein wesentliches Moment bildet dabei der Umstand, dass die Wurzeln von $|K - \lambda A| = 0$ rein imaginär ausfallen, und dass die Elementarteiler höchstens den Exponenten 2 aufweisen.

Daraus lässt sich schliessen, dass die Ausdrücke für die Coordinaten x einfache harmonische Functionen der Zeit werden. Enthält H keine Terme von der Form $x_r \xi_s$, so tritt der Specialfall der kleinen Schwingungen um einen Gleichgewichtszustand ein.

Den dritten Teil bildet die kanonische Reduction eines Paares von bilinearen Formen. Da dieses Problem schon vielfach behandelt worden ist, können wir uns kurz fassen. Während gewöhnlich die Variabeln der reducirten Formen linear durch die Variabeln der gegebenen Formen ausgedrückt werden, schlägt der Verf. den umgekehrten Weg ein. Der Vorteil dieser Methode liegt weniger auf theoretischem, als auf praktischem Gebiet bei der wirklichen Berechnung der Endcoefficienten. Allerdings kann man dabei der Lösung einer Hülfsaufgabe nicht entraten, einige willkürliche Constanten so zu bestimmen, dass gewisse Formen verschwinden.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der kanonischen Reduction bilinearer Formen in dem engeren Sinne, dass entweder die Coefficienten der beiderlei Substitutionen dieselben sind (congruente Substitutionen), oder aber conjugirt-imaginär (Hermite'sche Substitutionen). Durch erstere wird insbesondere eine alternirende Form reducirt, sowie simultan eine symmetrische und eine alternirende Form. Sind A, C, ebenso wie B, D je zwei symmetrische oder aber zwei alternirende Formen, so lässt sich nach Frobenius eine Form R so bestimmen, dass $R'(\lambda A - B) R = \lambda C - D$; besitzen daher $|\lambda A - B|$ und

$|\lambda C - D|$ die nämlichen Elementarteiler, so kann man eine congruente Substitution finden, die $(\lambda A - B)$ in $(\lambda C - D)$ überführt. Diese Methode ist indessen auf die conjugirt-imaginären Substitutionen eines Paares Hermite'scher Formen nicht übertragbar. Der Verf. hat daher einen directen Process angegeben, der die Form R in beiderlei Fällen gleichmässig bestimmen lehrt.

Die reducirten Formen weisen interessante „automorphe" Eigenschaften auf, die von anderer Seite her Loewy aufgestellt hat (s. die betreffenden Referate), mit dem sich der Verf. des näheren auseinandersetzt. Die Methode des Verf. ist, wie in der ersten Abhandlung, wesentlich dadurch charakterisirt, dass er durchgehends mit der in eine Potenzreihe entwickelten reciproken Form $(\lambda A - B)^{-1}$, resp. mit $A(\lambda A - B)^{-1}A$ operirt.

Ein näheres Eingehen auf Einzelheiten muss hier unterbleiben, um das Referat nicht übermässig zu verlängern. Vielleicht ist es dem Ref. noch gestattet, auf einen äusserlichen Umstand hinzuweisen, der die Lectüre der vorliegenden, sonst so gediegenen Abhandlungen nicht unwesentlich erschwert. Bromwich verschmäht es grundsätzlich, seine Resultate oder auch nur die wichtigsten Termini durch den Druck hervorzuheben. Die Darstellungsweise von Loewy könnte ihm hierin als nachahmenswertes Muster hingestellt werden. My.

T. J. I'A. Bromwich. The classification of conics and quadrics. Cambr. Proc. **10,** 358-371.

P. Muth. Ueber die Elementarteiler componirter Systeme. (Nach einer brieflichen Mitteilung von K. Hensel.) J. für Math. **122,** 84-87.

Der rein arithmetische Beweis, den Hensel im J. für Math. **114,** 109 ff. (vergl. F. d. M. **25,** 222, 1894) für den Fundamentalsatz über die Elementarteiler componirter Systeme aus ganzen (oder gebrochenen) Grössen gegeben hat, bedarf noch einer Ergänzung für den Fall $p = 0$. Diese wird nach einer Angabe von Hensel selbst geliefert, indem gezeigt wird, dass der ϱ-te Elementarteiler des Systems

$$\mathfrak{R}' = \begin{Bmatrix} 0\ a_{12} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{Bmatrix} \text{ Vielfaches des } \varrho\text{-ten Elementarteilers des Systems } \quad \mathfrak{R} = \begin{Bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{Bmatrix}$$

ist, wo die a_{ik} ganze oder gebrochene Grössen eines Körpers von Zahlen der Functionen sind. T.

P. Muth. Ueber alternirende Formen. J. für Math. **122,** 89-96.

Kronecker hat in einer seiner letzten Arbeiten (F. d. M. **22,** 182, 1890) die Reduction einer ganzzahligen bilinearen Form $F'_{1,1}$ behandelt.

Er ordnet dabei die Transformationen der Form den Transformationen des Coefficientensystems $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ unter. Insbesondere verwendet er drei „Elementartransformationen“ von $\mathfrak{A}$; die erste besteht in der Multiplication einer Reihe von $\mathfrak{A}$ mit einer Constante, die zweite in einer Vertauschung zweier parallelen Reihen, die dritte in einer Combination beider Processe. Aehnliche einfachste Transformationen gelten, wenn man gleichzeitig mit Reihen und Spalten operirt. Bei allen diesen Transformationen bleiben die fundamentalen Anzahlen der $F_{1,1}$ invariant; insbesondere bleibt auch eine alternirende Form stets eine solche.

Indem der Verf. diese Methode auf die alternirenden $F_{1,1}$ anwendet, gelangt er zu dem Hauptsatze: „Die Elementarteiler eines alternirenden Systems $\mathfrak{A}$, das aus Grössen eines Zahlen-, resp. Functionenkörpers gebildet ist, treten stets paarweise auf.“ My.

S. Kantor. Theorie der Elementarteiler höherer Stufen. Monatsh. für Math. **11**, 193-286.

Der Verf. hat sich schon in einer früheren Abhandlung (F. d. M. **28**, 113, 1897) mit einem allgemeinen Aequivalenztheorem für die linearen ∞^λ-Scharen bilinearer Formen $F_{1,1}$ mittels geometrischer Methoden beschäftigt. Jene neue Auffassung führte ihn inzwischen zu einer Verallgemeinerung der Sylvester-Weierstrass'schen Elementarteiler, indem er die von Kronecker und Hilbert eingeführten Divisorensysteme höherer Stufe heranzog.

Die Theorie dieser neuen Elementarteiler wird hier auseinandergesetzt und zu einer algebraischen Formulirung und Begründung jenes Aequivalenztheorems benutzt. Die alten und die neuen Elementarteiler erscheinen als ein Corollar der Theorie der Singularitäten (singulären Punkte, Curven, Flächen etc.) auf den Mannigfaltigkeiten $M_{\sigma-1}$ der Dimension $\sigma - 1$ im Raume R_σ von σ Dimensionen, wobei die vielfachen Untersuchungen anderer Autoren über dieses Gebiet zur Verwendung gelangen. Welchen Wert der Verf. dieser Auffassung beilegt, erhellt z. B. aus den Worten: „Eminent algebraische Eigenschaften so spontan aus einfachsten geometrischen Theoremen herfolgen zu sehen, wie hier, ist wohl eine spärliche Erscheinung in der Mathematik“.

Umgekehrt dienen dann diese neuen Elementarteiler als wesentliche Hülfsmittel zu einer erschöpfenden Behandlung der Theorie der Singularitäten.

Eine weitere Verallgemeinerung der Elementarteiler besteht darin, dass sie auf allgemeine Functionensysteme als Substrat angewendet werden. Bei Weierstrass erscheinen die Elementarteiler als die wahren (irrationalen) Invarianten gegenüber linearen Substitutionen bei Determinanten. Der Verf. betrachtet die Determinante auf Grund ihres Multiplicationstheorems als eine specielle Form „zusammensetzbarer“ Functionen im Gauss'schen Sinne und geht von da zu allgemeineren Functionsformen über.

Die Determinante $|A| = |a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, eine zweifach alternirende Function von je n Elementenreihen, stellt im R_σ $(\sigma = n^2 - 1)$ eine Mannigfaltigkeit $M_{\sigma-1}^n = S^{(2)}$ dar.

Diese besitzt $n - 1$ stetig ausgedehnte singuläre Mannigfaltigkeiten $V_2, \ldots, V_{n-1}$ resp. $2, 3, \ldots, (n-1)$-fach. Die Verwandtschaft unter den Punkten des R_σ und ihren Polarmannigfaltigkeiten bez. $S^{(2)}$ ist eine birationale. Diese Verwandtschaft wird durch die zu $|A|$ gehörigen Laplace'schen Zerlegungssätze beherrscht.

Ein weiteres Hülfsmittel der Untersuchung bietet sich dar, indem die a_{ik} als Functionen von $\nu + 1$ homogenen Parametern betrachtet werden und so zu einer ν-dimensionalen Mannigfaltigkeit F_ν der R_σ führen. Diese dient zum Studium der Singularitäten der Minoren von $|A|$.

Die Theorie der Kronecker'schen Divisorensysteme wird in einen Zusammenhang gebracht mit dem Projiciren höherer Räume in niedrigere.

Weiterhin wird mit dem Begriff des „vollständigen Moduls“ operirt; ein solcher ist durch die gemeinsamen Wertesysteme bestimmt. Hat man also irgend eine Configuration von geometrischen Gebilden, jedes mit einer bestimmten Vielfachheit, — einen „Singularitäten-Complex“ —, so bilden alle Functionen, die in der Configuration mindestens jenen Singularitäten-Complex besitzen, einen vollständigen Modul. So bilden alle Minoren von $|A|$ einen vollständigen Modul. Es wird besonders hingewiesen auf die Analogie zwischen der Theorie der vollständigen Moduln und dem „Bedingungscalcül“ der abzählenden Geometrie; alle Grundgebilde, die eine räumliche Bedingung in dieser Geometrie erfüllen, lassen sich durch einen vollständigen Modul vertreten; Product und Summe zweier Bedingungen stimmen mit der Bildung des Productes und der Summe zweier Moduln überein u. s. f.

Sodann werden die höheren Elementarteiler eingeführt, entsprechend den Divisorensystemen, die vollständige Moduln sind. Auch dieser Begriff lässt wieder eine Erweiterung zu, indem Modulsysteme mit mehreren Variabelnreihen zugelassen werden („mehr-lineare Modulsysteme“). Eine andere Erweiterung bietet sich dar, wenn man nach dem Vorgang von Smith statt einer Determinante eine rechteckige Matrix (m, n) zu Grunde legt, wiederum mit der Erweiterung, dass die Elemente der Matrix Functionen von $\nu + 1$ Parametern sind.

Durch Untersuchungen der Ordnungen der Contacte gewisser Mannigfaltigkeiten ergiebt sich das Theorem: „Die Elementarteiler der Matrix (m, n) sind Vielfache der entsprechenden Elementarteiler jeder Matrix (m_1, n_1), in welcher die erstere enthalten ist.“

Das Studium der Elementarteiler führt zu einem Satze, der als Verallgemeinerung der Bézout-Kronecker'schen Darstellung der Resultante mehrerer Functionen durch die letzteren erscheint:

„Die Gleichung $A_1 X_1 + \cdots + A_r X_r = A$, wo die A_i gegebene Functionen von $\nu - 1$ Variabeln x sind, kann stets dann und nur dann durch ganze rationale Functionen X_i der x befriedigt werden, wenn A jedes Divisorensystem enthält, das allen Coefficienten A_i gemeinsam ist“.

Der Nutzen der neuen Elementarteiler zeigt sich u. a. in ihrer Verwendung zur Zerlegung ganzer rationaler, resp. transcendenter Functionen in Factoren.

Unter den Matrices und deren Submatrices spielen eine besondere Rolle die sogenannten „regulären“; von einer solchen ausgehend, kann man eine lückenlose Reihe regulärer Submatrices herstellen, von denen jede in der vorangehenden enthalten ist. Ein Fundamentalsatz über Producte AB von zwei Matrices A, B ist von Smith, Frobenius, Hensel für den Fall aufgestellt worden, dass die Elemente ganzzahlig oder Functionen eines Parameters sind. Der Verf. erbringt die Verallgemeinerung auf beliebige analytische Functionen mehrerer Parameter. Als grundlegend erweist sich hierbei der Umstand, dass der aus den Determinanten von $|AB|$ gebildete Modul das Product der Moduln ist, die aus den Determinanten von A, B gebildet werden.

Des weiteren wird mit Frobenius die Auffassung betont, dass gleichzeitig mit den Determinanten $|A|$ auch die Matrices (a_{ik}) und die bilinearen Formen $A = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ durch den nämlichen Punkt P des R_σ abgebildet werden; endlich vertritt P aber auch die S mit den Coefficienten a_{ik}, wenn diese Transformationen an sich betrachtet werden. Der Fundamentalsatz, dass mit $AB = C$ auch $|A||B| = |C|$ ist, sagt aus, dass die entsprechenden Transformationen im R_σ die $S^{(2)}$ in sich überführen, auf der sie zwei lineare Scharen bilden; diese Scharen sind für $S^{(2)}$ (nicht aber für $V_2, V_3, \ldots$) transitiv. Jede S, die V_i ungeändert lässt, lässt auch $S^{(2)}$ ungeändert. Auf diesen Grundlagen erhebt sich das eingangs erwähnte allgemeinere Aequivalenztheorem für zwei bilineare Formen A, A': Sind die Coefficienten von A, A' homogene lineare Formen der Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$, resp. $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{\nu+1}$, wo die x' von den x linear abhängen, so werden mit Hülfe der höheren Elementarteiler die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Aequivalenz von A und A' formulirt. Dieses Theorem lässt sich dann wiederum nach verschiedenen Richtungen hin, u. a. auf rechteckige Matrices, ausdehnen. Von Interesse ist dabei eine gewisse Analogie mit der Idealtheorie. Als ein schönes Beispiel zu dem allgemeinen Satze erscheinen die Aequivalenzbedingungen für zwei trilineare Formen; die betreffenden Substitutionen der dreierlei Variabeln können unabhängig von einander sein. Die drei bereits von Weierstrass eingeführten Covarianten einer trilinearen Form sind auf einander eindeutig bezogen, haben also gleiche Geschlechtszahlen und gleiche Moduln, überdies auch gleiche Elementarzahlen (Elementarteilerexponenten).

Hervorzuheben ist auch ein grundlegender Satz über die Elementarteiler von $|A + B|$, verglichen mit denen von $|A|, |B|, |AB|$.

Die symmetrischen und alternirenden Formen werden einer besonderen Untersuchung unterworfen, wobei die Fälle cogredienter und contragredienter Aequivalenz getrennt werden.

Ferner bringt der Verf. einen bemerkenswerten Zusatz zu einem bekannten Fundamentalsatze über die Jacobi'sche Determinante J.

Bekanntlich geht die letztere bei beliebigen Punkttransformationen in ein Vielfaches ihrer selbst über; diese Eigenschaft relativer Invarianz kommt aber auch den „zugehörigen“ Elementarteilern zu. In der gewöhnlichen (projectiven) Invariantentheorie ist also nicht nur J eine Covariante, sondern auch die Elementarteiler; damit ergeben sich also auch Bedingungen für die Aequivalenz zweier Systeme simultaner Formen, die mit den bekannten, insbesondere von Christoffel aufgestellten Bedingungen näher zu vergleichen wären.

Das soeben angeführte Theorem lässt sich überhaupt da anwenden, wo sich eine Covariante in Determinantenform schreiben lässt, weiterhin aber auch auf die Lie'schen Transformationsgruppen überhaupt.

Nunmehr schreitet der Verf. zu einer Untersuchung seiner Elementarteiler höherer Stufe in einem algebraischen Functionenkörper (Gattungsbereiche). Er betont hierbei den Vorzug jener Elementarteiler vor denen von Hensel. Der Weber'sche Begriff des Functionals wird auf algebraische, jedoch nicht ganzzahlige Functionenkörper übertragen. Die weitgehendste Verallgemeinerung der Elementarteiler vollzieht sich, indem an Stelle der Determinante eine beliebige Function $S(x_1, \dots, x_m)$ zu Grunde gelegt wird. Wir beschränken uns hier auf Folgendes: S heisst vom l-ten Range, wenn für ein bestimmtes Wertsystem $x_1, \dots, x_i$ alle Ableitungen nach ihnen bis zu den $(l-1)$-ten für die übrigen Variabeln identisch verschwinden, und wenn überdies die $x_1, \dots, x_i$ selbst wieder beliebige Functionen von $\nu+1$ Parametern λ sind. Durch die Function S lässt sich ein zugehöriges Divisorensystem mit Hülfe jener Elementarteiler in Factoren zerlegen.

Daran schliesst sich ein ganz allgemeiner Productensatz für zusammensetzbare Functionen, die Untersuchung hervorragender Covarianten (Discriminante, Tacinvariante, Resultante) als Functionen S, sowie endlich ein Aequivalenztheorem für nicht lineare Scharen bilinearer Formen.

Der Ref. ist sich wohl bewusst, dass er in Obigem nur eine sehr unvollkommene Wiedergabe von dem reichen Gedankeninhalt der Abhandlung geliefert hat; er darf aber auch hinzufügen, dass die eigenartige Darstellung des Verf. das Verständnis ungemein erschwert. My.

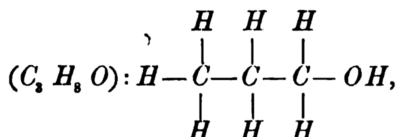
P. Gordan und W. Alexejeff. Uebereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie. Sitzber. Erl. phys. med. Soc. **31**, 107-142.

Sylvester und Clifford (F. d. M. **10**, 90f., 1878) haben auf die Analogie zwischen der (binären) Invariantentheorie und der atomistischen Theorie der Chemie aufmerksam gemacht.

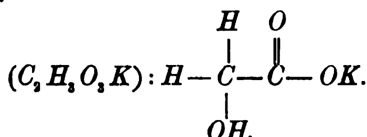
Einem Elementenatom a von der Valenz n wird eine Form a_x^n zugeordnet; der Zusammensetzung eines Molecüls, resp. eines Radicals entsprechen simultane Invarianten, resp. Covarianten des Formensystems. Die Anzahl der dabei auftretenden Atome entspricht dem bez. Grade

in den Coefficienten. Die Verf., der eine als Formentheoretiker, der andere als Chemiker, vereinigten sich, um auf Grund der Gordan'schen Symbolik aus jenen Anfängen heraus eine systematische Theorie auszubilden, die weitgehende und hochinteressante Analogien aufdeckt, wenn auch die Aussichten, die damit einer zukünftigen Entwickelung der Chemie eröffnet werden, zu optimistisch erscheinen mögen.

Die wesentlichste Analogie besteht zwischen Faltungs- und Sättigungs-Process. Durch „Faltung" werden in einem symbolischen Producte Paare von Factoren erster Art $a_x b_x$ in Klammerfactoren (ab) übergeführt, dem entspricht der Sättigungsprocess für Atomenvalenzen; umgekehrt entspricht dem „Entfaltungsprocesse" die Bildung der freien Elementenatome und der Radicale „in statu nascendi". Wendet man die Faltung eine bestimmte Anzahl Male auf zwei gegebene Covarianten an, so erscheint eine Reihe „aequivalenter" Faltungsproducte; ebenso tritt bei Verwendung zweier Radicale eine Reihe von „Isomeren" auf: zerfallenden Invarianten insbesondere correspondiren dabei Gruppen mehrerer Molecüle oder „zerfallende Isomere". Das Resultat der Einwirkung mehrerer chemischer Verbindungen in einer Mischung erscheint als Uebergang von einem zerfallenden Isomer zum andern. Um das Gesagte an einigen Beispielen zu erläutern, so lautet in graphischer Darstellung die Formel für primären Propylalkohol:



für Kaliumglykolat:



Setzt man andererseits: $C =$ Kohlenstoff $= c_x^4$, $H =$ Wasserstoff $= h_x$, $O =$ Sauerstoff $= o_x^2$, $K =$ Kalium $= k_x$, so nehmen jene Formeln die Gestalt an:

$$(c_1 c_2)(c_2 c_3)(c_1 h)^3 (c_2 h)^2 (c_3 h)^2 (c_3 o)(o h) \text{ (Propylalkohol), resp.}$$

$$(c_1 c_2)(c_1 h)^2 (c_1 o)(o h)(c_2 o_1)^2 (c_2 o_2)(o_2 k) \text{ (Kaliumglykolat).}$$

Wie in der Formentheorie werden die symbolischen Producte (chemischen Verbindungen) in „Klassen" eingeteilt; es gehören immer die Producte zu einer Klasse, die einen gewissen Complex ϑ von Klammerfactoren enthalten. So wird man im ersten Beispiel $(c_1 c_2)(c_2 c_3)$, im zweiten $(c_1 c_2)$ als Factor ϑ nehmen. Dieser Factor („Reducent") charakterisirt die Klasse. Durch Adjunction eines zweiten derartigen Reducenten η erhält man „Unterklassen". Nimmt man z. B. im ersten Beispiel

$$\eta = (c_1 h)^3 (c_2 h) (c_3 h)^2,$$

so erscheint der primäre Propylalkohol $= \vartheta\eta(c_2 h)(c_2 o)(oh)$ als Repräsentant einer Klasse ϑ und der Unterklasse η; vertauscht man in den übrigen Factoren etwa die Symbole c_2 und c_3, so geht als Isomer der secundäre Propylalkohol $= \vartheta\eta(c_3 h)(c_2 o)(oh)$ hervor u. s. f. Ausgedehnte Tabellen fassen die Ergebnisse zusammen. Sehr eingehend wird die Indigoformel analysirt. Wie sich die Verf. mit der Erscheinung einer mehrdeutigen Valenz, z. B. des Schwefels, abfinden wollen, ist nicht ersichtlich. My.

W. G. Alexejeff. **Graphische Aufstellung des simultanen Systems einer kubischen und einer biquadratischen Form, wodurch die Uebereinstimmung der atomistischen Theorie und der symbolischen Invariantentheorie hergestellt ist.** Jurjeff (Dorpat) Univ. No. 3. 4 S.

Es ist dem Verf. gelungen, die Uebereinstimmung zwischen dem Gordan'schen Faltungsprocess und der Sättigung der Atomvalenzen der Chemie nachzuweisen. Näheres siehe in dem vorangehenden Bericht. Si.

U. Perazzo. **Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente.** Batt. G. **38**, 337-354.

Gordan und Noether (F. d. M. **8**, 64, 1876) haben die algebraischen Mannigfaltigkeiten untersucht, deren Hesse'sche Covariante H identisch verschwindet. Der Verf. führt die Frage für die kubischen Mannigfaltigkeiten f des Raumes S_n von n Dimensionen im einzelnen weiter aus, indem er sich auf geometrische Methoden Segre's (F. d. M. **16**, 604, 1884) stützt. Insbesondere werden im Raume von 4, 5 und 6 Dimensionen alle möglichen Typen der fraglichen Mannigfaltigkeiten bestimmt. Wenn H mit allen Subdeterminanten bis zur Ordnung $n-p+1$ incl. identisch verschwindet, so reduciren sich einerseits die quadratischen Polarflächen S_{n-1} von f auf gewisse Kegel; andererseits bestehen zwischen den ersten Ableitungen von f $p+1$ algebraische Relationen, d. h. die Polarebenen S_{n-1} von f bilden ein algebraisches System der Dimension $n-p-1$. Sie umhüllen des näheren eine gewisse Mannigfaltigkeit Γ von Räumen S_p, die für die Polarkegel eine ausgezeichnete Rolle spielen. Diese Mannigfaltigkeit Γ von S_p bildet den Kern der Untersuchung; sie ist durch lineare Systeme von Ebenen S_{n-1} projectiv erzeugbar. Ist μ die Dimension von Γ, so lässt sich den S_p ein gewisses System von $S_{n-\mu}$ eindeutig zuordnen, von denen durch jeden Raumpunkt nur eine hindurchgeht. Die Mannigfaltigkeit Γ gehört f selbst doppelt zählend an. Es giebt dann weiter eine Mannigfaltigkeit S_{p+1}, deren Projection von irgend einem Punkte eine S_p von Γ ist. Die Punkte von S_{p+1} besitzen in Bezug auf f dieselbe Polarebene S_{n-1}. Aus diesem Satze lassen sich Folgerungen ziehen, welche die gestellte Aufgabe erledigen.

Im Raume S_4 von 4 Dimensionen sind die einzigen f, abgesehen von Kegeln, die mit einer Doppelebene S_1 behafteten. Im Raume S_5 und S_6 giebt es einen analogen Typus, im letzteren kommt noch als ein zweiter Typus die f mit einem Doppelraume S_3 hinzu. My.

- -

E. O. LOVETT. Supplementary note on projective invariants. American J. **22**, 46-48.

Für die Figur von $m+1$ Punkten in einem Raume von $n+1$ Dimensionen lässt sich nach Lie ein gewisses System von projectiven Differentialinvarianten zweiter Ordnung aufstellen. Der Verf. giebt einen einfachen Beweis für deren Invarianz und gelangt zu einer instructiven geometrischen Deutung auf Grund des von Kronecker verallgemeinerten Begriffes des Krümmungsmasses. My.

V. SNYDER. On some invariant scrolls in collineations which leave a group of five points invariant. American J. **22**, 253-258.

Es giebt sechs Collineationen von wesentlich verschiedenem Typus, welche die Figur von fünf Raumpunkten invariant lassen. Diese sechs Collineationen lassen sich repräsentiren durch: $(A_1 A_2)(A_3)(A_4)(A_5)$, $(A_1 A_2)(A_3 A_4)(A_5)$, $(A_1 A_2 A_3)(A_4)(A_5)$, $(A_1 A_2 A_3)(A_4 A_5)$, $(A_1 A_2 A_3 A_4)(A_5)$, $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$. Bei einer jeden der Collineationen bleibt eine gewisse Schar von asymptotischen Linien auf gewissen algebraischen Flächen invariant.

Die Eigenschaften der sechs Collineationen werden im einzelnen discutirt. My.

Weitere Litteratur.

P. COUSIN. Système complet d'invariants et de covariants de deux formes quadratiques ternaires. Grenoble Ann. **11**, 403-412 (1899).

J. KLEIBER. Ueber die Priminvarianten quadratischer Formen beliebig hoher Stufe. Pr. München. 58 S. 8°.

H. VOGT. Réduction de la forme binaire biquadratique à la forme canonique. Rev. math. spéc. **10**, 401-407.

J. DE VRIES. Orthogonale comitanten. Amst. Ak. Versl. **8**, 562-571.

Kapitel 3.

Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Functionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

A. Wiman. Endliche Gruppen linearer Substitutionen. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 522-554.

Inhaltsübersicht: 1. Periodische Substitutionen. 2. Endliche binäre Gruppen. 3. Erweiterungen. 4. Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. 5. Endliche ternäre Gruppen. 6. Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. 7. Gruppen aus den regulären Körpern in höheren Räumen. 8. Invariante definite Hermite'sche Formen. 9. Erste Auflösung der Gleichungen 5. Grades. 10. Lösung durch Vermittlung der Jacobi'schen Gleichungen 6. Grades. 11. Satz betreffend die Möglichkeit von Resolventen mit nur einem Parameter. 12. Lösung durch die Ikosaederirrationalität. 13. Zurückführung der Gleichungen 5. Grades auf ein ternäres Formenproblem. 14. Auflösung durch elliptische Transformationsgrössen und hypergeometrische Functionen. 15. Die allgemeinen algebraischen Formenprobleme. 16. Gleichungen 7. Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. 17. Collineationsgruppen der elliptischen Normalcurven. 18. Gruppen aus der elliptischen Transformationstheorie. 19. Mit den Gleichungen 6. und 7. Grades isomorphe quaternäre Formenprobleme. 20. Reduction der allgemeinen Gleichungen 6. Grades auf ein ternäres Formenproblem. 21. Satz über die allgemeinen Gleichungen höheren Grades. 22. Quaternäre Gruppe von 11 520 Collineationen. 23. Quaternäre und quinäre Gruppen aus der Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen. 24. Gruppen von eindeutigen Transformationen einer algebraischen Curve in sich. 25. Endliche Gruppen von birationalen Transformationen. 26. Erweiterung auf unendliche discontinuirliche Gruppen. Wbg.

G. Frobenius. Ueber die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Berl. Ber. 1900, 516-534.

Zur Berechnung der k Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{H}$ von n Symbolen verwendet Verf. k gewisse Untergruppen von $\mathfrak{H}$; mit Hülfe derselben bestimmt er zunächst zusammengesetzte Charaktere von $\mathfrak{H}$, d. h. lineare Verbindungen der Charaktere von $\mathfrak{H}$ mit ganzzahligen Coefficienten. (Ueber die vom Verf. eingeführten Charaktere einer Gruppe vergl. F. d. M. **27**, 93, 1896; **29**, 102, 1898). In der Entwickelung der symmetrischen Function n-ten Grades

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)^\beta(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_m^3)^\gamma\cdots$$

nach Potenzen der Variabeln ist jeder Coefficient ein zusammengesetzter Charakter von $\mathfrak{H}$; dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive ganze Zahlen, die auch Null sein können und der Gleichung $n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots$ genügen; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sind unabhängige Variabeln, deren geringste Anzahl in gewisser Weise von dem n abhängt. Von der symmetrischen Function geht Frobenius zu der alternirenden Function:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\alpha (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^\beta (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^\gamma \cdots \Delta$$

über, wobei Δ das Differenzenproduct $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$ vom Grade $\frac{1}{2}n(n-1)$ bedeutet; diese Function liefert bei ihrer Entwickelung nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werte der k Charaktere von $\mathfrak{H}$. Zu der Bestimmung der Charaktere von $\mathfrak{H}$ werden noch die zwischen den Charakteren von $\mathfrak{H}$ bestehenden bilinearen Relationen verwandt. Ist $\mathfrak{G}$ die alternirende Gruppe und T irgend eine ungerade Permutation, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}T$; die Factorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ hat zwei Charaktere 1, 1 und 1, -1. Daher hat $\mathfrak{H}$ einen Charakter $(-1)^{n-s}$, der für die geraden Permutationen aus $\mathfrak{G}$ die Zahl $+1$, für die ungeraden Permutationen, die in $\mathfrak{G}T$ enthalten sind, -1 ist. Multiplicirt man einen Charakter $\chi^{(k)}$ mit diesem Charakter ersten Grades, so ergiebt sich stets wieder ein Charakter $\chi^{(\lambda)}$. Zwei Charaktere, für die

$$\chi^{(\lambda)} = \chi^{(k)}\chi^{(1)}, \qquad \chi^{(k)} = \chi^{(\lambda)}\chi^{(1)}$$

ist, werden als associirt bezeichnet; zwei associirte Charaktere sind von einander verschieden. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, dass für jede ungerade Permutation R $\chi^{(k)}(R) = 0$ wird; ein derartiger Charakter ist sich selbst associirt. Die associirten Charaktere werden näher untersucht; hierbei wird auch die Charakteristik eines Charakters, die im § 4 eingeführt wurde, verwandt. Zum Schluss werden einige Specialfälle hervorgehoben, in denen sich gewisse Werte von Charakteren einfach bestimmen, weil die Cyklen, aus denen die Permutationen „der Klasse conjugirter Elemente", deren Charakter gesucht wird, in besonderer Weise gebildet sind. Man beachte dabei, dass zwei conjugirte Permutationen stets gleich viele Cyklen derselben Ordnung besitzen. Ly.

A. Loewy. Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. Math. Ann. **53**, 225-242.

Es wird gesagt, dass eine Gruppe von linearen Substitutionen S (mit nicht verschwindender Determinante) von n Variabeln z „vom Typus einer endlichen Gruppe" sei, wenn die charakteristischen Gleichungen aller S der Gruppe nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln ϱ besitzen. Offenbar ist dieser Begriff eine Verallgemeinerung einer endlichen Gruppe von S, d. h. einer solchen, die nur aus einer endlichen Anzahl von S besteht.

Es wird vor allem die Frage nach Kriterien behandelt, durch welche die endlichen Gruppen innerhalb jener allgemeineren Gruppengattung ausgezeichnet erscheinen. Ein solches Kriterium ist u. a. folgendes:

„Existirt für eine Gruppe von S (die wenigstens eine S besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat) eine endliche Zahl p, so dass alle S der Gruppe von p-ter oder niedrigerer Ordnung sind, so ist die Gruppe endlich".

Gruppen von endlichem Typus sollen mit G bezeichnet sein, die charakteristische Gleichung einer S mit Γ. Man hat zuvörderst den Hülfssatz: „Eine Γ von G kann nur Einheitswurzeln besitzen". Ferner nimmt mit Rücksicht auf Sätze von Maschke (F. d. M. **29**, 114, 1898; **30**, 131, 1899) die „Diagonalsumme" der S von G nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte an und ist „cyklotomisch", d. h. rational durch Einheitswurzeln ausdrückbar. Wenn nun wenigstens für eine $S = S_1$ von G die Γ lauter verschiedene Wurzeln besitzt, so lässt sich S_1 in die kanonische Form $z_i' = \gamma_i z_i \, (\gamma_i \neq \gamma_k)$ setzen; die so transformirte Gruppe heisse G'. Wenn ein die Stelle (i, k) einnehmender Coefficient in allen S von G' verschwindet, so heisst er „durchgehends Null". „Giebt es keinen solchen Coefficienten, so ist die Gruppe eine endliche." Ferner lässt sich G' in eine weitere Normalform G_1' transformiren, für deren sämtliche S die rechts stehende $(n-r)$-reihige Eckmatrix lauter Nullen aufweist. Die auf die r Variabeln $z_1, \ldots, z_r$ bezügliche Gruppe ist dann eine endliche, und es gehört zu ihr nach einem bekannten Satze eine automorphe definite Hermite'sche Form vom Range r:

$$H_1 = \mu_1 z_1 \bar{z}_1 + \mu_2 z_2 \bar{z}_2 + \cdots + \mu_r z_r \bar{z}_r,$$

wo die μ reell und desselben Vorzeichens sind, und z_i zu $\bar{z}_i$ conjugirt imaginär ist. H_1 kann auch als Invariante von G_1' angesehen werden, in der nur die Variabeln $z_{r+1}, \ldots, z_n$ nicht auftreten. Da hier $r < n$ ist, heisst H_1 im besonderen eine „semidefinite" Hermite'sche Form; ihre Determinante verschwindet. Man kann nun rückwärts schliessen, dass auch zu einer (nicht selbst endlichen) G eine automorphe semidefinite Hermite'sche Form gehört. Umgekehrt, wenn zu G eine semidefinite Hermite'sche Form vom Range s gehört, so lässt sich aus G eine endliche Gruppe von genau s Variabeln absondern.

Als notwendig und hinreichend, dass G endlich sei, erweist sich dann, dass es wenigstens eine invariante Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante giebt; dagegen, dass G nicht endlich sei, dass sie nur Hermite'sche Formen von verschwindender Determinante in sich überführt.

Weiterhin wird ein Verfahren angegeben, wie man Gruppen G von n Variabeln explicite bilden kann, falls man endliche Gruppen mit weniger als n Variabeln herstellen kann.

Nunmehr wird der Zusammenhang mit den Elementarteilern untersucht. Eine nicht endliche G — mit einer Γ von verschiedenen Wurzeln — besitzt S, deren Γ nicht lauter einfache Elementarteiler aufweisen.

Haben dagegen die Γ von G nur einfache Elementarteiler, und verschwinden die letzteren nur für eine endliche Anzahl verschiedener Ein-

heitswurzeln, so ist G (wenn wenigstens eine ihrer Γ verschiedene Wurzeln hat) endlich.

Daraus fliesst dann unmittelbar das im Eingange erwähnte Kriterium für eine endliche Gruppe G. Offenbar lässt sich dasselbe auch als Kriterium für eine nicht endliche Gruppe G formuliren. My.

C. Stéphanos. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. Journ. de Math. (5) **6**, 73-128.

Der Verf. giebt in der vorliegenden Arbeit eine durchgeführte, eingehende Untersuchung derjenigen zwei Verbindungen zweier bilinearen Formen, die er „conjonction" und „composition bialternée" nennt. Da über den Bericht, den Stéphanos von seinen Resultaten in den C. R. (1899) gegeben hat, bereits referirt wurde (F. d. M. **30**, 121, 1899), so sei nur Folgendes zur Ergänzung angegeben: Mittelpunkt der Untersuchung bei der aus zwei bilinearen Formen A und B durch conjonction gewonnenen bilinearen Form $A \times B$ ist die Untersuchung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $A \times B$ und des Productes zweier bilinearen Formen, die beide durch conjonction entstehen. (Bezeichnung nach Frobenius J. für Math. **84**, wie in Muth's Theorie der Elementarteiler). Analoge Untersuchungen für die durch composition bialternée entstehende bilineare Form. Die conjonction ist verwandt mit der sogenannten Kronecker'schen Composition zweier Determinanten (vergl. Encyklopädie, **1**, 40). Die composition bialternée steht mit der Theorie der adjungirten Formen einer bilinearen Form in enger Beziehung (vergl. Encyklopädie, **1**, 594). Die angegebenen Operationen werden auch für mehrere Formen erweitert und gemischt angewandt. Diese Untersuchungen führen ferner zur Auffindung aller linearen Substitutionen zwischen mn Grössen

$$X_{ik} \, (i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, n)$$

eines Tableaus von m Zeilen und n Colonnen, welche lineare Substitutionen zwischen den Minoren derselben Ordnung dieses Tableaus ergeben. Der Verf. weist auch auf den engen Zusammenhang seiner Untersuchungen mit denjenigen von Hurwitz in dem Aufsatz „Zur Invariantentheorie" (Math. Ann. **45**, 381, § 6 und § 8, Producttransformationen, Determinantentransformationen) hin; Ref. möchte noch auf Frobenius (Berl. Ber. 1899, 330; F. d. M. **30**, 130, 1899) verweisen. Ly.

U. Amaldi. Sulle sostituzioni lineari commutabili. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 731-744.

Verf. knüpft an die Untersuchungen von Ludwig Schlesinger an (J. für Math. **121**; F. d. M. **30**, 286, 1899), die sich übrigens auch in H. Weber's Algebra **2**, 176 (zweite Auflage, 1899) befinden, und sucht ebenfalls nach einer Normalform für zwei commutative lineare Substitutionen. Vermöge Betrachtungen, wie sie Pincherle in seinen Untersuchungen über distributive Operationen verwendet (Math. Ann. **49**; F. d. M. **28**,

347, 1897; Lomb. Ist. Rend. (2) **29**; F. d. M. **27**, 78, 1896) gelangt er zu folgendem Ergebnis: Sind A und B lineare Substitutionen, welche, auf die Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des R_n angewandt, ein von der Reihenfolge unabhängiges Resultat liefern, so kann man lineare homogene Combinationen der y_i bilden, die in Gruppen zerfallen, so dass die Elemente einer jeden Gruppe sich in ein Schema ordnen lassen:

$$\begin{array}{llllll} w_{1r} & w_{2r} & \cdots w_{h_1 r} & & & \\ w_{1r-1} & w_{2r-1} \cdots & w_{h_1 r-1} & \cdots w_{h_1+h_2 r-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ w_{11} & w_{21} & \cdots w_{h_1 1} & \cdots w_{h_1+h_2 1} & \cdots w_{h_1+h_2+\cdots+h_r 1}, & \end{array}$$

wobei die Colonnen Hamburger'sche Systeme bezüglich A, die Zeilen Hamburger'sche Systeme bezüglich B bilden. (Bezeichnung wie in Schlesinger's Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen **1**, 126). Bezeichnet man mit a und b zwei zugeordnete Wurzeln der Fundamentalgleichung von A und B, so wird:

$$A(w_{pq}) = a w_{pq} + w_{pq-1}, \qquad B(w_{pq}) = b w_{pq} + w_{p-1q}.$$

Im letzten Paragraphen wird das gewonnene Resultat zur Integration des Systems partieller linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \cdots + a_{im}\varphi_m,$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = b_{i1}\varphi_1 + b_{i2}\varphi_2 + \cdots + b_{im}\varphi_m,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

verwandt, wobei die durch die rechten Seiten der Gleichungen definirten linearen Substitutionen A und B vertauschbar sind und nicht verschwindende Determinanten haben. Dieses System wird durch lineare Combinationen von Producten von Polynomen in zwei Variabeln x, y in Exponentialfactoren e^{ax+by} befriedigt; a und b bedeuten Wurzeln der zwei Fundamentalgleichungen: $|a_{ik} - \varrho\delta_{ik}| = 0$, $|b_{ik} - \varrho\delta_{ik}| = 0$; $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ $(i \gtrless k)$. Ly.

W. Burnside. On transitive groups of degree n and class $n-1$. Lond. M. S. Proc. **32**, 240-246.

Eine transitive Gruppe des Grades n und der Klasse $n-1$ ist dadurch charakterisirt, dass sie genau $n-1$ Substitutionen enthält, die alle Symbole vertauschen. Jede solche Gruppe hat die Ordnung $n.\nu$, wobei ν ein Factor von $n-1$ ist. Ist ν eine gerade Zahl, so bilden die $n-1$ Substitutionen der Gruppe, die alle Symbole versetzen, mit der identischen Substitution eine invariante Untergruppe, die sogar commutativ ist. (Burnside, Theory of groups of finite order. Cambridge,

1897, S. 144). Verf. beweist im vorliegenden Aufsatz: Sind die Untergruppen der Ordnung ν einer transitiven Gruppe des Grades n, der Ordnung $n\nu$ und der Klasse $n-1$ auflösbar, so hat die Gruppe eine invariante Untergruppe des Grades und der Ordnung n; diese wird von der identischen Substitution und den $n-1$ Substitutionen, welche alle Symbole vertauschen, gebildet. Umgekehrt: Hat eine transitive Gruppe der Klasse $n-1$, der Ordnung $n\nu$ und des Grades n eine Untergruppe der Ordnung und des Grades n von der oben besprochenen Art, so sind bis auf einen einzigen möglichen Ausnahmefall die Untergruppen der Ordnung ν stets auflösbar.

Ist n nicht grösser als das Quadrat der kleinsten ungeraden Zahl, die Ordnungszahl einer einfachen Gruppe sein kann, so hat eine jede transitive Gruppe des Grades n und der Klasse $n-1$ eine invariante Untergruppe der Ordnung und des Grades n, die von den $n-1$ alle Symbole vertauschenden Substitutionen und der identischen Substitution gebildet wird. Einfache Gruppen ungerader Ordnung sind übrigens noch nicht bekannt; bis zur Ordnung 9000 giebt es, wie der Verf. zeigt, sicher keine solchen. Inzwischen ist es, wie Ref. in Ergänzung bemerkt, Frobenius gelungen, zu zeigen, dass für n keine Beschränkung nötig ist. Vielmehr gilt allgemein das Theorem: Enthält eine transitive Gruppe des Grades n ausser der identischen Substitution keine Substitution, die zwei Symbole ungeändert lässt, so bilden die $n-1$ Substitutionen, die alle Symbole versetzen, zusammen mit der identischen Substitution eine charakteristische Untergruppe (Berl. Ber. 1901, 1226). Ly.

W. Burnside. On a class of groups of finite order. Cambr. Trans. **18**, 269-276.

G. A. Miller. Note on Netto's theory of substitutions. Annals of Math. (2) **1**, 71-73.

Bemerkung zu der Art, wie in der englischen, von Cole ausgeführten Uebersetzung des Netto'schen Werkes über Substitutionentheorie eine Function construirt wird, die zu einer gegebenen Gruppe von Substitutionen gehört. Ly.

G. A. Miller. On the product of two substitutions. American J. **22**, 185-190.

Der Verf. beweist den folgenden wichtigen Satz: „Wenn l, m, n irgend drei ganze Zahlen bedeuten, die alle drei grösser als 1 sind, und k die grösste dieser Zahlen ist, so kann man stets drei Substitutionen L, M, N von $k+2$ oder einer geringeren Anzahl von Buchstaben finden, so dass $LM=N$ wird und diese Substitutionen die Ordnungen l, m, n haben." Ly.

G. A. MILLER. On the groups which have the same group of isomorphisms. American M. S. Trans. **1**, 395-401.

Der Gegenstand der Arbeit ist die Aufsuchung aller möglichen Gruppen, deren Isomorphismengruppe (vergl. Encyklopädie, **1**, 221) entweder die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 oder diejenige der Ordnung 24 ist.

Die Hauptresultate, welche der Verf. beweist, sind die folgenden: Hat eine Gruppe, die nicht das directe Product von zwei Untergruppen ist, die symmetrische Gruppe von drei Elementen zur cogredienten Isomorphismengruppe, so ist ihre Ordnung $3.\ 2^a$, und sie enthält eine einzige Untergruppe der Ordnung 3 und drei cyklische Untergruppen der Ordnung 2^a. Für jeden Wert des $\alpha > 0$ existirt nur eine solche Gruppe. Jede andere Gruppe, welche die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 zur cogredienten Isomorphismengruppe besitzt, ist das directe Product einer der gefundenen Gruppen der Ordnung $3.\ 2^a$ und einer Abel'schen Gruppe. Die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 ist die einzige nicht-abelsche Gruppe, welche die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 zur Isomorphismengruppe besitzt. Es giebt nur fünf Gruppen, welche die symmetrische Gruppe von vier Elementen zur Isomorphismengruppe haben. Die Quaternionengruppe ist die einzige Gruppe der Ordnung 8, welche die symmetrische Gruppe von vier Elementen zur Isomorphismengruppe hat; für sie ist die Vierergruppe cogrediente Isomorphismengruppe. Nur folgende drei Gruppen: die alternirende Gruppe von vier Elementen, das directe Product dieser mit einem Operator der Ordnung 2 und die Gruppe der Ordnung 24, welche keine Untergruppe der Ordnung 12 hat, haben die symmetrische Gruppe von vier Dingen zur Isomorphismengruppe und die alternirende Gruppe von vier Dingen zur cogredienten Isomorphismengruppe. Die symmetrische Gruppe von vier Dingen ist die einzige Gruppe, die sich selbst zur Isomorphismengruppe und zur cogredienten Isomorphismengruppe hat. Unter diesen fünf aufgezählten Gruppen sind drei der Ordnung 24. Ly.

G. A. MILLER. Note on the group of isomorphisms. American M. S. Bull. (2) **6**, 337-339.

I. Jeder einfache Isomorphismus einer Abel'schen Gruppe A mit sich selbst kann erhalten werden: 1. indem man A mit einer ihrer Untergruppen oder mit sich selbst derart isomorph macht, dass kein Operator seinem inversen entspricht, und 2. indem man jeden Operator von A sich selbst entsprechend macht, multiplicirt mit dem Operator, der ihm in dem gegebenen Isomorphismus entspricht. II. Wenn wir eine Abel'sche Gruppe A einfach isomorph mit sich machen durch Multiplication ihrer Operatoren mit den Operatoren einer Untergruppe, deren Ordnung eine ungerade Primzahl p oder das Doppelte dieser Primzahl ist, so entspricht der resultirende einfache Isomorphismus von A mit sich einem Operator von der Ordnung p, $2p$ oder $(p-1)/\alpha$ (wo a

ein beliebiger Teiler von $p-1$ ist) in der Gruppe der Isomorphismen von A. Lp.

G. A. Miller. Sur les groupes des isomorphismes. C. R. **130,** 316-317.

Die Note enthält einige Sätze über die im Titel genannten Gruppen; z. B.: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine cyklische Gruppe von der Ordnung n die Gruppe der Isomorphismen einer Gruppe sei, ist die, dass n von der Form $p^a(p-1)$ ist, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet. Wbg.

G. A. Miller. On the transitive substitution groups which are isomorphic to a given group. Batt. G. **38,** 63-71.

Verf. beschäftigt sich mit den transitiven Permutationsgruppen, die mit einer gegebenen Gruppe einfach oder mehrstufig isomorph sind. Unter anderem wird nochmals der bereits im American M. S. Bull. (2) **3** (F. d. M. **28,** 125, 1897) publicirte Satz behandelt. Für den mehrstufigen Isomorphismus ergiebt sich als Hauptsatz das Theorem: Notwendig und hinreichend, damit eine Gruppe mit einer nicht regulären transitiven Gruppe von Permutationen mehrstufig isomorph sei, ist, dass die Gruppe eine von der Identität verschiedene invariante Untergruppe, die in einer nicht invarianten Untergruppe enthalten ist, besitzt. Ref. möchte in Ergänzung der angeführten Litteratur noch auf Frobenius: Berl. Ber. 1895, S. 178 verweisen. Ly.

G. A. Miller. On the groups which are the direct products of two subgroups. American M. S. Trans. **1,** 66-71.

Theorem I: Wenn G eine auflösbare Teilergruppe G/H derart enthält, dass in dem Isomorphismus von G mit G/H jedem Operator von G/H ein und nur ein Operator von G entspricht, dessen Ordnung ein Teiler der Ordnung von G/H ist, so ist G das directe Product von H und einer Untergruppe, welche einfach isomorph mit G/H ist.

Theorem II: Wenn die Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{K}$ gleich $m \cdot n$ ist (m und n relativ prim), und wenn $\mathfrak{K}$ eine Untergruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung m enthält, welche die Eigenschaft hat, dass es für jeden Operator K von $\mathfrak{K}$ einen Operator M' von $\mathfrak{M}$ derart giebt, dass für jeden Operator M von $\mathfrak{M}$ die durch K und M' Transformirten einander gleich sind ($K^{-1}MK = M'^{-1}MM'$), und wenn die Teilergruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$ auflösbar ist, so ist $\mathfrak{K}$ das directe Product seiner Untergruppen von den Ordnungen m, bezw. n.

Theorem III: Wenn die Ordnung einer auflösbaren Gruppe H $h = m \cdot p^a$ (p Primzahl, a und m ganze Zahlen, m prim zu p) ist, und wenn alle Conjugirten in H irgend eines Operators A einer Untergruppe $\mathfrak{A}$ von der Ordnung p^a Conjugirte von A in $\mathfrak{A}$ sind, so ist H das directe Product von $\mathfrak{A}$ und einer Untergruppe $\mathfrak{M}$ von der Ordnung

m, und ferner enthält H gewisse ausgezeichnete Untergruppen N_γ von der Ordnung $n_\gamma = m p^\gamma$ $(\gamma = 0, 1, \ldots, \alpha - 1)$.

Theorem IV: Wenn die Gruppe der cogredienten Isomorphismen (G') einer Gruppe (G) das directe Product zweier Untergruppen (M, N) ist, deren Ordnungen (m, n) relativ prim sind, so ist G das directe Product zweier Untergruppen. — Wenn daher eine Gruppe eine Abel'sche Gruppe cogredienter Isomorphismen besitzt, deren Ordnung nicht eine Potenz einer einzelnen Primzahl ist, so ist sie das directe Product zweier Untergruppen (vergl. Burnside: Theory of groups of a finite order. 1897, S. 115).

Theorem V: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein directes Product als primitive Substitutionsgruppe dargestellt werden kann, ist die, dass es gerade zwei Factoren enthält, und dass diese einfach isomorphe einfache Gruppen von zusammengesetzter Ordnung sind (Burnside, l. c. S. 190). Wbg.

G. A. Miller. On the holomorph of the cyclical group and some of its subgroups. Quart. J. **31**, 382-384.

Einige Eigenschaften der im Titel angegebenen Gruppen wurden bereits von Burnside angegeben; in der vorliegenden Arbeit stellt Verf. weitere wichtige Eigenschaften dieser Gruppen fest, und zwar mit Hülfe ihrer Commutatoruntergruppen. Wbg.

G. A. Miller. Sur plusieurs groupes simples. S. M. F. Bull. **28**, 266-267.

Mathieu hat zuerst die Existenz einer fünffach transitiven Function von 24 Elementen, die 19!:48 Werte annimmt, erwiesen. (Journ. de Math. **18**; F. d. M. **5**, 88, 1873). Der Verf. zeigt, dass die Gruppe G^{24} dieser Function und jede grösste Untergruppe derselben der Grade 21, 22 und 23 einfache Gruppen sind. Dickson's Aufzählung der einfachen Gruppen (American M. S. Bull. **5**, 470-475; F. d. M. **30**, 143, 1899) enthält keine einfachen Gruppen derselben Ordnungen wie G^{22}, G^{23} und G^{24}; die einfache Gruppe G^{21} hat dieselbe Ordnung wie die alternirende Gruppe von acht Elementen; diese zwei Gruppen sind aber nicht isomorph. Zum Schluss giebt der Verf. an, dass in dem Beweise seiner Note: „On the supposed five-fold transitive function of 24 elements and 19!:48 values“ (Messenger **27**, 187; F. d. M. **29**, 110, 1898) ein Fehler ist; die fragliche Gruppe existirt also. Ly.

G. H. Ling and G. A. Miller. Proof that there is no simple group whose order lies between 1092 and 2001. American J. **22**, 13-26.

Die Verf. setzen die von Hölder, Cole und Burnside (vergl. Encyklop. **1**, 224, Anmerkung 127) begonnenen Untersuchungen über die

Ordnungszahlen einfacher Gruppen für die Zahlen von 1092 bis 2001 fort; ihr Resultat lautet, dass innerhalb dieser Grenzen keine einzige einfache Gruppe existirt. Vorzüglich die Anwendung des Burnside'schen Theorems (Theory of groups of finite order. Cambridge, 1897, p. 365), dass die Ordnung jeder einfachen Gruppe gerader Ordnung durch 12, 16 oder 56 teilbar sein muss, gestattet von Anfang an, eine grössere Anzahl Gruppen von der Discussion auszuscheiden. Ly.

G. A. Miller. Some elements of substitution groups. Amer. Math. Monthly **6**, 255-257.

G. A. Miller. Examples of a few elementary groups. Amer. Math. Monthly **7**, 9-13.

L. E. Dickson. Definition of the Abelian, the two hypoabelian, and related linear groups as quotient groups of the groups of isomorphisms of certain elementary groups. American M. S. Trans. **1**, 30-38.

Es seien Θ, A_i, B_i $(i=1,2,\ldots,m)$ Operationen der Periode p (p Primzahl) und bis auf die Operationen A_i, B_i, welche den Relationen

$$A_iB_i=\Theta B_iA_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

genügen, unter einander vertauschbar. Verf. untersucht die Isomorphismengruppe der von den angegebenen Operationen erzeugten Gruppe $\mathfrak{F}$. Die Isomorphismengruppe J von $\mathfrak{F}$ besitzt eine invariante Untergruppe der Ordnung p^{2m}. Die durch diese Untergruppe J_1 definirte Quotientengruppe J/J_1 ist, wie Verf. beweist, für $p>2$ mit der allgemeinen Abel'schen Gruppe (C. Jordan: Traité des substitutions. Paris, 1870, 171) und für $p=2$ mit der ersten hypoabelschen Gruppe (C. Jordan, ebenda, 199) holoedrisch isomorph; die Coefficienten der Substitutionen beider Gruppen, die sich auf $2m$ Variabeln beziehen, sind mod. p zu nehmen. Dickson betrachtet noch drei weitere abstracte Gruppen, deren Isomorphismengruppen zu ähnlichen Resultaten führen; auf diese Art lässt sich im besonderen auch die zweite hypoabelsche Gruppe (C. Jordan, a. a. O., 206) definiren. Ly.

L. E. Dickson. A new definition of the general Abelian linear group. American M. S. Trans. **1**, 91-96.

Verf. bringt die Abel'sche Gruppe, mit der er sich im Galois'schen Feld $GF[p^n]$ (p Primzahl) schon wiederholt beschäftigt hat (vergl. F. d. M. **28**, 136, 1897; **29**, 118, 1898) mit der von ihm sogenannten zweiten componirten Gruppe der linearen homogenen Gruppe (American M. S. Bull. **5**; F. d. M. **29**, 119, 1898) in Verbindung. Je nachdem p

den Wert 2 oder einen grösseren Wert hat, ist die allgemeine Abel'sche Gruppe in $2m$ Variabeln im $GF[p^n]$ holoedrisch oder hemiedrisch isomorph mit einer gewissen Untergruppe der zweiten componirten Gruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in $2m$ Variabeln im $GF[p^n]$; diese Untergruppe ist dadurch definirt, dass sie eine gewisse Linearfunction als relative Invariante hat. Zum Schluss wird gezeigt, dass die einfache, in der quinären orthogonalen Gruppe im $GF[p^n]$ $(p>2)$ enthaltene Gruppe der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(p^{4n}-1)\,(p^{2n}-1)p^{4n}$$

holoedrisch isomorph mit der einfachen, aus der quaternären Abel'schen Gruppe in demselben Galois'schen Felde sich ergebenden Gruppe der gleichen Ordnung ist. Bezüglich der componirten Gruppe einer Gruppe, die in der Arbeit eine sehr wichtige Rolle spielt, darf Ref. darauf hinweisen, dass diese durch Determinantentransformation (Hurwitz: Math. Ann. **45,** 392; F. d. M. **25,** 171, 1894) aus der ursprünglichen Gruppe gewonnene Gruppe schon auf Weierstrass (Baltzer's Determinanten, S. 55 der 4. Auflage) zurückgeht und sowohl in zahlen- und formentheoretischen Untersuchungen wie auch in solchen aus der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen vielfach verwendet wurde. (Vgl. L. Schlesinger: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, $\mathbf{2}_1$, 125; ferner Encyklopädie: Arithmetische Theorie der Formen von Vahlen, **1,** 593.) Ly.

L. E. Dickson. **Isomorphism between certain systems of simple linear groups.** American M. S. Bull. (2) **6,** 323-328.

In dem Artikel, über welchen in F. d. M. **30,** 143, 1899, referirt ist, hatte der Verf. die Vermutung geäussert, dass die einfache quaternäre hyperorthogonale Gruppe $HO(4,p^{2n})$ in dem $GF[p^{2n}]$ isomorph sei mit der zweiten hypoabelschen Gruppe $SH(6,2^n)$, der orthogonalen Gruppe $O(6,p^n)$, oder der Gruppe $NS(6,p^n)$, je nachdem p^n von der Form 2^n, $4l-1$, $4l+1$ bezw. ist. Für den Fall $p^n=2$ und für den anderen $p^n=3$ wurde die Vermutung bestätigt durch die Aufstellung abstracter Gruppen, die mit den fraglichen linearen Gruppen holoedrisch isomorph sind. Die Rechnungen waren mit Notwendigkeit lang; daher dürfte dieses Verfahren kaum für den Fall des allgemeinen p^n sich eignen. Durch die Correspondenz der in diesen beiden Fällen auftretenden Erzeugenden ist nun der Verf. zu dem im vorliegenden Aufsatze geführten Beweise für den allgemeinen Fall hingeleitet worden. Der Beweis beruht auf der Theorie der zweiten Componirten einer linearen homogenen Gruppe, die der Verf. im American M. S. Bull. (2) **5,** 120-135 (F. d. M. **29,** 119, 1898) und im American M. S. Trans. **1,** 91-96 (vergl. den vorangehenden Bericht) entwickelt hat. Anstatt der hyperorthogonalen Gruppe $HO(4,p^{2n})$ benutzt er die holoedrisch isomorphe hyperabelsche Gruppe $HA(4,p^{2n})$, die als Untergruppe die einfache Abel'sche

Gruppe $A(4, p^n)$ enthält. Die Rechnungen zeichnen sich durch grosse Eleganz aus. Lp.

L. E. Dickson. Determination of an abstract simple group of order $2^7 . 3^6 . 5 . 7$ holoedrically isomorphic with a certain orthogonal group and with a certain hyperabelian group. American M. S. Trans. **1**, 353-370.

Die senäre orthogonale Gruppe im Galois'schen Feld $GF[3]$ und die quaternäre hyperabelsche (hyperorthogonale) Gruppe im $GF[3^2]$ führen auf einfache Gruppen derselben Ordnung $2^7 . 3^6 . 5 . 7$ (vergl. F. d. M. **30**, 137, 139, 1899). Verf. weist den Isomorphismus zwischen diesen zwei einfachen Gruppen nach; die durchgeführten Untersuchungen ermöglichen dabei, von einer jeden Substitution der einen Gruppe zu einer jeden der anderen überzugehen. Beim Beweise spielen die einfache Gruppe der Ordnung 25920, die Dickson schon mehrfach behandelt hat (F. d. M. **30**, 139, 1899), und die in dem vorliegenden Aufsatze construirte abstracte Gruppe, die mit den zu untersuchenden Gruppen isomorph ist, eine wesentliche Rolle. Inzwischen hat Verf., wie er auch in einer Note angiebt, den Isomorphismus zwischen der fraglichen senären Gruppe im $GF[p^n]$ und der quaternären Gruppe im $GF[p^{2n}]$ für alle p^n der Form $4l-1$ bewiesen (vergl. das vorangehende Referat; ferner Dickson: Linear groups. B. G. Teubner, 1901, S. 183). Ly.

L. E. Dickson. Canonical form of a linear homogeneous substitution in a Galois field. American J. **22**, 121-137.

L. E. Dickson. Linear substitutions commutative with a given substitution. Lond. M. S. Proc. **32**, 165-170.

Die von C. Jordan (Traité des substitutions. Paris, 1870, S. 125) für eine lineare homogene Substitution, deren Coefficienten ganze positive, mod. p (p Primzahl) zu nehmende Zahlen sind, gegebene, sehr bekannte Normalform wird vom Verf. für ein beliebiges Galois'sches Feld $[p^n]$ ausgedehnt; der Beweis wird inductiv geführt, ohne etwa den Fall $n=1$ vorauszusetzen. Hierauf werden diejenigen linearen homogenen Substitutionen des Galois'schen Feldes, welche mit einer in der Normalform gegebenen vertauschbar sind, untersucht und ihre explicite Form aufgestellt. Für $n=1$ hat sich bereits C. Jordan (a. a. O. S. 128ff.) mit dieser Aufgabe beschäftigt; hierauf stützt sich Verf. in der ersten Arbeit. Der zweite Aufsatz vereinfacht die Jordan'schen Untersuchungen für commutative Substitutionen und setzt sie dabei bald in erweiterter Weise für das $GF[p^n]$ auseinander. Inzwischen ist der Inhalt der zwei besprochenen Aufsätze in das bei Teubner erschienene Werk des Verf. „Linear groups with an exposition of the Galois field theory“ (Leipzig, 1901), S. 221ff. übergegangen. Ly.

L. E. Dickson. **Concerning the cyclic subgroups of the simple group G of all linear fractional substitutions of determinant unity in two non-homogeneous variables with coefficients in an arbitrary Galois field.** American J. **22**, 231-252.

Verf. beschäftigt sich mit der einfachen Gruppe G der Ordnung

$$N = \frac{1}{d}(p^{3n} - 1)\,(p^{2n} - 1)p^{3n}$$

aller Substitutionen

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},\quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

bei denen alle Coefficienten a_{ij} dem Galois'schen Felde $GF[p^n]$ angehören und die Determinante $|a_{ij}| = 1$ ist; d hat dabei den Wert 1, wenn $p^n = 3^n$ oder $3l - 1$ ist, und den Wert 3, wenn $p^n = 3l + 1$ wird (p Primzahl). Der Fall $n = 1$ ist von Burnside eingehend behandelt worden (Lond. M. S. Proc. **26**; F. d. M. **26**, 171, 1895). Im Gegensatz zu Burnside braucht Dickson nicht $d = 1$ und $d = 3$ gesondert zu behandeln; auch gelingt es ihm, einige Versehen Burnside's zu corrigiren. Die Behandlung geschieht mit Hülfe der Normalformen für lineare homogene Substitutionen im $GF[p^n]$ (vergl. das vorangehende Referat). Für unsere Gruppe lassen sich die Substitutionen in sieben Klassen verteilen; durch Betrachtung dieser sieben Typen wird die Zahl aller cyklischen Untergruppen von G bestimmt. Z. B. enthält G

$$\frac{dN}{3(p^{2n} + p^n + 1)}$$

verschiedene conjugirte cyklische Untergruppen der Ordnung

$$\frac{1}{d}(p^{2n} + p^n + 1),\ \text{ferner}\ \frac{1}{2}\frac{dN}{p^{2n} - 1}$$

verschiedene conjugirte cyklische Untergruppen der Ordnung $\frac{1}{d}(p^{2n} - 1)$. Zum Schlusse werden aus den allgemeinen Resultaten alle cyklischen Untergruppen der Gruppe G der Ordnung $N = 20160$, die $p^n = 2^2$ entspricht, hergeleitet und mit den Untergruppen der alternirenden Gruppe von 8 Symbolen, welche dieselbe Ordnung hat, verglichen. Diese zwei Gruppen differiren mannigfach; z. B. hat die alternirende Gruppe 1344 Substitutionen der Ordnung 5, G hat 2016 cyklische conjugirte Untergruppen der Ordnung 5 mit $4 \cdot 2016$ Substitutionen. Die directe Abzählung der cyklischen Untergruppen ergiebt daher, dass diese zwei einfachen Gruppen, trotzdem sie gleiche Ordnung haben, nicht isomorph sind. (Vergl. Miss Schottenfels, Annals of Math. (2) **1**; Referat unten S. 143). Diese Untersuchungen sind inzwischen in das Buch von Dickson, Linear groups (B. G. Teubner, 1901), S. 242ff., übergegangen.

Ly.

L. E. DICKSON. Proof of the non-isomorphism of the simple Abelian group on $2m$ indices and the orthogonal group on $2m+1$ indices for $m > 2$. Quart. J. **32**, 42-63.

Bisher waren nur zwei einfache Gruppen der gleichen Ordnung $8!/2$, die nicht isomorph sind, bekannt. (Vergl. das vorangehende Referat und das über Miss Schottenfels unten S. 143). Verf. weist in der vorliegenden Arbeit den Nichtisomorphismus für zwei dreifach unendliche Systeme von einfachen Gruppen gleicher Ordnung nach. Aus der Abel'schen Gruppe in $2m$ Variabeln im Galois'schen Felde $GF[p^n]$ ergiebt sich für $p > 2$ eine einfache Gruppe $A(2m, p^n)$ der Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}(p^{n(2m)}-1)\,p^{n(2m-1)}\,(p^{n(2m-2)}-1)\,p^{n(2m-3)}\ldots(p^{2n}-1)\,p^n.$$

(Dickson: Quart. J. **29**; F. d. M. **28**, 136, 1897). Ebenso führt die Betrachtung der orthogonalen Gruppe in $2m+1$ Variabeln im $GF[p^n]$ für $p > 2$ ausser im Falle $p^n = 3$, $m = 1$ zu einer einfachen Gruppe $O(2m+1, p^n)$ der nämlichen Ordnung wie $A(2m, p^n)$. Diese zwei einfachen Gruppen sind nicht isomorph, wenn $m > 2$ ist; die zwei Gruppen $A(2m, p^n)$ und $O(2m+1, p^n)$ stimmen nämlich nicht, wie Verf. zeigt, in den Operationen der Ordnung 2 überein. Hingegen sind die Gruppen $A(2, p^n)$ und $O(3, p^n)$, wie Dickson schon im American J. **21** (1899) bewiesen hat, isomorph. Ebenso sind die zwei Gruppen, $A(4, p^n)$ und $O(5, p^n)$ isomorph (vergl. oben S. 139). Die besprochenen Untersuchungen sind inzwischen in Dickson's Werk „Linear groups" etc. (Leipzig: Teubner. 1901), S. 105 u. S. 309 übergegangen. Ly.

L. E. DICKSON. Proof of the existence of the Galois field of order p^r for every integer r and prime number p. American M. S. Bull. (2) **6**, 203-204.

Der in dieser Note kurz skizzirte Beweis geht inductiv vor. Nimmt man die Existenz des $GF[p^n]$ an, so wird daraus die vom $GF[p^{nq}]$ gefolgert, wo q eine beliebige Primzahl ist. Da nun das $GF[p]$ existirt, indem es das Feld der nach dem Modul p genommenen ganzen Zahlen ist, so folgt daraus, dass das $GF[p^n]$ existirt, und durch eine einfache Induction, dass das $GF[p^r]$ für ein beliebiges r existirt.

Lp.

L. E. DICKSON. Certain subgroups of the Betti-Mathieu group. American J. **22**, 49-54.

Verf. betrachtet gewisse Untergruppen der Betti-Mathieu'schen Gruppe, welche durch gewisse relative Invarianten definirt sind. (Ueber die Betti-Mathieu'sche Gruppe vergl. Encyklopädie **1**, 215, Anm. 57). Die Betti-Mathieu'sche Gruppe ist mit Jordan's linearer homogener Gruppe im Galois'schen Feld $GF[p^n]$ identisch (Dickson: Annals of Math. **11**; F. d. M. **28**, 135, 1897), und daher müssen Untergruppen

der einen Gruppe Untergruppen der anderen entsprechen. Den betrachteten Untergruppen der Betti-Mathieu'schen Gruppe entsprechen solche der linearen homogenen Gruppe, die eine lineare, bezw. quadratische Form invariant lassen. Diese Untersuchungen sind in das inzwischen erschienene Buch „Linear groups" des Verf. (B. G. Teubner, 1901), S. 67 übergegangen. Ly.

L. E. Dickson. Systems of simple groups derived from the orthogonal groups. California Ac. Proc. **1,** 47-57 (1899).

L. E. Dickson. An abstract simple group of order 25920. Lond. M. S. Proc. **32,** 3-10.

Die abstracte Form für die bekannten, zu einander isomorphen Gruppen der Ordnung 25920, welche der Verf. schon in den Lond. M. S. Proc. **31,** 40-45 (F. d. M. **30,** 139, 1899) angegeben hatte, wird nochmals auf andere Weise untersucht; dabei spielt eine Untergruppe der Ordnung 960 eine hervorragende Rolle. Es wird der Isomorphismus der aufgestellten abstracten Gruppe mit der Gruppe der Ordnung 25920, die aus der allgemeinen orthogonalen Gruppe in 5 Variabeln mit Coefficienten mod. 3 resultirt, gezeigt. Die Art der Behandlung weist Verwandtschaft mit C. Jordan's Untersuchung der Gruppe der 27 Geraden einer kubischen Fläche auf. (Traité des substitutions, p. 316-329). Vergl. auch F. d. M. **30,** 141, 1899, die dort besprochene Arbeit von Dickson in C. R. **128.** Ly.

Ida May Schottenfels. Two non isomorphic simple groups of the same order 20160. Annals of Math. (2) **1,** 147-152.

Der Aufsatz, welcher auf Anregung von Moore entstanden ist, weist nach, dass die ternäre lineare gebrochene Gruppe im Galois'schen Felde $[2^2]$ mit der Determinante $+1$ (Bezeichnung wie in den Arbeiten von Dickson; vergl. oben S. 141) nicht holoedrisch isomorph mit der alternirenden Gruppe des Grades 8 ist, trotzdem beide Gruppen einfach und von derselben Ordnung sind. Es giebt also einfache Gruppen derselben Ordnung, die, als abstracte Gruppen aufgefasst, nicht identisch sind. Ly.

Ida May Schottenfels. On groups of order 8!/2. American M. S. Bull. (2) **6,** 440-443.

Im American M. S. Bull. (2) **4,** 495-510 (F. d. M. **29,** 119, 1898) erörtert Dickson den Bau der hypoabelschen Gruppen. Unter den einfachen Gruppen des Systems J kommt eine von der Ordnung 8!/2 vor ($p^n = 2^1$, $m = 3$). Der vorliegende Artikel weist nach, dass diese Gruppe

die alternirende Gruppe $G^{8}_{8!/2}$ ist und erbringt somit einen neuen Beweis für ihre Einfachheit. Lp.

U. SCARPIS. Sui gruppi Abeliani. Batt. G. **38**, 225-231.

Einfacher Beweis des Satzes, dass eine jede commutative Gruppe der Ordnung p^n (p Primzahl) durch eine Basis darstellbar ist und für alle Darstellungen Uebereinstimmung in der Anzahl der Factoren und deren Ordnungen herrscht. Ly.

ED. MAILLET. Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables. S. M. F. Bull. **28**, 7-16.

Verf. hat schon in einer früheren Note (S. M. F. Bull. 1896) eine Gruppe $\mathfrak{D}$ als zerlegbar bezeichnet, wenn man zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der Ordnung >1, die beide $<\mathfrak{D}$ sind, finden kann, dass eine jede Substitution d von $\mathfrak{D}$ das Product einer Substitution a von $\mathfrak{A}$ in eine b von $\mathfrak{B}$ wird; er schreibt dann $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. Maillet sucht nicht nach einem Kriterium, ob eine Gruppe zerlegbar ist, sondern begnügt sich mit der Betrachtung einzelner Gruppen, z. B. der symmetrischen, der alternirenden, einer zusammengesetzten primitiven; er findet, dass alle von ihm untersuchten Gruppen mit alleiniger Ausnahme derjenigen, die aus den Potenzen einer Circularsubstitution der Ordnung p^m (p Primzahl) entsteht, zerlegbar sind. Hieran knüpft sich die Besprechung einiger Eigenschaften zerlegbarer sowie vertauschbarer Gruppen (vergl. wegen dieses Begriffes z. B. Frobenius, Berl. Ber. 1895, S. 166).

Ly.

M. BAUER. Remarque sur la théorie des groupes finis. Nouv. Ann. (3) **19**, 59-66.

Der Verf. verallgemeinert einige von Frobenius (Berl. Ber. 1895, 163-194, 981-993) stammende Theoreme über die Untergruppen einer endlichen Gruppe. Von den erlangten Sätzen seien die folgenden angeführt: „Die Anzahl der Untergruppen der Ordnung n/p einer Gruppe der Ordnung n ist $\equiv 1$ oder 0 (mod. p), je nachdem es unter ihnen invariante Untergruppen giebt oder nicht; p ist dabei, wie auch im folgenden, eine Primzahl. Setzt man

$$n=n'\prod_{i=1}^{i=r} p_i^{\alpha_i},\ n'=ab,$$

sind n' und jedes p_i und ebenso a und b relativ prim, und ist A eine invariante Untergruppe der Ordnung

$$a\prod_{i=1}^{i=r} p_i^{\beta_i}$$

einer Gruppe der Ordnung n, so ist jede Untergruppe, deren Ordnung

ein Divisor von a ist, eine Untergruppe von A. Ist A eine Untergruppe der Ordnung

$$a \prod_{i=1}^{i=r} p_i^{\beta_i},$$

so ist jede invariante Untergruppe, deren Ordnung ein Divisor von a ist, Untergruppe von A." Ly.

M. Bauer. Note sur les groupes d'ordre fini. Nouv. Ann. (3) **19**, 508-509.

M. Bauer. Note sur les groupes d'ordre p^a. Nouv. Ann. (3) **19**, 509-511.

Die erste Note beweist im wesentlichen den folgenden Satz: Sind $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_r$ die Untergruppen der Ordnung p^{a-1} einer Gruppe $\mathfrak{h}$ der Ordnung p^a, so ist

$$r = \frac{p^{a-\gamma}-1}{p-1};$$

dabei bedeutet $p^{a-\gamma}$ die Ordnung der Factorgruppe $\mathfrak{h}/\vartheta$, wenn ϑ der grösste gemeinsame Divisor der Untergruppen $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_r$ ist.

Die zweite Note beschäftigt sich mit der Gruppe $\mathfrak{h}/\vartheta$, die eine Abel'sche Gruppe ist und ausser dem Einheitselement nur Elemente der Ordnung p besitzt. Ly.

F. Gerbaldi. Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. (Parte seconda). Palermo Rend. **14**, 66-114.

Verf. setzt seine Untersuchungen, die sich wie die früheren (Palermo Rend. **12**, 23-94; **13**, 161-199; F. d. M. **29**, 120, 1898; **30**, 147, 1899) durch grossen Formelreichtum auszeichnen, fort. Die fragliche G_{360} wird durch Zunahme der Substitutionen:

$$x_1' = \varepsilon^\lambda x_1,\quad x_2' = \varepsilon^\lambda x_2,\quad x_3' = \varepsilon^\lambda x_3 \qquad (\lambda = 0, 1, 2),$$

wobei ε eine kubische Einheitswurzel ist, zu einer G_{1080} erweitert; für diese stellt Verf. die Fundamentalinvarianten der Ordnungen 6, 12, 30, 45 auf und discutirt dieselben eingehend. Dann spielen gewisse Resolventen sechsten und zehnten Grades, auf welche das Formenproblem der G_{1080} führt, eine wesentliche Rolle. Ly.

P. Fulco. I sistemi gruppali e generatori. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania (4) **12**, 14 S. (1899).

Diese Note knüpft an die frühere an: Sui gruppi e sugli insiemi di operazioni funzionali distributive ad unica determinazione. Acc. Peloritana **13**, 495-535 (F. d. M. **29**, 341, 1898).

Ein „Gruppensystem" („sistema gruppale") ist der Inbegriff der Gruppen, welche aus der Transformation einer Gruppe („Urgruppe",

„gruppo origine“) durch eine Operation und deren Umkehrung entstehen. Ein „erzeugendes System“ („sistema generatore“) ist der Inbegriff der „erzeugenden Mannigfaltigkeiten“ („insiemi generatori“), welche aus einer erzeugenden Mannigfaltigkeit auf die obige Weise entstehen. Es werden hier zuerst die allgemeinen Gruppensysteme (§ I), dann diejenigen, deren Urgruppe ein- (§ II) oder ν-gliedrig (§ III) ist, endlich die erzeugenden Systeme (§ IV) untersucht. Vi.

U. Scarpis. Un teorema sui gruppi d'operazioni d'ordine finito. Batt. G. **38**, 376-378.

Es sei G eine Operationengruppe von endlicher Ordnung n,

$$\sigma = g_1 g_2 \cdots g_\nu$$

ein Product von ν Elementen von G, $\sigma' = g'_1 g'_2 \cdots g'_\nu$ ein ebensolches Product, dessen Factoren sich von denjenigen von σ bloss durch die Anordnung unterscheiden. Es giebt dann eine solche Operation γ von G, dass $\sigma = \gamma\sigma'$; sie möge eine „umkehrende Operation“, insbesondere für $\nu = 2$ eine „binäre umkehrende Operation“ heissen. Nun beweist der Verf., dass die von den binären umkehrenden Operationen von G erzeugte Untergruppe Γ aus sämtlichen umkehrenden Operationen von G, und nur aus diesen, besteht. Vi.

E. H. Moore. Concerning Klein's group of $(n+1)!$ n-ary collineations. American J. **22**, 336-342.

Der Verf. betrachtet die Gruppe der Collineationen, welche einen Punkt $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ in $(y'_0, y'_1, \ldots, y'_n)$ transformiren, wobei $y_i = y'_{a_i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ist und $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine jede der $(n+1)!$ Permutationen der $n+1$ Buchstaben $0, 1, 2, \ldots, n$ bedeutet. Man kann hierbei $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ entweder als Cartesische Punktcoordinaten im R_{n+1} oder als homogene Punktcoordinaten im R_n oder als überschüssige Cartesische Punktcoordinaten im R_n oder als überschüssige homogene Coordinaten im R_{n-1} ansehen. Bei der letzten Interpretation mit der Bedingung $\sum_0^n y_i = 0$ hat man die von Klein betrachtete mit der symmetrischen Gruppe von $n+1$ Dingen holoedrisch isomorphe Gruppe des R_{n-1}. Moore untersucht die den für den $R_{n+1}, R_n, R_n, R_{n-1}$ definirten Gruppen entsprechenden Einteilungen der bezüglichen Räume. Ly.

H. F. Blichfeldt. On a certain class of groups of transformation in space of three dimensions. American J. **22**, 113-120.

Der Verf. weist auf die Klasse aller endlichen continuirlichen Gruppen des n-dimensionalen Raumes hin, bei denen nicht weniger als $m > 1$ Punkte Invarianten haben, während alle Invarianten von $s > m$ Punkten

sich stets durch die Invarianten der Systeme von m Punkten, welche unter den s Punkten enthalten sind, ausdrücken lassen. Für den dreidimensionalen Raum und $m=2$ ist dieses Problem von Lie in seinen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie behandelt worden. (Theorie der Transformationsgruppen, **3**, 399 ff.) Der Verf. untersucht für den dreidimensionalen Raum den Fall $m=3$. Er findet 8-, 7- und 6-gliedrige Gruppen, je nachdem die Anzahl der unabhängigen Invarianten für drei Punkte 1, 2, 3 ist. Ly.

A. Wiman. Bestimmung aller Untergruppen einer doppelt unendlichen Reihe von einfachen Gruppen. Stock. Akad. Bihang **25**, No. 2, 47 S.

E. J. Wilczynski. On an mn^2 parameter group of linear substitutions in mn variables. California Ac. Proc. **1**, 59-62 (1899).

E. Maillet. Sur la classe des groupes finis continus primitifs de transformations de Lie. C. R. **130**, 1602-1603.

Verf. stellt neun Theoreme über die im Titel bezeichneten Gruppen, hauptsächlich die transitiven, auf, in der Absicht, die Definition der Klasse der Transformationsgruppen durch Analogie mit derjenigen der Klasse der Substitutionsgruppen zu präcisiren. Wbg.

E. Maillet. Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions ou de transformations de Lie. C. R. **130**, 1449-1452.

Da die hier ohne Beweise angegebenen Sätze in der umfangreichen Arbeit des Verf. „Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie" (Journ. de Math. (7) **1**, 13-82, 1901), eine ausführliche Darstellung gefunden haben, so soll erst im folgenden Bande der Fortschritte über diese Untersuchungen berichtet werden. Ly.

E. Maillet. Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie. C. R. **130**, 1536-1538.

Der Verf. nennt eine endliche continuirliche Gruppe D décomposable, wenn sie zwei Untergruppen A und B enthält von solcher Beschaffenheit, dass jede Transformation von D dadurch erhalten werden kann, dass man zuerst eine Transformation von A und dann eine von B ausführt; er schreibt in diesem Falle $D=A\cdot B$ und lässt dabei noch die Möglich-

keit zu, dass A und B ihrerseits eine Untergruppe gemein haben. Giebt es eine A und B umfassende Gruppe von der Art, dass $D = A \cdot B$, so nennt er A und B échangeable. Er giebt die auf der Hand liegenden Kriterien dafür an, dass zwei Gruppen A und B échangeable sind, und teilt mit, dass aus den Untersuchungen von Killing und Cartan folgt: Jede endliche continuirliche Gruppe, deren Gliederzahl > 1 ist, ist décomposable, sowie ferner: Die Bestimmung aller transitiven Untergruppen aller zu einer gegebenen Gruppe holoedrisch isomorphen transitiven Gruppen ist enthalten in der Bestimmung aller Décompositions der Gruppe und ist damit gleichbedeutend, wenn die Gruppe einfach ist. Es folgt ein im Grunde selbstverständlicher Satz über die Bedingungen, unter denen zwei verschiedene bei einer transitiven Gruppe invariante Zerlegungen des Raumes in Mannigfaltigkeiten P und Q so beschaffen sind, dass man eine neue invariante Zerlegung erhält, wenn man durch alle Punkte jeder Mannigfaltigkeit P die hindurchgehenden Mannigfaltigkeiten Q legt. Auch der Satz: Jede Gruppe, deren Untergruppen paarweise échangeable sind, ist integrabel, ist selbstverständlich, wenn man bedenkt, dass in jeder solchen Gruppe je zwei infinitesimale Transformationen eine zweigliedrige Gruppe erzeugen, und dass daraus die Zusammensetzung der Gruppen leicht zu bestimmen ist. El.

C. L. Bouton. Problems in the theory of continuous groups. Annals of Math. (2) **1**, 93-96.

Zusammenstellung einiger für Anfänger geeigneten, elementaren Uebungsaufgaben aus der Lie'schen Gruppentheorie und den Lie'schen Integrationstheorien. El.

S. E. Slocum. Note on the chief theorem of Lie's theory of continuous groups. American Ac. Proc. **35**, 239-250.

Ueber den Satz, dass nicht jede endliche Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe: $x' = \lambda x + \mu y$, $y' = \nu x + \varrho y$ $(\lambda\varrho - \mu\nu = 1)$ von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist, hat sich bei einigen amerikanischen Mathematikern eine förmliche Legende gebildet. Immer wieder sagen sie, Study habe den Satz entdeckt, obwohl Study niemals den geringsten Anspruch darauf gemacht hat, und obwohl es keinem Zweifel unterliegt, dass Ref. den Satz zuerst gefunden und auch zuerst veröffentlicht hat. Auch der Verf. der gegenwärtigen Note, ein Schüler H. Taber's, wiederholt diese falsche Behauptung, geht aber in der Verkennung der Thatsachen noch um einen Schritt weiter, indem er sogar behauptet, der erwähnte Satz zeige, dass Lie's Beweis für den zweiten Fundamentalsatz seiner Gruppentheorie eine Lücke enthalte; diese vermeintliche Lücke will er möglichst deutlich sichtbar machen, indem er die Gruppe: $x' = x + a$, $y' = e^a x + b$ ausführlich behandelt, die zugehörigen grundlegenden Differentialgleichungen aufstellt, sie nach

Einführung der kanonischen Parameter integrirt und die zugehörige kanonische Parametergruppe aufstellt. Diese Betrachtungen sind ja für einen Anfänger ganz lehrreich; aber mit dem angeblichen Irrtume Lie's haben sie nichts zu thun; denn Lie hat nie etwas anderes behauptet, als dass bei einer r-gliedrigen Gruppe: $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$, die die identische Transformation und lauter paarweise inverse Transformationen enthält, die zugehörige kanonische Form:

$$x_i' = x_i + \sum_k^{1\cdots n} e_k \xi_{ki} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

alle Transformationen der Gruppe darstellt, die in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation liegen. Es ist ihm nie eingefallen, zu behaupten, aus der kanonischen Form gehe hervor, dass jede Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt sei, und ihm so etwas vorzuwerfen, wie es der Verf. thut, käme darauf hinaus, Lie zu beschuldigen, er habe nicht gewusst, dass die Reihenentwickelungen in der kanonischen Darstellung im allgemeinen nur in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation convergiren, was doch niemand im Ernste zu behaupten wagen wird.

El.

S. E. Slocum. **Supplementary note on the chief theorem of Lie's theory of finite continuous groups.** American Ac. Proc. **35**, 483-485.

Der Verf. knüpft an die vorstehend besprochene Arbeit: „Note on the chief theorem etc.“ an und will den angeblichen Irrtum Lie's beseitigen und den Beweis des Satzes vervollständigen. Dieses unnötige Unterfangen ist vorhin zur Genüge gekennzeichnet; hier braucht daher nur gesagt zu werden, dass die Betrachtungen des Verf. auf die selbstverständliche Bemerkung hinauskommen, dass zwei von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugte endliche Transformationen, nach einander ausgeführt, unter Umständen eine Transformation der Gruppe liefern, von der nicht sicher ist, dass sie von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist.

El.

S. E. Slocum. **On the continuity of groups generated by infinitesimal transformations.** American Ac. Proc. **36**, 85-109.

Der Verf. behauptet, Lie habe sich als Schöpfer und Pionier auf dem Gebiete der Gruppentheorie nicht damit aufgehalten, strenge Beweise für seine Theoreme zu geben. Was von dieser Behauptung zu halten ist, habe ich in dem Bericht über eine andere Note des Verf. (Note on the chief theorem etc.) oben auseinandergesetzt, und ich will daher nur noch einmal betonen, dass alle allgemeinen gruppentheoretischen Sätze Lie's selbstverständlich so gemeint sind, dass sie nur innerhalb gewisser Bereiche gültig sind, nämlich in einer gewissen Umgebung einer Stelle des betrachteten Raumes und für solche Transformationen der betrachteten

Gruppe, deren Parameter in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation liegen. Es wäre unbillig, von Lie zu verlangen, dass er diese Beschränkungen bei jedem einzelnen Satze wiederholen solle; der aufmerksame Leser wird sie selbst immer in Gedanken hinzufügen. — Die vorliegende Arbeit ist ihrem Inhalte nach sehr nahe verwandt mit der im folgenden Referate besprochenen von H. Taber; der Verf. leitet einiges etwas anders ab als Taber, bringt aber gegenüber dieser Arbeit, die übrigens eine von ihm herrührende Tabelle enthält, nichts wesentlich Neues. Es müsste denn die Bemerkung neu sein, dass die Transformationen der adjungirten Gruppe, die durch die Gleichung $T_{a'} = T_a^{-1} T_a T_\alpha$ definirt ist, unter T_α die kanonische Form einer r-gliedrigen Gruppe verstanden, nicht alle linear und homogen zu sein brauchen. Ferner bespricht der Verf. ausführlich einige Gruppen von reellen Transformationen und untersucht, welche Transformationen jeder Gruppe von einer reellen infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt sind. El.

H. Taber. On the singular transformations of groups generated by infinitesimal transformations. American Ac. Proc. 85, 577-597.

Der Verf. ist bestrebt, die Unterschiede, die zwischen der Lie'schen kanonischen Form einer Gruppe und zwischen einer alle Transformationen der Gruppe umfassenden analytischen Darstellung der Gruppe bestehen, möglichst vollständig zu entwickeln und auf ihren inneren Grund zurückzuführen. Es ist dabei anzuerkennen, dass er von der kanonischen Form ganz correct sagt, dass sie die Gruppe nur in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation darstellt, was auch Lie selbstverständlich immer gemeint hat, und dass er nirgends von einem angeblichen Irrtume Lie's spricht, wie es sich sein Schüler Slocum zu thun erlaubt. Jedoch geht auch er auf die eigentlichen functionentheoretischen Schwierigkeiten der Frage nicht ein; denn er setzt immer stillschweigend voraus, dass man für die Gruppe eine Darstellung hat, die wirklich alle Transformationen der Gruppe umfasst, und auf die Beschaffenheit der auftretenden Functionen, soweit sie von den x abhängen, geht er gar nicht ein, vermutlich weil er immer nur projective Gruppen im Auge hat, was aber doch nicht zulässig ist, solange noch nicht bewiesen ist, dass es wirklich projective Gruppen von jeder beliebigen Zusammensetzung giebt. Der Verf. nennt jede Transformation der Gruppe, die von keiner infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist, die also aus keiner eingliedrigen Untergruppe dadurch erhalten werden kann, dass man in der kanonischen Form dieser Untergruppe dem kanonischen Parameter t einen endlichen Wert erteilt, wesentlich singulär. Eine Gruppe, die derartige Transformationen enthält, nennt er discontinuirlich, was mir nicht sehr glücklich zu sein scheint. Er geht nun von der kanonischen Form:

$$x_i' = x_i + \sum_k^{1\cdots r} a_k \xi_{ki}(x) + \cdots$$

der Gruppe aus und bezeichnet diese Transformation mit T_a. Vermöge der Gleichungen

$$T_a^{-1}\, T_{a+\delta a} = T_{b\delta t}$$

construirt er die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe in der Form:

$$b_j \delta t = \sum_k^{1\dots r} A_{jk}(a)\delta a_k,$$

leitet die bereits von Schur aufgestellten Ausdrücke für die Functionen A_{jk} ab und bestimmt die schon vom Ref. angegebenen Nullstellen der Determinante Δ_a der A_{jk}, die er kritische Werte der a nennt. Ist $\Delta_a \neq 0$, so ist $T_a T_{bt}$ bei beliebiger Wahl der b stets von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt, wenn nur t klein genug ist. Für ein kritisches Wertsystem der a kann es vorkommen, dass die Transformation $T_a T_{bt}$ bei geeigneter Wahl der b wesentlich singulär ist, wie klein auch t sein mag. In diesem Falle nennt der Verf. T_a ausserwesentlich singulär. Bei zwei im Sinne von Lie gleich zusammengesetzten Gruppen brauchen die endlichen Gleichungen der kanonischen Parametergruppen nicht vollständig übereinzustimmen, da die kanonische Parametergruppe aus mehreren getrennten Scharen von Transformationen bestehen kann und die Zahl dieser Scharen für die beiden Gruppen verschieden sein kann. Es kann daher vorkommen, dass von zwei gleich zusammengesetzten Gruppen die eine wesentlich singuläre Transformationen enthält, die andere nicht. Ist $\Delta_a \neq 0$, so ist T_a mit jeder Transformation T_{bt} (t beliebig) vertauschbar dann und nur dann, wenn die infinitesimalen Transformationen $\Sigma a_k X_k f$, $\Sigma b_k X_k f$ vertauschbar sind. Ist $\Delta_a = 0$, so ist dazu eine andere Bedingung notwendig und hinreichend, die der Verf. aufstellt. Ist $\Delta_b = 0$ und $T_a = T_{a'}$, so ist $T_a T_{a't} = T_{a't} T_a$ für jedes t; aber nur, wenn die infinitesimalen Transformationen $\Sigma a_k X_k f$, $\Sigma a'_k X_k f$ vertauschbar sind, folgt $T_{a-a'} = 1$. Der Verf. bespricht endlich die adjungirte Gruppe. Enthält diese wesentlich singuläre Transformationen, so gilt das auch von der Gruppe selbst; enthält sie keine, so kann es gleichwohl in der Gruppe selbst deren geben. Ist die adjungirte Gruppe r-gliedrig, so sind die endlichen Transformationen der zu ihr gehörigen kanonischen Parametergruppe besonders wichtig; denn sie bestehen im allgemeinen aus einer grösseren Anzahl getrennter Scharen von Transformationen als die kanonischen Parametergruppen der andern zu derselben Zusammensetzung gehörigen Gruppen. Den Schluss der Arbeit bildet eine von Slocum berechnete Tabelle, in der die besprochenen Erscheinungen an den verschiedenen Zusammensetzungen der Gruppen von 2, 3, 4 Parametern illustrirt werden, auch unter Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse. El.

H. Taber. **On the singular transformations of groups generated by infinitesimal transformations.** American M. S. Bull. (2) **6**, 199-203.

Nachdem der Verf. die Begriffe der wesentlich singulären und der

nicht-wesentlich singulären Transformation definirt hat, teilt er mehrere diese Transformationen betreffenden Sätze mit, z. B. dass jede Transformation der Gruppe G, insbesondere jede wesentlich oder nicht-wesentlich singuläre Transformation, durch die Composition zweier nicht singulären Transformationen erhalten werden kann. Lp.

H. B. Newson. On singular transformations in real projective groups. American M. S. Bull. (2) 6, 431-439.

Eine singuläre Transformation in einer continuirlichen Gruppe ist als eine solche definirt worden, die nicht aus einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt werden kann. In Amerika sind neuerdings die Arbeiten von Rettger, Williams, Taber (vergl. die bezüglichen Referate in diesem und im vorigen Bande) erschienen, die sich mit der Frage der singulären Transformationen in continuirlichen Gruppen und besonders in den Untergruppen der projectiven Gruppe beschäftigen. Die Autoren dieser Arbeiten benutzen alle dieselbe Methode, nämlich Lie's Theorie der continuirlichen Gruppen, und sehen die Variabeln und die Parameter als complexe Zahlen an. In der vorliegenden Abhandlung werden jene Transformationen in reellen projectiven Gruppen behandelt, welche nicht aus den reellen infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen erzeugt werden können, und zwar wird die Erörterung auf reelle projective Transformationen in einer und in zwei Dimensionen beschränkt. Die Methode gestattet eine sofortige Ausdehnung auf drei und mehr Dimensionen.

Lehrsätze: I. Bei einer Dimension sind alle reellen hyperbolischen Transformationen mit positivem k, alle reellen elliptischen und parabolischen Transformationen nicht-singulär; alle hyperbolischen Transformationen mit negativem k sind singuläre Transformationen ($k =$ Doppelverhältnis). II. Jede reelle elliptische projective Transformation der Ebene gehört zu irgend einer Parametergruppe und kann aus der infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt werden; dasselbe gilt für jede hyperbolische Transformation, für welche k und k' beide positiv sind. Alle anderen hyperbolischen Transformationen sind singulär, und viele dieser singulären Transformationen gehören nicht zu einparametrigen Gruppen. Lp.

K. Zindler. Ueber die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen in einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe von Punkttransformationen. Math. Ann. 54, 325-328.

Da jede dreigliedrige Gruppe von Punkttransformationen bei geeigneter Wahl der Veränderlichen auf eine Gruppe in höchstens vier Veränderlichen zurückführbar ist, so hat sich der Verf. die Frage vorgelegt, ob überhaupt zu jedem r eine bestimmte Zahl n angebbar ist derart, dass jede r-gliedrige Gruppe bei geeigneter Wahl der Veränderlichen auf

eine Gruppe in höchstens n Veränderlichen zurückgeführt werden kann. Er zeigt hier aber nur, dass diese Zahl n für ungerades r nicht kleiner sein kann als $\frac{1}{4}(r+1)^2$ und für gerades r nicht kleiner als $\frac{1}{4}r(2r+1)$. Er construirt zu diesem Zwecke eine r-gliedrige Gruppe von der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}, \quad \sum_{i=1}^{\varrho} w_{k_\varrho+i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=0,1,\ldots,r-\varrho-1)$$

mit den $n=\varrho(r+1-\varrho)$ Veränderlichen x_i und $\omega_{k_\varrho+i}$, und er zeigt, dass es hier nicht möglich ist, durch Einführung neuer Veränderlichen die Zahl der wirklich auftretenden Veränderlichen zu verringern. Die vorhin mitgeteilten unteren Grenzen für n ergeben sich hieraus, wenn man ϱ so wählt, dass n möglichst gross ausfällt. El.

K. Carda. Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Geraden und der Ebene. Monatsh. f. Math. 11, 31-58.

Im ersten Teile der Arbeit bestimmt der Verf. alle algebraischen Gruppen auf der Geraden. Er zeigt, dass jede Gruppe dieser Art mit mehr als einem Parameter durch algebraische Transformation eine der beiden Lie'schen Normalformen p, xp und p, xp, x^2p erhalten kann, bestimmt dann auf einem neuen Wege die Typen von algebraischen eingliedrigen Gruppen, die im Grunde schon Weierstrass ermittelt hat, und findet die drei Typen:

$$p;\ xp;\ \sqrt{x(1-x)(1-cx)}\cdot p \qquad (c \neq 0, 1).$$

Hieran schliesst sich eine interessante Untersuchung über die Differentialgleichung n-ter Ordnung: $X^n\xi=1$, wo $Xf=\xi(x)\frac{df}{dx}$ und $XX^mf = X^{m+1}f$ gesetzt ist. Der Verf. zeigt, dass diese Differentialgleichung lauter algebraische Integralcurven vom Geschlechte Null besitzt, und dass man ihre allgemeine Lösung in sehr einfacher Weise finden kann, indem man x und ξ als ganze rationale Function einer unabhängigen Veränderlichen darstellt. Die directe Integration der Gleichung führt auf pseudoabelsche Integrale, was der Verf. im Falle $n=3$ ausführlich entwickelt. Der zweite Teil der Arbeit behandelt die algebraischen Gruppen der Ebene. Der Verf. beschränkt sich auf den Fall, dass die Gruppe gar keine oder nur eine oder zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung invariant lässt, und zeigt, dass jede algebraische Gruppe dieser Art durch eine algebraische Transformation auf eine der von Lie angegebenen Normalformen gebracht werden kann, wobei selbstverständlich die Lie'schen Normalformen, die keine algebraischen Gruppen liefern, auszuschliessen sind. Nur einen Fall hat der Verf. noch nicht erledigt, nämlich die Bestimmung aller algebraischen Gruppen, die mit der Gruppe:

$$p,\ 2xp+yq,\ x^2p+xyq$$

ähnlich sind; hier bleibt noch die Möglichkeit offen, dass die p entsprechende

infinitesimale Transformation der Gruppe transcendente Bahncurven besitzt. Auf diesen Punkt will der Verf. später zurückkommen. El.

H. von Koch. Föreläsningar öfver Teorin om Transformations-grupper. Stockholm. 189 S. 4°.

B. Determinanten.

E. Pascal. Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. Leipzig: B. G. Teubner, XVI + 266 S. 8°. (Teubner's Samml. v. Lehrbüchern. Bd. III.)

Mehr und mehr dringt auch bei uns in Deutschland die Erkenntnis durch, dass für die Verbreitung der Forschungsergebnisse die Form des Lehrbuchs geeigneter ist als die Form der Abhandlung. Kann einerseits durch die letztere am besten verhindert werden, dass Dinge, die schon längst bekannt sind, als neu veröffentlicht werden, so bietet andererseits die Lehrbuchdarstellung die Möglichkeit, den neuen Resultaten die gebührende Stellung in der Theorie zuzuweisen. Als ein erfreuliches Zeichen dieser fortschreitenden Erkenntnis ist der Plan der Firma B. G. Teubner zu begrüssen, eine Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen ins Leben zu rufen. Eines der ersten Werke dieser Sammlung ist das vorliegende.

Der Verf. hat es sich zur Aufgabe gemacht, eine grosse Reihe von Specialuntersuchungen über die Determinanten, welche den letzten beiden Jahrzehnten angehören und noch nicht Eingang in die Lehrbücher gefunden haben, auf knappem Raum zur Darstellung zu bringen.

Nach einem kurzen historischen Ueberblick bringt der erste Teil (S. 1-35) die Grundlagen des Rechnens mit Determinanten. Im zweiten (S. 36-254) finden sich mit allen Einzelheiten bibliographischer Anmerkungen die oben genannten Einzelforschungen besprochen.

Dass bei dem Umfange der Determinantenlitteratur dem Verf. manche Theoreme entgangen sind, die, dem Charakter des Buches entsprechend, hätten erwähnt werden müssen, ist wohl begreiflich; und es kann dem Verf. nur angenehm sein, Ausstellungen zu hören, um sein verdienstvolles Werk auch inhaltlich immer vollständiger zu gestalten. Referent begnügt sich an dieser Stelle mit zwei Bemerkungen. Erstens ist es auffallend, dass der Verf. über die Auffassung der Determinanten, wie sie von Grassmann herrührt, kein Wort verliert. Und doch gewinnt die Theorie der Determinanten auf Grund des Grassmann'schen Calculs eine überraschende Einfachheit und Durchsichtigkeit (vgl. u. a. F. Caspary: Darboux Bull. (2) **13,** 1889). Zweitens sei darauf hingewiesen, dass der Verf. auf jene Ausgestaltung nicht eingeht, welche die Theorie der ortho-

gonalen Determinanten nach der Seite des Zusammenhanges zwischen den orthogonalen Sechzehner- und Neunersystemen gefunden hat, wobei man zu Resultaten gelangt ist, die sich für die Mechanik als fruchtbar erwiesen haben. (Vgl. z. B. Journ. für Math. **118**, 224-233.)

Angehängt sind dem Werk ein Verzeichnis der Litteraturnachweise und ein Sachregister, welche bei Benutzung desselben wesentliche Dienste leisten.

Die vorliegende deutsche Ausgabe schliesst sich, abgesehen von mehreren Aenderungen und Zusätzen des Verf., im Text der Urschrift eng an und liest sich recht fliessend. Jhk.

E. H. Moore. **A fundamental remark concerning determinantal notation and the evaluation of an important determinant of special form.** Annals of Math. (2) **1**, 177-188.

Für ein von Metzler gefundenes Determinantentheorem werden mehrere Beweise erbracht. Von diesem Theorem sei hier der folgende Specialfall mitgeteilt: Das Product, gebildet aus n Determinanten, jede der Ordnung m, und m Determinanten, jede der Ordnung n, lässt sich als eine Determinante der Ordnung mn darstellen, deren Elemente Producte von zwei Factoren bilden. Jhk.

G. Macloskie. **A method of solving determinants.** Annals of Math. (2) **1**, 74-76.

Darlegung einer bekannten einfachen Methode zur Auswertung von Determinanten. Jhk.

H. von Koch. **Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis.** Acta Math. **24**, 89-122.

Angeregt durch eine Bemerkung von Cazzaniga (Annali di Mat. (3) **2**), untersucht der Verf. die Bedingungen, unter welchen sich das Multiplicationstheorem $(AB = C)$ auf die unendlichen Determinanten anwenden lässt. Dabei spielt eine Zahl n, welche als das Geschlecht der Determinanten bezeichnet wird, eine besondere Rolle. Während sich die genannten Bedingungen auf Determinanten von endlichem Geschlecht beziehen, beschäftigt sich der Verf. im zweiten Teil der Arbeit mit einer neuen Klasse unendlicher Determinanten, die im allgemeinen unendlich hohes Geschlecht haben. Diese Klasse wird definirt durch das Theorem: Damit die Determinante der A_{ik} und alle ihre Minoren absolut convergiren, genügt es, dass das Product der Diagonalglieder ΠA_{ii} absolut convergire, und dass die nichtdiagonalen Glieder jeder Reihe dem absoluten Werte nach kleiner als die Glieder einer gegebenen absolut convergenten Reihe sind. Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennt der Verf. die Determinante

der A_{ik} hypernormal. Die hypernormalen Determinanten erweisen sich von Bedeutung beim Studium gewisser Systeme linearer Differentialgleichungen von unendlich hoher Ordnung. Jhk.

Nanson. On certain determinant theorems. J. für Math. **122,** 179-185.

Die Arbeit bezieht sich in der Hauptsache auf Theoreme, von denen Netto im J. für Math. **114,** 345-352 (F. d. M. **26,** 179, 1895) handelt. Die meisten derselben fliessen unmittelbar, wie der Verf. hervorhebt, aus einem von Muir 1881 aufgefundenen Gesetz, dem „Gesetz der Ergänzung", welches sich so aussprechen lässt: In jeder homogenen Relation zwischen den Minoren einer Determinante kann jeder Minor durch seinen „Cofactor" ersetzt werden, wenn nur das so gewonnene Resultat durch Multiplication jedes Termes mit der geeigneten Potenz der ursprünglichen Determinante homogen gemacht wird. Dabei bezeichnet der Verf. als Cofactor den Coefficienten des Minors in der Laplace'schen Entwickelung einer Determinante.

Der Verf. legt den Zusammenhang dieses Gesetzes mit Theoremen von Sylvester, Franke, Kronecker, Van Velzer und Netto dar. Jhk.

F. J. Studnička. Ueber summatorische Determinanten überhaupt und über figurirte insbesondere. Rozpravy **9,** No. 4, 8 S. (Böhmisch).

Der Verf. macht auf eine besondere Determinantengattung aufmerksam, deren erste Zeile lautet: $a_1\ a_2, \ldots, a_n$ und die r-te:

$$S_1^{r-1}, S_2^{r-1}, \ldots, S_n^{r-1}$$

wobei $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ und $S_k^i = S_1^{i-1} + S_2^{i-1} + \cdots S_k^{i-1}$, unter $i-1$ der Iterationsexponent verstanden. Diese Determinanten nennt der Verf. „summatorische" Determinanten, und er entwickelt einige Eigenschaften derselben, namentlich derjenigen unter ihnen, deren erste Zeile aus lauter Einsen besteht, und deren übrige folglich aus figurirten Zahlen zusammengesetzt sind, aus welchem Grunde er ihnen den Namen „figurirte" Determinanten beilegt. Sda.

F. J. Studnička. Ueber Facultätscoefficienten. Rozpravy **9,** No. 17, 10 S. (Böhmisch.)

Nach einem kurzen historischen Ueberblicke folgt der Ausdruck für den Coefficienten einer Facultät in Form eines Quotienten zweier Potenzdeterminanten; recurrenter Ausdruck für die Facultätscoefficienten und Aufstellung eines dem Pascal'schen ähnlichen Dreieckes. Zusammenhang zwischen den genannten Coefficienten und den binomischen Coefficienten. Anwendung auf die Theorie der arithmetischen Reihen, Auswertung von

Potenzdeterminanten, deren Elemente arithmetische Reihen erster Ordnung darstellen, mit Hülfe von Facultätscoefficienten. Sda.

V. JUNG. **Bemerkung über eine Potenzdeterminante.** Casopis **29**, 41-42. (Böhmisch.)

Ausgehend von einem Lehrsatze über Potenzdeterminanten, der von Studnička stammt, gelangt der Verf. zu der Formel:

$$\sum_{k=0}^{2\mu} (-1)^k \frac{(2\mu)^k}{k+2} K_{2\mu-k} = 0;$$

hierbei bedeutet K_{n-k} die Summe der Combinationen ohne Wiederholung der $(n-k)$-ten Klasse der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. Sda.

F. SIBIRANI. **Su alcuni determinanti.** Periodico di Mat. (2) **2**, 247-252.

Der Verf. behandelt in diesem Aufsatze solche Determinanten, bei denen ein Element a_{rs} eine Function der beiden ganzen Zahlen r und s ist, die seinen Platz in dem Schema der Determinante bestimmen. Nach Aufstellung einiger Sätze über verschwindende Determinanten dieser Gattung wird diejenige Determinante untersucht, bei welcher $a_{rs} = \{f(r)\}^s$ ist, insbesondere $a_{rs} = (r+s)^m$, wobei die Fälle $m < n-1$, $m = n-1$, $m > n-1$ zu unterscheiden sind. Die Auswertung kommt auf diejenige der Potenzdeterminanten zurück. Lp.

E. VIVANTI. **Remarque sur un déterminant spécial.** Progreso mat. (2) **2**, 13-14.

Bestimmung des Wertes der Determinante von der Ordnung $m+n$:

$$D = \begin{vmatrix} x^n & \binom{n}{1} x^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n-1} x & \binom{n}{n} & & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & x^n & \cdots & \binom{n}{n-2} x^2 & \binom{n}{n-1} x & \binom{n}{n} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots x^n & & \binom{n}{1} x^{n-1} \cdots\cdots & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n} \\ a_m & -a_{m-1} \cdots & \mp a_1 & \pm a_0 & 0 & & 0 \cdots 0 \\ 0 & a_m & -a_{m-1} \cdots & \mp a_1 & \pm a_0 & & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & & a_m & -a_{m-1} \cdots & \mp a_1 & & \pm a_0 \end{vmatrix}.$$

Die ersten n Zeilen enthalten $m-1$ Nullen, die folgenden Zeilen $n-1$ Nullen. Es ist

$$D = (-1)^n (a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \cdots + a_m)^n.$$

Tx. (Lp.)

L. Crawford. On the evaluation of a certain determinant. Edinb. M. S. Proc. **18**, 25-27.

Die Determinante ist

$$\frac{\partial(\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23})}{\partial(r_{12}, r_{13}, r_{23})},$$

wo $\xi_{12} = R_{12}/(R_{11}R_{22})^{\frac{1}{2}}$ etc. und R_{pq} die mit passendem Zeichen versehene Subdeterminante des Elementes in der p-ten Zeile und q-ten Colonne der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

ist. Die Auswertung geschieht vermittelst der Formeln der sphärischen Trigonometrie. Die Determinante ist ein besonderer Fall der von Berry in Cambr. Proc. **10** behandelten Determinante. Gbs. (Lp).

T. Cazzaniga. Qualche complemento al teorema di Hunyady su certi determinanti. Periodico di Mat. (2) **3**, 17-22.

Gegeben sei eine beliebige Determinante $D = |a_{ik}|$ von der Ordnung n $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$; der Hunyady'sche Lehrsatz zeigt, wie eine gewisse Determinante $\varDelta$, die auf passende Weise aus den Elementen a_{ik} gebildet ist, durch eine Potenz von D ausdrückbar ist. Der Verf. bemerkt, dass die algebraischen Ergänzungen erster Ordnung in $\varDelta$ einen eleganten Ausdruck als Function der Determinante D und ihrer Ergänzungen erster Ordnung gestatten. Diese Untersuchung nebst den aus ihr fliessenden Beziehungen bildet den Gegenstand des Aufsatzes. Lp.

J. Neuberg. Question 14167. Ed. Times **72**, 39-40.

Ist $H = |a_i b_i c_i|$ $(i = 1, 2, 3)$, und sind A_i, B_i, C_i die Coefficienten von a_i, b_i, c_i in H, so ist

$$B_1 C_2 A_3 - B_2 C_3 A_1 = H(b_1 c_2 a_3 - b_2 c_3 a_1).$$

Beweise von Jan de Vries, G. Birtwistle und von Neuberg selbst. Lp.

R. Hedrick. On three dimensional determinants. Annals of Math. (2) **1**, 49-67.

Der Verf. untersucht die kubischen Determinanten, welche zuerst von de Gasparis und später besonders von Gegenbauer betrachtet worden sind, indem er eine neue Definition zu Grunde legt. Eine Reihe der über sie veröffentlichten Theoreme wird, unter Angabe der Verfasser-

schaft, zusammengestellt, insbesondere die auf die „Hesse'sche Covariante von n Formen mit n Variabeln“ bezüglichen. Zum Schluss geht der Verf. auf die Analogie der kubischen Determinanten mit den gewöhnlichen Producten ein. Bezeichnet $[abc\cdots]$ eine kubische Determinante n-ter Ordnung, so gelten für sie die Gesetze:

$$[ab]=[ba],\ [(a+b)c]=[ac]+[bc].$$

Allgemein stellt der Verf. das Analogiegesetz auf, dass jeder homogenen Formel der gewöhnlichen Algebra ein Theorem über kubische Determinanten entspricht, z. B.:

$$[(x+y+z)^3]-[x^3]-[y^3]-[z^3]\equiv 3[(y+z)(z+x)(x+y)].$$

Jhk.

T. Cazzaniga. Précis d'une théorie élémentaire des déterminants cubiques d'ordre infini. Math. Ann. **53**, 272-288.

Die unendlichen kubischen Determinanten treten hier zum ersten Mal in der Litteratur auf. Der Verf. untersucht, welche der für die unendlichen quadratischen Determinanten bekannt gewordenen Eigenschaften bei den kubischen erhalten bleiben, bezw. wie sich dieselben modificiren. Als allgemeine Eigenschaften findet er: 1. Der Wert einer convergenten kubischen Determinante ändert sich nicht, wenn man ein willkürliches Diagonalglied zum Anfangsglied wählt. 2. In einer convergenten kubischen Determinante darf man die Schichten eines Systems nicht mit denen eines anderen vertauschen. 3. Vertauscht man zwei parallele Schichten, die der festen Indexgruppe nicht entsprechen, so ändert die Determinante $|a_{ikl}|$ $(i,k,l=-\infty\cdots+\infty)$ ihr Vorzeichen; gehören die Schichten zu der festen Indexgruppe, so bleibt die Determinante unverändert.

Es folgt eine Untersuchung der Convergenz- und der Multiplicationsregeln. Insbesondere studirt der Verf. den Fall der Multiplication einer quadratischen mit einer kubischen Determinante, die als normal oder als normaloïd im Sinne von Helge von Koch vorausgesetzt werden.

Jhk.

Ferber. Application du symbole des déterminants positifs. S. M. F. Bull. **28**, 128-130.

Der vom Verf. in S. M. F. Bull. **27**, 285-288 (F. d. M. **30**, 157, 1899) entwickelte Algorithmus der „positiven Determinanten“ (welche dadurch charakterisirt sind, dass alle Glieder einer in bekannter Weise entwickelten Determinante das positive Vorzeichen erhalten) wird u. a. benutzt, um die Summe der p-ten Potenzen der $n-1$ ersten Zahlen zu finden.

Jhk.

V. Jamet. Sur la division des polynômes entiers. Marseille Ann. **8**, 151-161 (1898).

Die Lehrbücher der elementaren Algebra begnügen sich in dem Kapitel der Division zweier ganzzahligen Polynome, die nach Potenzen einer und derselben Variable geordnet sind, damit, die Möglichkeit der Zerlegung des Dividendus nachzuweisen, ohne den allgemeinen Ausdruck des Quotienten und des Restes explicite anzugeben. Der Verf. füllt diese Lücke aus und teilt das Bildungsgesetz dieser beiden Polynome mit.

In den zwei Determinanten der No. 3 sind übrigens mehrere Druckfehler stehen geblieben. So muss es in der zweiten Horizontalen der beiden heissen $2a$ und $(p-1)a^{p-2}$ statt a und a^{p-2} und in einer späteren Horizontalen der ersten Determinante $2b$ und $(p-1)b^{p-2}$ statt b und b^{p-2}. Jhk.

H. S. White. Two elementary geometrical applications of determinants. Annals of Math. (2) **1**, 103-107.

Die Ergebnisse dieser Arbeit finden sich umfassender bereits in den Abhandlungen von Hunyady (J. für Math. **83**), Mertens (ebenda **84**), Pasch (ebenda **89**) und Caspary (ebenda **92** und **95**). Jhk.

H. B. Newson. On the volume of a polyhedron. Annals of Math. (2) **1**, 108-110.

Die Inhaltsformeln für Dreieck und Tetraeder aus der analytischen Geometrie werden in bekannter Weise für Polygon und Polyeder verallgemeinert. Jhk.

G. Giordano. Sui determinanti funzionali e sulle matrici Jacobiane. Batt. G. **38**, 210-216.

Aus der Formentheorie ist bekannt: 1. dass zwei binäre Formen gleichen Grades, deren Functionaldeterminante identisch verschwindet, sich nur um eine Constante unterscheiden; 2. dass eine binäre Form n-ten Grades sich von der h-ten Potenz einer binären Form hn-ten Grades nur um eine Constante unterscheidet, falls die Functionaldeterminante der beiden Formen identisch verschwindet; und umgekehrt. Der Verf. verallgemeinert diese vier Sätze auf Formen von n Variabeln, wobei an die Stelle der Functionaldeterminante die Jacobi'sche Matrize tritt. Jhk.

M. Bôcher. On linear independence of functions of one variable. American M. S. Bull. (2) **7**, 120-121.

Sind $u_1, u_2, \dots, u_n$ einwertige Functionen der reellen Veränderlichen x, die in jedem Punkte eines gewissen Intervalles definirt sind und in jedem Punkte dieses Intervalles Ableitungen der $n-1$ ersten Ordnungen besitzen, und ist es möglich, die letzte Reihe und eine der Colonnen der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

derart zu tilgen, dass kein Punkt des fraglichen Intervalles vorhanden ist, in welchem die verbleibende Determinante und ihre Ableitung zugleich verschwinden, so sind, wenn D in jedem Punkte des Intervalles verschwindet, die Functionen $u_1, u_2, \dots, u_n$ linear abhängig in dem ganzen Intervalle. Lp.

Weitere Litteratur.

B. Borini. I continuanti. Forli: Medri. 117 S. 4°.

H. von Koch. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations fonctionnelles. Stockh. Akad. Bihang **25**, No. 5, 24 S.

W. H. Metzler. On a determinant each of whose elements is the product of k factors. Amer. Math. Monthly **7**, 151-153.

Th. Muir. On certain aggregates of determinant minors. Edinb. Proc. **23**, 142-154.

Th. Muir. On Jacobi's expansion for the difference product when the number of elements is even. Edinb. Proc. **23**, 133-141.

Th. Muir. The multiplication of an alternant by a symmetric function of the variables. Edinb. Proc. **22**, 539-542 (1899).

Th. Muir. On a development of a determinant of the mn^{th} order. Edinb. Trans. **39**, 623-628.

C. Prang. Einführung in die Theorie und den Gebrauch der Determinanten. Berlin: Mayer & Müller. IV + 53 S. gr. 8°.

C. Elimination und symmetrische Functionen.

L. Gegenbauer. Ueber die Mac-Mahon'sche Verallgemeinerung der Newton-Girard'schen Formeln. Amst. Versl. **9**, 332-336.

Mac-Mahon (F. d. M. **16**, 129, 1884) hat die Formel aufgestellt und mit Hülfe von Differentialoperatoren bewiesen:

$$\text{(1)} \qquad S^m_{m+r} - f_1 S^m_{m+r-1} + f_2 S^m_{m+r-2} - \dots + (-1)^r f_r S^m_m = (-1)^r \frac{(r+m)!}{r!\,m!} f_{m+r}.$$

Hier bedeutet S^i_k die symmetrische Function k-ter Dimension von $x_1, x_2, \dots, x_n$, wo in jedem Gliede i verschiedene der x vorkommen, so dass $S^i_i = f_i$ die elementaren symmetrischen Functionen der x bedeuten, S^1_k deren k-te Potenzsummen. Die bekannten Newton-Girard'schen

Formeln gehen für $m = 1$ aus (I) hervor und werden am einfachsten durch Vergleichung der Potenzen von x aus der Identität:

$$\text{(II)}\quad f'(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_\lambda},\quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

erhalten. Der Verf. differentiirt diese Identität ein-, zwei-, ..., $(m-1)$-mal und erhält so eine zu (II) analoge doppelte Darstellung der zweiten, dritten, ..., m-ten Ableitung von $f(x)$. Entwickelt man die rechten Seiten nach Potenzen von x und vergleicht wiederum, so zeigt sich, dass die Formeln (I) für ein bestimmtes m gelten (bei beliebigen r und $n \geqq m+r$), wenn sie für alle kleineren m richtig sind. Da letzteres aber für $m = 1$ der Fall ist, so sind die Formeln (I) auf dem angegebenen elementaren Wege vollständig bewiesen. My.

J. B. d'Almeida Arez. Sobre uma formula de Waring. Teixeira J. **14,** 117-120.

Der Verf. giebt einen Beweis der Formel, vermöge deren Waring die Coefficienten der algebraischen Gleichungen als Functionen der Summen gleich hoher Potenzen der Wurzeln ausgedrückt hat. Tx. (Lp.)

P. Gordan. Ueber die symmetrischen Functionen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 178-179.

Zur Berechnung der Resultante zweier Gleichungen

$$f_1(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i),\quad f_2(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - \beta_k),$$

wird eine Resolvente:

$$\varphi = \prod_{i,k}\left(x - \frac{\beta_k}{\alpha_i}\right) = x^{m\cdot n} + c_1 x^{m\cdot n-1} + \cdots + c_{m\cdot n}$$

benutzt. Da die Coefficienten c durch die Potenzsummen der Wurzeln von f_1 und f_2 ausgedrückt werden können, lässt sich R auch in dieser Weise darstellen. F.

P. Gordan. Ueber homogene Functionen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 180.

„Der Vortragende betrachtete Systeme S von Producten

$$R = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Ein solches System besteht aus denjenigen R, bei denen die Exponenten k durch gegebene Relationen verknüpft sind. Es wurde gezeigt, dass man für jedes S ein Teilsystem Σ bestimmen kann:

$$\Sigma : P_1, P_2, \ldots,$$

das die drei Eigenschaften besitzt:

1. Die Anzahl der Producte P ist endlich.
2. Keines der P ist durch ein anderes teilbar.
3. Jedes R in S ist durch mindestens eines der P teilbar."

F.

E. B. ELLIOTT. Proof of a fundamental fact as to functions of differences. Messenger **29**, 180-184.

„Eine ganze rationale Function vom Gewicht w und den Graden $i_1, i_2, \ldots, i_p$ in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, welche eine Function der Differenzen dieser Buchstaben ist, kann als Summe numerischer Vielfacher der Producte von w Differenzen derart dargestellt werden, dass in jedem Product α_k in nicht mehr als i_k Factoren auftritt ($k = 1, 2, \ldots, p$)."

Wbg.

Weitere Litteratur.

H. LAURENT. L'élimination. Paris: Carré & Naud. 75 S. 8°. (Scientia phys. math. No. 7.)

F. MERTENS. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Prace mat. fiz. **11**, 191-193. (Polnisch.)

Vergl. F. d. M. **30**, 161, 1899.

TH. MUIR. On the eliminant of a set of general ternary quadrics. Edinb. Trans. **39**, 623-628.

TH. MUIR. Note on a persymmetric eliminant. Edinb. Proc. **22**, 543-546.

TH. MUIR. On the eliminant of a set of general ternary quadrics. Edinb. Trans. **40**, 23-38.

A. POUSSART. Théorèmes de Bézout et d'Euler. Ens. math. **2**, 136-138.

E. D. ROE. On the transcendental form of the resultant. Amer. Math. Monthly **7**, 59-66.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.

Niedere Arithmetik.

J. Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 194 S. 8°.

Das Buch bezweckt, die wichtigsten Methoden und Hülfsmittel für das numerische Rechnen zusammenzustellen, eine Wissenschaft des Zahlenrechnens zu geben. Gründlich erörtert werden die Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und Wurzelausziehens; bei der numerischen Auflösung der Gleichungen werden aber nur die kubischen und die allgemeinen trinomischen behandelt. Besonderer Wert ist überall auf die exacte Bestimmung der Fehler gelegt, die entweder aus der Ungenauigkeit der gegebenen Zahlen oder aus der Unmöglichkeit, die Rechnung genau durchzuführen, entspringen. Weil es dem Verf. darauf ankam, die Mittel zur Erzielung grosser Genauigkeit vorzutragen, hat er auf die Darstellung der nur geringe Genauigkeit liefernden graphischen Methoden verzichtet. Dagegen bespricht er mehrere Rechenmaschinen und lehrt die richtige Benutzung mathematischer Tafeln.

F.

F. Amodeo. Aritmetica particolare e generale. Volume primo degli Elementi di Matematica. Napoli: L. Pierro. XV + 415 S. 8°. [Loria Bollett. 8, 28-29.]

Dieses italienische Buch bringt naturgemäss nicht gerade etwas Neues, zeichnet sich aber durch eine viel grössere Vollständigkeit und Strenge in allen Definitionen, Entwickelungen und Beweisen aus, als sie in Lehrbüchern im allgemeinen zu finden ist. Die Darstellungsweise ist dabei klar und leicht verständlich. Wenn in den italienischen höheren

Schulen, für die es geschrieben ist, das Buch vollständig durchgearbeitet werden kann, muss für die Mathematik daselbst mehr Zeit zur Verfügung stehen als bei uns. F.

K. KUHN. Lehrbuch der Elementararithmetik. I. Teil. (Mit 3 Fig.) Hildburghausen: O. Pezoldt. 48 S. 8°.

Für den Unterricht an einer technischen Mittelschule bestimmte Elemente der Arithmetik. F.

D. HILBERT. Ueber den Zahlbegriff. Deutsche Math. Ver. 8_1, 180-184.

D. Hilbert vergleicht in dem Vortrage die übliche Darstellung der Principien der Arithmetik mit den Axiomen der Geometrie und kommt zu dem Schlusse, dass „zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis“ die „axiomatische“ Methode auch in der Arithmetik den Vorzug verdiene. Statt also von den natürlichen Zahlen Schritt für Schritt zu den negativen ganzen, den gebrochenen, den irrationalen überzugehen, denkt er sich von vorn herein ein System von Dingen, die er Zahlen nennt, und deren gegenseitige Beziehung er durch eine Reihe von Axiomen feststellt. Diese Axiome sind so zu wählen, dass sich ihre Widerspruchslosigkeit und ihre Vollständigkeit nachweisen lässt. F.

D. HILBERT. Ueber den Zahlbegriff. (Russisch.)

Russische Uebersetzung des Hilbert'schen Aufsatzes von A. Wassilieff (vergl. das vorangehende Referat.) Si.

E. CZUBER. Zur Theorie der reellen Zahlen. Zeitschr. f. d. Realschulw. **25**, 193-217.

Nachdem die Theorie der rationalen Zahlen entwickelt und gezeigt ist, dass jede gebrochene rationale Zahl durch einen endlichen oder einen unendlichen periodischen systematischen Bruch (mit beliebiger Basis) dargestellt werden kann, wird jeder unendliche systematische Bruch, bei welchem das Gesetz des Fortschreitens der Zähler bekannt ist und dieses Gesetz Periodicität ausschliesst, als eine irrationale Zahl definirt. Die Begriffe der Gleichheit, des Grösser-, resp. Kleinerseins zweier solchen Zahlen lassen sich sehr leicht feststellen. Für das Rechnen mit irrationalen Zahlen, auf das in der Schrift nicht näher eingegangen wird, muss aber doch auf „Fundamentalreihen“ verwiesen werden, die sich aus dem systematischen Bruche herleiten lassen. Die eindeutige Zuordnung der sämtlichen reellen Zahlen und der sämtlichen Punkte einer geraden Linie glaubt Czuber ohne das Cantor-Dedekind'sche Axiom, durch welches die Stetigkeit der Geraden gekennzeichnet wird, erschliessen zu können. F.

G. Frege. Ueber die Zahlen des Herrn H. Schubert. Jena: H. Pohle. 32 S. 8°.

Die Schrift übt eine sehr scharfe, in ironischer Form gehaltene Kritik an der Darstellung, die H. Schubert in dem ersten Hefte der Encyklopädie von den Grundlagen der Arithmetik, insbesondere der Entstehung des Zahlbegriffs giebt. F.

C. Faerber. Irrationale Zahlen und Verhältnisse incommensurabler Grössen. Pr. (No. 116) Luisenstädt. Oberrealschule Berlin. 33 S. 4°.

Der Verf. weist mit Recht darauf hin, dass die Behandlung der irrationalen Zahlen selbst in guten Schulbüchern noch immer zu wünschen übrig lässt. Er hat den Wunsch, bei gelegentlicher Repetition in den oberen Klassen den Schüler aufzuklären, in welchem Sinne man überhaupt von der Existenz irrationaler Zahlen reden kann. Zu diesem Zwecke baut er, offenbar unter dem Einfluss Kronecker'scher Ideen, die Cantor'sche Theorie derart aus, dass sie sich unmittelbar an das Verfahren anschliesst, welches im Unterricht beim ersten Auftreten von Irrationalitäten (z. B. $\sqrt{3}$, log 2) zur angenäherten Berechnung derselben eingeschlagen wird. Das Symbol $(a_n; A_n)$ bedeute eine Doppelreihe $a_1, a_2, a_3, \dots; A_1, A_2, A_3, \dots$ von unendlich vielen rationalen Zahlen, in der für jedes n

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

ist, während nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ stets eine ganze Zahl N angegeben werden kann, so dass für $n \geqq N$ $A_n - a_n < \delta$ wird. Es kann dabei vorkommen, dass zu einer bestimmten Doppelreihe eine rationale Zahl a existirt, derart, dass für jedes n $a_n \leqq a \leqq A_n$ ist; in diesem Falle soll unter dem Symbol $(a_n; A_n)$ eben diese Zahl a verstanden werden; lässt sich aber eine solche rationale Zahl a nicht angeben, so wird der Doppelreihe ein neues Object α zugeordnet, das eine irrationale Zahl heissen soll. Die Existenz von α besteht rein arithmetisch in nichts anderem als in dem Vorhandensein der Doppelreihe; es ist aber nötig, die Anwendung des Wortes „Zahl" zu rechtfertigen, dadurch, dass die Kriterien der Gleichheit und Ungleichheit, sowie die Anwendbarkeit der Begriffe und Gesetze sämtlicher Rechnungsarten im einzelnen geprüft und dargelegt werden.

Gleiche Doppelreihen treten nun auch in den Näherungswerten eines unendlichen Kettenbruchs auf, und da das Verhältnis zweier incommensurablen Grössen nach bekanntem Verfahren durch einen Kettenbruch dargestellt werden kann, so ist damit die Brücke zu einer rein arithmetischen Theorie der Verhältnisse geschlagen. R. M.

S. Schochor-Trotzki. Ueber die irrationale Zahl. Phys.-Math. Jahrbuch No 1, 14-36 (Russisch).

Elementare Darstellung, gegründet auf geometrische Betrachtungen. Si.

W. Förster. Ueber das geordnete Aussprechen unserer Zahlen. Hoffmann Z. **31**, 265.

J. C. V. Hoffmann. Zu unserer Zahlenaussprache. Ibid. 432-433.

Kewitsch. Nochmals „zehn drei" und „zwanzig eins". Ibid. 577-578.

Zur Uebereinstimmung des Schreibens und des Aussprechens deutscher Zahlen wird die Stellung der Zehner vor die Einer beim Sprechen empfohlen. Lp.

A. Capelli. Sull' ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica. Napoli Rend. (3) **6**, 138-151.

Der Aufsatz erörtert die Frage, ob die übliche Reihenfolge, in welcher die vier elementaren Rechenoperationen gelehrt zu werden pflegen, thatsächlich die zweckmässigste ist. Nachdem zunächst gezeigt ist, dass man sehr wohl mit der Multiplication beginnen kann, ergiebt sich, dass, wenn man die Forderung stellt, jede neu einzuführende Operation solle das Zahlengebiet (das zunächst nur als aus einer endlichen Anzahl von natürlichen Zahlen bestehend vorausgesetzt wird) erweitern, man mit der Multiplication beginnen muss. Soll fernerhin die verlangte Ordnung der Rechenoperationen die Eigenschaft besitzen, dass jedes Resultat, welches man durch ihre beliebig oft wiederholte Anwendung auf unbestimmte Zahlen erhalten kann, sich finden lässt, indem man zunächst nur die erste Operation beliebig oft, dann nur die zweite u. s. w. anwendet, so wird man auf die Reihenfolge: „Multiplication, Addition, Subtraction, Division" geführt. F.

G. Mannoury. Analoga zu den Begriffen „positiv" und „negativ". Nieuw Archief (2) **4**, 325-338.

Von der Addition und Subtraction (Operationen erster Stufe) sowie der Multiplication und Division (Operationen zweiter Stufe) ausgehend, wird eine Operation dritter Stufe gebildet, die sich zur Multiplication ebenso verhält wie diese zur Addition, und in der Operationenbildung wird in derselben Weise fortgefahren. Für diese Operationen höherer Stufe werden dann Begriffe definirt, die den gewöhnlichen Begriffen „positiv", „negativ", „reell" analog sind und denselben Grundgesetzen genügen. Der Verf. bemerkt selbst, dass seine Operationen zu neuen Functionen nicht führen und deshalb auch keinen praktischen Wert haben; sie sollen lediglich dazu dienen, „einen objectiven Standpunkt für die Beurteilung des Charakters positiver und negativer Zahlen zu gewinnen." F.

G. A. Gibson. Proportion: a substitute for the fifth book of Euclid's „Elements". Edinb. M. S. Proc. **18**, Appendix; auch sep. Edinburgh: J. Lindsay. 27 S. 8°.

Dem englischen Unterrichte in der Geometrie, welchem bekanntlich noch immer Euklid's „Elemente" zu Grunde gelegt werden, pflegt das fünfte Buch derselben, das die Theorie der Verhältnisse in abstracter Weise behandelt, viele Schwierigkeiten zu bereiten. Einerseits ist es für den Anfänger nicht leicht verständlich, andrerseits bedarf es, wenn man zur Trigonometrie übergehen will, notwendig insofern einer Ergänzung, als gezeigt werden muss, dass die Euklidischen Verhältnisse sich wie Zahlen behandeln lassen. Gibson basirt deshalb, wie es ausserhalb Englands wohl allgemein schon längst geschieht, die Theorie der Verhältnisse auf die der rationalen und der irrationalen Zahlen, ohne übrigens sich mit einer strengeren Definition der letzteren zu beschäftigen. Zum Schlusse werden einige Sätze aus Euklid's sechstem Buche auf Grund der für ein beliebiges Verhältnis aufgestellten Definition bewiesen.

F.

G. Monti. Trasformazione di una frazione nella somma di più frazioni i cui denominatori sono le successive potenze di un numero dato. Periodico di Mat. (2) **3**, 12-16.

„Gegeben sei ein eigentlicher Bruch m/n und eine ganze Zahl p; wir wollen beweisen, dass sich immer ganze Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_s$ finden lassen, so dass der gegebene Bruch sich in die Summe

$$\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\cdots+\frac{q_s}{p^s}$$

entweder genau verwandeln lässt, oder mit einem absoluten Fehler, kleiner als $1/p^s$, und dass in beiden Fällen die Transformation sich auf eine einzige Weise ausführen lässt." Lp.

F. Castellano. Alcune identità. Revue de Math. **7**, 58.

Castellano schreibt einige der von F. Ferrari (Suppl. al Period. **3**; vergl. F. d. M. **30**, 166, 1899) veröffentlichten arithmetischen Identitäten ab, welche nach seiner Meinung im Formulaire de Mathématiques Platz finden dürften. Vi.

G. E. Crawford. Elementary proof that the arithmetic mean of any number of positive quantities is greater than the geometric mean. Edinb. M. S. Proc. **18**, 2-4.

Ist A das arithmetische Mittel aus n positiven Zahlen $a, b, c, d, \dots$, von denen a die grösste, b die kleinste sei, so liegt A zwischen a und b. Wenn x so gewählt wird, dass $A+x=a+b$, dann liegen sowohl A wie x zwischen a und b, und Ax ist $>ab$. Mithin ist

$$abcd\ldots < Axcd\ldots$$

Spielt y unter den $n-1$ Zahlen $x, c, d, \dots$ dieselbe Rolle wie x unter

den gegebenen n, so folgt $abcd \cdots < A \cdot Ayd \cdots$. Somit finden wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten $abcd \cdots < A^n$. Die nötigen Hülfssätze werden in dem Aufsatze bewiesen. Gbs. (Lp.)

G. SANNIA. Sulle frazioni il cui denominatore è somma di radicali quadratici. Suppl. al Period. **4**, 3-6.

Die in den elementaren Lehrbüchern gegebene Regel zur successiven Wegschaffung der Irrationalitäten aus dem Nenner des Bruches

$$\frac{m}{\varepsilon_1 \sqrt{a_1} + \varepsilon_2 \sqrt{a_2} + \cdots + \varepsilon_n \sqrt{a_n}}$$

giebt nur für $n < 5$ nach der ersten Anwendung eine kleinere Anzahl von Irrationalitäten im Nenner. Der Verf. entwickelt daher für den elementaren Standpunkt der Schüler eine andere Regel, welche alle hinzuzufügenden Factoren von vorn herein angiebt. Lp.

H. KRÜGER. Ein algebraischer Satz als Folgerung aus einem stereometrischen. Hoffmann Z. **31**, 264.

Ist a_i/b_i constant $= c$, so ist

$$\Sigma \sqrt{a_i b_i} = \sqrt{\Sigma a_i \cdot \Sigma b_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Lp.

A. AUBRY. Sur une identité d'Euler. Progreso mat. (2) **2**, 401-413.

Die vom Verf- betrachtete Identität ist die folgende:

$$(1+a)(1+b)\cdots(1+l) = 1 + a + b(1+a) + \cdots + l(1+a)\cdots(1+k).$$

Er leitet aus ihr zahlreiche bemerkenswerte Resultate her, die früher von verschiedenen Forschern auf anderem Wege gewonnen sind.

Tx. (Lp.)

G. W. PRESTON. Question 14128. Ed. Times **72**, 41.

Beweis der Identitäten aus Chrystal's Algebra:

$$\frac{\Sigma (y-z)^8}{\Sigma (y-z)^2} - 4\,\Pi (y-z)^2 = \{\Sigma x^2 - \Sigma yz\}^3,$$

$$\Sigma \frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} = \frac{a+b+c+d-x}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

Lp.

C. E. Bickmore. Question 14477. Ed. Times **78**, 104-105.

$$(a^2 - 4b^4 + c^4)^4 + (4abc)^4$$
$$= \{(a^2 - 4ab^2 + 4b^4 - c^4)^2 + (4b^2c^2 - 2ac^2)^2\}$$
$$\times \{(a^2 + 4ab^2 + 4b^4 - c^4)^2 + (4b^2c^2 + 2ac^2)^2\}.$$

Lp.

G. A. Gibson. Note on the fundamental inequality theorems connected with e^x and x^m. Edinb. M. S. Proc. **18**, 84-87.

Der Ausgangspunkt wird von dem verallgemeinerten arithmetisch-geometrischen Mittel genommen:

$$a^m b^n < \left[\frac{(ma + nb)}{m + n}\right]^{m+n}.$$

Gbs. (Lp.)

A. Dufton. To calculate a simple table of logarithms. Nature **61**, 415.

J. Perry. To calculate a simple table of logarithms. Nature **61**, 415-416.

H. C. Pocklington. Mechanical methods of calculating logarithms. Nature **61**, 469.

Dufton construirt die Curve $x = 2^y$ aus den ganzzahligen Werten, um daraus die Logarithmen von x für die Basis 2 abzulesen. Perry stimmt diesem Vorschlage bei. Pocklington benutzt die logarithmische Spirale zu demselben Zwecke, indem er sie mechanisch aufzeichnet.

Lp.

R. Burg. Das Stabrechnen. Frankfurt a. M.: F. B. Auffarth. 33 S. 8°.

Ein für technische Anstalten bestimmter Leitfaden, der mit der Einrichtung und dem Gebrauche des logarithmischen Rechenstabes bekannt zu machen bestimmt ist. F.

G. Fontené. Réclamation à propos du théorème dit de Rouché. Nouv. Ann. (3) **19**, 188.

Verf. wünscht Rouché's Theorem auch mit seinem Namen benannt zu sehen. Wbg.

Weitere Litteratur.

E. Bardey. Arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten, neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von Dr. H. Hartenstein. 3. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 202 S. 8°.

E. Bardey. Aufgabensammlung, methodisch geordnet, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. Neue Ausgabe, nach der 24. Auflage bearbeitet von F. Pietzker und O. Presler. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 376 S. 8°.

W. W. Beman and D. E. Smith. Elements of algebra. Boston: Ginn. X + 430 S. 12mo.

J. Bertrand et H. Garcet. Traité d'algèbre. Deuxième partie à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Nouvelle édition. Paris: Hachette. 392 S. 8°.

R. Bettazzi. I problemi di aritmetica pratica. Torino: Paravia. 70 S. 8°.

F. Bolte. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik, zum Gebrauche an Navigationsschulen bearbeitet. Zweite Auflage. Hamburg: Peuser. 77 S. 8°.

L. Bosse und H. Müller. Algebra. Mit Aufgaben und fünfstelliger Logarithmentafel. Berlin: P. Parey. IV + 124 + 24 S. 8°.

A. Brémant. Cours d'algèbre essentiellement pratique, avec de nombreuses applications, à l'usage des élèves de l'année complémentaire. Nouvelle édition. Paris: Hatier. 76 S. 16mo.

W. G. Constable and J. Mills. Elementary algebra, including quadratic equations. London: Longmans. 272 S. 12mo.

A. Conti. Elementi d'aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali (2° e 3° corso). Parte prima. Bologna: Zanichelli. 304 S. 12mo.

J. F. Downey. Higher algebra. New York: American Book Co. 416 S. 12mo.

H. Fajon. Complément d'algèbre élémentaire. Variations des fonctions du premier degré, du second degré et bicarrées, à l'usage des candidats au baccalauréat etc. Paris: Benin. 69 S. 8°.

J. Fitz-Patrick et G. Chevrel. Exercices d'arithmétique. Deuxième édition. Paris: A. Hermann. XIV + 680 S. [Nature **61**, 314.]

P. Gazzaniga. Libro di aritmetica e algebra elementare. 3ª ed. Verona-Padova: Drucker. 375 S. 8°.

F. Girod. Cours d'algèbre élémentaire théorique et pratique (No. 4), à l'usage des lycées et des collèges etc., contenant de nombreuses applications au dessin, à l'architecture, etc. 16ᵉ édition. Paris: André. 472 S. 8°.

F. Girod. Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans le Cours et dans le Traité élémentaire d'algèbre à l'usage des lycées et des collèges, etc. 3ᵉ édition, revue et corrigée. Paris: André.

Rob. Grassmann. Die Zahlenlehre oder Arithmetik in strenger Formelentwickelung. (Neue Titel-Ausg.). Stettin: R. Grassmann. XII + 242 S. gr. 8°.

S. F. d. M. **23**, 158, 1891.

A. Grévy. Algèbre, à l'usage des élèves des classes de troisième, seconde et rhétorique. 2e édition. Paris: Nony. 248 S. 18mo.

T. Harmuth. Textgleichungen geometrischen Inhalts. Für den Gebrauch beim Unterricht entworfen. 2. Aufl. Berlin: Springer. IV + 75 S. 8°.

H. Heilermann u. J. Dieckmann. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen. 2. Teil. Die Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. — Die Progressionen. — Die kubischen und biquadratischen Gleichungen. — Niedere Analysis. 5. Aufl. Essen: G. D. Baedeker. VII + 238 S. gr. 8°.

A. Hochheim. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten. 1. Heft. 6. Aufl. Bearbeitet von F. Hochheim. Berlin: E. S. Mittler & Sohn. VI + 258 S. gr. 8°.

H. B. Lübsen. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 25. Aufl. Leipzig: F. Brandstetter. VI + 261 S. gr. 8°.

C. Mandoli. Trattato di algebra elementare ad uso dei licei. 2a edizione, riveduta dall'autore. Napoli: Trani. XI + 234 S. 18mo.

W. J. Milne. Key to „Elements of algebra" and „Grammar school algebra". New York: American Book Co. 256 S. 16mo.

H. Müller und M. Kutnewsky. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausg. A, für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. I. Teil. VIII + 315 S. Ausgabe B, für Realschulen. VIII + 289 S. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°.

F. Niemöller und P. Dekker. Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. Für den mathematischen Unterricht in der Mittelstufe (4. bis 6. Schuljahr) höherer Lehranstalten, nach den Bestimmungen der preussischen Lehrpläne von 1892 bearbeitet. 2. Heft. Pensum der Obertertia und Untersecunda. (Secunda und Prima der Realschulen.) Breslau: F. Hirt. 136 S. gr. 8°.

J. Orelli. Lehrbuch der Algebra für polytechnische und höhere Gewerbeschulen. Dritte Auflage. Neuer Abdruck. (In 2 Bänden.) Zürich. 8°.

S. Ortù Carboni. I complementi dell'algebra elementare per la discussione completa e sistematica dei problemi algebrici di primo e secondo grado con due mila problemi (risoluti od avviati) d'applicazione dell'algebra e della trigonometria alla geometria. Parte I: Teorie. Livorno: Giusti. XVI + 467 S. 8°.

H. Schubert. Arithmetik und Algebra. 2. Abdruck. Leipzig: G. J. Göschen (Sammlung Göschen No. 47). 171 S. 12°.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. Theoretische Arithmetik. Abteilung I: Allgemeines: die Lehre von den rationalen Zahlen. Zweite Auflage der Abschnitte I-IV des ersten Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 98 S. 8°.

G. M. Testi. Elementi d'algebra, ad uso specialmente dei licenziandi delle scuole tecniche. 2ª edizione, di nuovo modificata. Livorno: Giusti. VII + 86 S. 8⁰.

H. Tödter. Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra. (Für den Schul- und Selbstunterricht in entwickelnder Lehrform bearbeitet.) 1. Teil. Ausg. B. 4. Aufl. Bielefeld: Velhagen & Klasing. II + 70 S. gr. 8⁰.

F. Vintéjoux. Éléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre. Corrigé des exercices par G. Manuel. 4e édition. Paris: Hachette. VII + 568 S. 16mo.

Th. Wimmenauer. Arithmetische Aufgaben nebst Lehrsätzen und Erläuterungen. 2 Teile. 1. Lehraufgabe der beiden Tertien und der Untersecunda des Gymnasiums. 2. Lehraufgabe der Obersecunda und der Prima des Gymnasiums. Breslau: F. Hirt. VIII + 192, IV + S. 193-300.

E. Wrobel. Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden etc. Teil I: Pensum der Tertia und Untersecunda. XII + 320 S. 8⁰. Teil II: Pensum der Obersecunda und Prima. 3. Aufl. III + 71 S. Rostock: Koch.

E. Bisson-Minio. Osservazioni sulle regole pratiche per le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica. Boll. di mat. Bologna **1**, 100-101.

O. Bürklen. Graphisches Rechnen und graphische Darstellungen im Mathematikunterrichte. Gmünd. 58 S. 8⁰. (1899).

C. Burali-Forti. Les propriétés formales des opérations algébriques. Turin. 40 S. 12mo.

O. Buzzi. La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione. Boll. di mat. Bologna **1**, 19-23, 51-55, 114-117, 168-171, 209-212.

E. Dubouis. Simplification dans la théorie du produit de plusieurs facteurs. J. de math. élém. **25**, 187-188.

A. B. Hennig. Mein Rechengeheimnis, welches bei colossaler Zeitersparnis jeden Rechenfehler verhütet. Ilmenau (Berlin: Berolina-Versand-Buchhdlg.). 3 S. gr. 16mo.

E. M. Langley. Some curiosities in division. Math. Gazette 1899/1900, 275-276.

G. del Prete. Sopra alcuni definizioni in aritmetica. Boll. di mat. Bologna **1**, 7-10, 70-73.

R. Bettazzi. Grandezza, quantità e numero. Ibid. 161-165.

O. Schally. Einiges zur methodischen Behandlung der Operationen der beiden ersten Stufen und der durch diese notwendig gemachten Erweiterungen des natürlichen Zahlengebietes. Pr. Aussig. 11 S. 8⁰.

Kapitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

E. Cahen. Éléments de la théorie des nombres. (Congruences. — Formes quadratiques. — Nombres incommensurables. — Questions diverses). Paris: Gauthier-Villars. VIII + 403 S. gr. 8°.

Es existirte bisher in Frankreich (seit dem Erscheinen der letzten Auflage von Legendre's Théorie des nombres waren 70 Jahre verflossen) kein einziges Lehrbuch, das der modernen Zahlentheorie gewidmet war, so dass das Erscheinen des vorliegenden Werkes eine wirkliche Lücke ausfüllt. Das Buch ist sehr klar geschrieben, mit vielen Zahlenbeispielen versehen und bildet eine gute Einführung in das Gebiet. Der Gang schliesst sich im wesentlichen den bekannten Vorbildern an; doch werden manche Betrachtungen eingeschoben, die den Leser auf die Beziehungen zu anderen mathematischen Disciplinen hinweisen.

Kapitel 1 behandelt die Grundlagen bis zur Zerlegung in Primfactoren, Kapitel 2 die symmetrischen Functionen der Divisoren einer Zahl, die Function $\varphi(n)$ und ihre Verallgemeinerung $\varphi_p(n)$, die Zerlegung von $n!$ in Primfactoren und die Kettenbrüche mit endlicher Gliederzahl. Diese werden dann in Kapitel 3 auf die Auflösung der Congruenzen ersten Grades angewandt, denen sich einige Betrachtungen über Congruenzen höheren Grades, speciell binomische Congruenzen, anschliessen; hier finden auch der Fermat'sche und Wilson'sche Satz ihre Stelle. Kapitel 4 enthält die Theorie der quadratischen Reste; vom Reciprocitätsgesetz werden zwei Beweise gegeben, der Zeller'sche und der Kronecker'sche. Kapitel 5 bringt eine ausführliche Darstellung der Theorie der Irrationalzahlen, ihre Definition, die Sätze über Kettenbruchentwickelung irrationaler Zahlen im allgemeinen und algebraischer (Liouville'scher Satz) und quadratischer (Periodicität) im besonderen. Das sechste und ausführlichste Kapitel führt die Theorie der quadratischen Formen so weit, als ohne Benutzung unendlicher Reihen möglich ist; besonders zu erwähnen sind einige allgemeinere Betrachtungen über Modulsubstitutionen. Zum Schluss wird gezeigt, wie die allgemeine diophantische Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch die Theorie der homogenen binären quadratischen Formen vollständig gelöst ist.

Die Klassenzahlbestimmung, die Lehre von der Composition der quadratischen Formen, die Theorie der Ideale und die Theorie der Riemann'schen ζ-Function nebst Anwendung auf das Primzahlproblem sollen in einem zweiten Bande behandelt werden, den Verf. in Aussicht stellt. Einstweilen behandelt er in einer Reihe von Noten am Schlusse des Buches verschiedene höhere Gegenstände, z. B. einige Sätze über Primzahlen (Nachweis einiger aus der Theorie der quadratischen Reste

folgenden Fälle des Satzes von der arithmetischen Progression und einige Grundeigenschaften der ζ-Function), einige zahlentheoretische Functionen und ihre Beziehungen zu analytischen Functionen, und endlich giebt er eine Darstellung der Lehre von den Gauss'schen complexen Zahlen $a+bi$. Einige Tabellen aus Tschebyschef's Theorie der Congruenzen sind angefügt. Lnd.

P. Bachmann. Niedere Zahlentheorie. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 555-581.

Inhaltsübersicht: 1. und 2. Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen. 3. Euklidischer Algorithmus. Farey'sche Reihen. 4. Reste und Congruenzen. Sätze von Fermat und Wilson. Primitive Wurzeln. 5. Congruenzen und unbestimmte Gleichungen ersten Grades. Partialbrüche. Perioden der Decimalbrüche. 6. Quadratische Reste; Reciprocitätsgesetz. 7. Unbestimmte Gleichungen 2., 3., 4. Grades. Quadratische Congruenzen. 8. Höhere Congruenzen. Galois'sche Imaginäre. 9. Feststellung einer Zahl als Primzahl; Zerlegung grosser Zahlen in Factoren. 10. Vollkommene Zahlen. 11. Potenzsummen der ersten m ganzen Zahlen. 12. Magische Quadrate. Wbg.

P. Bachmann. Analytische Zahlentheorie. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 636-674.

Inhaltsübersicht: 1. Zerfällung der Zahlen (ihre additiven Darstellungen). 2. Dirichlet'sche Reihen und Methoden, Gauss'sche Summen. 3. Zahlentheoretische Functionen. 4. Function $[x]$. 5. Asymptotische Ausdrücke zahlentheoretischer Functionen. Die Anzahl der Primzahlen. 6. Mittlere Functionswerte. 7. Transcendenz der Zahlen e und π. Wbg.

A. P. Ochitowitsch. Nowyi (njeopredjelonnyi) metod rjeschenija algebraitscheskich urawnjenii. (Neue (unbegrenzte) Methode zur Lösung algebraischer Gleichungen). In zwei Teilen. I. Teil. Kasan. XI u. 302 u. 18 S. (Russisch.)

Dieser erste Theil beschränkt sich, von den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten abgesehen, auf lineare Gleichungen. Sehr ausführlich wird die Lösung von $a_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ in ganzen Zahlen behandelt. Abgesehen von der bekannten Lösung durch Kettenbrüche, werden auch andere Methoden entwickelt, die vielleicht neu sind. Z. B. werden von der Gleichung: $1+a_1x_1+a_2x_2=0$ unter der Voraussetzung, dass $s=a_1+a_2$ eine Primzahl ist, verschiedene ganzzahlige Lösungspaare wirklich hingeschrieben, ebenso für den Fall, dass a_1 eine Primzahl ist u. s. w. Ist ferner $a_1=\alpha_1^{m_1}\cdot\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_n^{m_n}$, wo die α Primzahlen bedeuten, so wird ein ganzzahliges Lösungspaar der genannten Gleichung in der Form:

$$x_1 = -\left(\frac{1+a_2x_2'}{a_1}\right)^{m_1}\left(\frac{1+a_2a_1x_2''}{x_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{1+a_2a_1a_2\cdots a_{n-1}x_2^{(n)}}{a_n}\right)^{m_n},$$

$$x_2 = -\frac{1+a_1x_1}{a_2}$$

aufgestellt, wo $x_2', x_2'', \cdots$ ganze Zahlen sind, die die Brüche:

$$\frac{1+a_2x_2'}{a_1}, \frac{1+a_2a_1x_2''}{a_2}, \cdots$$

zu ganzen Zahlen machen. In ähnlicher Weise werden die ganzzahligen Gleichungen von der Form $a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$ und der Form $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ behandelt. Z. B. werden, wenn a_p und a_q teilerfremd sind, y_p und y_q durch die übrigen y, die willkürlich bleiben, durch eine willkürliche Grösse z und durch ein ganzzahliges Lösungspaar der Gleichung $1 + a_p y_p' + a_q y_q' = 0$ ausgedrückt. Um die allgemeinsten ganzzahligen Lösungen für die y in symmetrischer Form hinschreiben zu können, stellt der Verf. eine Tabelle auf, aus der die Lösungen nach einer einfachen Regel hergestellt werden können, und die er den „mathematischen Schlüssel" nennt. Auch die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen wird behandelt. Die Ausdrücke, die der Verf. giebt, werden hier zum Teil erschreckend lang und ganz unübersichtlich. Der Anhang von 18 Seiten enthält einige kleinere Mitteilungen, die der Verf. zum Teil schon früher veröffentlicht hat, die aber kaum besonderes Interesse beanspruchen können. Der zweite Teil soll den algebraischen Gleichungen von höherem Grade gewidmet sein.

El.

O. Pund. Ueber Abel'sche Gruppen und lineare Modulsysteme. Hamb. Mitt. 3, 371-376 (1899).

„Das vollständige Restsystem nach einem ganzzahligen Modul stellt ohne Zweifel, wenn man die Restklassen durch Addition componirt, das einfachste Beispiel einer Gruppe in der Zahlentheorie dar. Dem gegenüber erfordert das verkürzte Restsystem, das aus allen zum Modul teilerfremden Restklassen besteht, bei Composition dieser durch Multiplication als Gruppe betrachtet, zu seiner vollständigen Bewältigung die Kenntnis der Abel'schen Gruppen; aber gerade, weil ein verwickelteres Beispiel vorliegt, erweisen sich hier die gruppentheoretischen Betrachtungen fruchtbarer. Trotzdem aber erscheint die Gruppeneigenschaft des vollständigen Restsystems jedenfalls insofern beachtenswert, als sich durch Erweiterung des ganzzahligen Moduls zu einem linearen Modulsystem eine sehr einfache arithmetische Grundlage für die Theorie der Abel'schen Gruppen ergiebt. Ein vollständiges Restsystem nach einem aus lauter Linearformen bestehenden Modulsystem ist nicht nur, wie leicht ersichtlich, eine Abel'sche Gruppe, wenn man die Restklassen durch Addition verknüpft, sondern es lässt sich auch umgekehrt zu jeder Abel'schen Gruppe ein lineares Modulsystem angeben, dessen Restsystem bei Composition durch Addition

eine mit ihr isomorphe Gruppe darstellt. Dieser Zusammenhang lässt auch den inneren Grund der von Frobenius und Stickelberger aufgestellten Beziehung zwischen Abel'schen Gruppen und bilinearen Formen klar erkennen." Lp.

O. Pund. Ueber Reduction linearer Modulsysteme. Hamb. Mitt. **3**, 423-426.

„Ein lineares Modulsystem, das lauter ganzzahlige lineare Functionen einer Unbestimmten x enthält, lässt sich stets auf ein solches reduciren, das nur aus einer einzigen ganzzahligen linearen Function und einer ganzen Zahl besteht. Man kann zu diesem System durch wiederholte Anwendung des Satzes gelangen, dass ein aus zwei linearen Functionen bestehendes Modulsystem $(a'x+b', a''x+b'')$ äquivalent ist dem reducirten System $(ax+b,c)$, wo $a=(a',a'')$, $c=(a'b''-a''b')/a$ ist und b der Bedingung $(b,c)=(b',b'')$ genügen muss. Aus jedem linearen Modulsystem kann man noch den grössten gemeinsamen Teiler aller Coefficienten herausheben, der bei dem zuletzt genannten System durch $d=(a,b,c)$ dargestellt wird. Wenn nun die Unbestimmte x als ganze Zahl vorausgesetzt wird, so ist das Modulsystem noch einer weiteren Reduction fähig, und zwar kann es dann auf die Form $d(x+r,m)$ gebracht werden, wo m ein Teiler von c/d ist. Die genauere Bestimmung dieser Zahl soll hier durchgeführt werden." Lp.

M. Nassò. Alcuni teoremi di aritmetica. Revue de Math. **7**, 42-55.

Diese Note enthält 122 in logischen Symbolen geschriebene Sätze, welche grösstenteils aus E. Gelin, Recueil de problèmes d'arithmétique, Huy, 1896 (F. d. M. **27**, 119, 1896), entnommen wurden, und sich auf Teilbarkeit, Primzahlen und vollkommene Zahlen beziehen. Es mögen einige derselben als Beispiele angeführt werden:

Um die Summe der Quadrate der ersten 10^n ganzen Zahlen zu erhalten, schreibe man n-mal 3, dann 8, dann $(n-1)$-mal 3, dann 5, endlich $(n-1)$-mal Null. — Zu jeder mit 5 nicht endenden ungeraden Zahl existirt ein aus lauter Einsen gebildetes Vielfaches.

Jede gerade vollkommene Zahl endet entweder mit 6 oder mit 28. Vi.

R. Daublebsky v. Sterneck. Zur additiven Zahlentheorie. Wien. Ber. **109**, 28-43.

Der Euler-Legendre'sche Satz, dass jede nicht fünfeckige Zahl ebenso oft in eine gerade wie in eine ungerade Anzahl positiver verschiedener Summanden sich zerlegen lässt, war durch Vahlen (vergl. F. d. M. **25**, 257-258, 1893) auf einen anderen zurückgeführt worden, dass auch in jeder der Klassen von Darstellungen, bei denen die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden mod. 3 einen be-

stimmten Wert hat, eben so viele „gerade" als „ungerade" Darstellungen sich befinden. Verf. hatte diesen Vahlen'schen Satz in einer früheren Arbeit (vergl. F. d. M. **28**, 168, 1897) in einfacher Weise aus dem Euler-Legendre'schen hergeleitet und die Vahlen'schen Klassen noch weiter in kleinere Klassen zerlegt, für welche im allgemeinen die Anzahlen der geraden und ungeraden Darstellungen gleich sind.

Auf jene Arbeit sich stützend, giebt Verf. hier zunächst einen neuen Beweis des Jacobi'schen Satzes, dass in der Entwickelung von

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3$$

nach Potenzen von x nur die Trigonalzahlen als Exponenten auftreten.

Dann geht er dazu über, den Vahlen'schen Gedankengang fortzuführen und die Zerlegungen einer ganzen Zahl in verschiedene Summanden daraufhin zu untersuchen, welche Summe die mod. 5 gebildeten, absolut kleinsten Reste der Summanden ergeben. Es lassen sich, analog wie beim Modul 3, die Anzahldifferenzen der geraden und ungeraden Darstellungen mit der Restsumme h auf die Anzahldifferenzen der Darstellungen mit einer der Restsummen $-2, -1, 0, 1, 2$ zurückführen. Für diese Darstellungen ergeben sich aus dem Euler-Legendre'schen Satz Recursionsformeln von der Art der folgenden: Bezeichnet $\{n\}^1$ den Ueberschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen von n durch verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der mod. 5 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden den Wert 1 hat, so ist

$$\sum_{\substack{h\equiv 1 \pmod{5} \\ \frac{h(h-1)}{2} \leqq k \\ h \gtrless 0}} (-1)^{\frac{h-1}{5}} \left\{k-\frac{h(h-1)}{2}\right\}^1 = \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen,} \\ (-1)^t \text{ für } k=\dfrac{3t^2\pm t}{2}. \end{cases}$$

Lnd.

M. d'Ocagne. Problème de partition. S. M. F. Bull. **28**, 157-168.

Auf wie viele Arten können S Francs mit S französischen Silberstücken bezahlt werden? Das führt, wenn die Anzahl der 5, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ Fr.-Stücke beziehlich u, v, x, $2y$, $5z$ ist, zu dem System zweier diophantischen Gleichungen:

$$\begin{cases} 5u+2v+x+y+z=S, \\ u+v+x+2y+5z=S. \end{cases}$$

Die Methode der Auflösung — successive Summation nach den einzelnen Variabeln über alle Werte, welche den übrig bleibenden Variabeln noch Spielraum im Intervall $\geqq 0$ lassen — ist von vorn herein gegeben und das Resultat sehr complicirt. Die Form des Resultates lässt nicht erwarten, dass man auf einfacherem Wege zum Ziele gelangen kann als der Verf.

Lnd.

E. LANDAU. Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbach'schen Satz. Gött. Nachr. 1900, 177-186.

Es bezeichne G_n die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe von zwei Primzahlen. Der (unbewiesene) Goldbach'sche Satz besteht darin, dass für alle geraden n $G_n \geqq 1$ ist. Mit Hülfe der neueren Untersuchungen über die Verteilung der Primzahlen lässt sich nun der Nachweis führen, dass die summatorische Function $\sum_{n=1}^{x} G_n$ asymptotisch gleich $\frac{x^2}{2\log^2 x}$ ist. Dies gestattet eine Prüfung der von Stäckel (vergl. F. d. M. 27, 136-137, 1896) für G_n aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen hergeleiteten Näherungsformel $\mathfrak{G}_n$. Es ergiebt sich, dass $\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{G}_n$ die richtige Grössenordnung $\frac{x^2}{\log^2 x}$ hat, und dass der Quotient durch $\frac{x^2}{\log^2 x}$ sich auch einer Grenze nähert, allerdings nicht dem wahren Werte $\frac{1}{2}$, sondern dem etwas zu grossen Werte $\frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4} = 0{,}648\cdots$

Die Untersuchung stützt sich auf die Betrachtung der (divergenten) Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$. Hierbei ergiebt sich

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x + \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4}\left(C - \sum_{p=2,3,5..}^{x} \frac{\log p}{p^2 - p + 1}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

wo C die Euler'sche Constante bezeichnet und p alle Primzahlen durchläuft. Lnd.

P. A. MACMAHON. Application of the partition analysis to the study of the properties of any system of consecutive integers. Cambr. Trans. 18, 12-34.

C. ISENKRAHE. Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Function der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen. Math. Ann. 53, 42-44.

Liegt x zwischen den beiden consecutiven Primzahlen a_m und a_{m+1}, so ist

$$(1) \qquad x! = \prod_{r=1}^{m} a_r^{\left[\frac{x}{a_r}\right] + \left[\frac{x}{a_r^2}\right] + \left[\frac{x}{a_r^3}\right] + \cdots}.$$

Daraus lässt sich eine Function $F(m,x)$ bilden, welche, falls die ganze Zahl x zwischen a_m und a_{m+1} liegt, grösser als x, nämlich gleich $1+x$ ist, dagegen für $x = a_{m+1}$ gleich x. Dies leistet, wenn die rechte Seite von (1) mit $P(m,x)$ bezeichnet wird:

12*

$$F(m,x) = \frac{x!}{P(m,x)} + \frac{P(m,x)}{(x-1)!} - \left[\frac{(x-1)!}{P(m,x)}\right].$$

Geht man also von einem beliebigen zwischen a_m und der als unbekannt gedachten folgenden Primzahl a_{m+1} gelegenen Werte x_0 aus, so liefert die Iteration dieser Function schliesslich die Primzahl a_{m+1} und bleibt dort stehen. Wenn man aber den Anfangswert x_0 gleich zu gross gegriffen hat ($>a_{m+1}$), so wird $F(m,x_0)$ gebrochen, so dass man die Rechnung nicht fortsetzen kann und das Versehen bemerkt. Dies vermeidet man, indem man $x_0 = a_m + 1$ als Anfangswert nimmt; die Gleichung

$$a_{m+1} = \lim_{x_0 = a_m+1} \text{it}\ F(m,x)$$

bezeichnet Verf. als eine vollständige Lösung der im Titel gestellten Aufgabe. Lnd.

F. Rogel. Die Bestimmung der Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzahlen. Hoppe Arch. (2) **17**, 225-237.

Die Arbeit enthält die ersten sechs Paragraphen der in den F. d. M. **30**, 173, 1899 besprochenen Arbeit des Verf. Lnd.

J. C. Kluyver. Benaderingsformules betreffende de priemgetallen beneden eene gegeven grens. Amst. Ak. Versl. **8**, 672-682.

E. Borel. Sur les diviseurs numériques des polynômes. Darboux Bull. (2) **24**, 75-80.

Die Aufgabe, den Zahlenteiler einer ganzen ganzzahligen Function von x, d. h. den grössten gemeinsamen Teiler aller für ganzzahlige x durch die Function dargestellten Zahlen, zu bestimmen, ist zuerst von Buniakowsky („Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières", Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg (6) **6**, 1854) durch ein sehr umständliches Verfahren bestimmt worden. Hensel (vergl. F. d. M. **27**, 322, 1896) hat die Aufgabe auf ganz einfachem Wege gelöst, zugleich die entsprechende für n Variabeln. Fast genau zu gleicher Zeit hatte Borel in einer Zusatznote zur „Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure" (D'après des conférences faites à l'École Normale Supérieure par M. J. Tannery, rédigée par E. Borel et J. Drach, Paris 1894) den Fall einer Variable gleichfalls sehr einfach behandelt. In der vorliegenden Arbeit dehnt er sein Verfahren auf Functionen von n Variabeln aus.

Nennt man mehrere Variabeln $x, y, z, \dots$, zwischen denen Relationen bestehen dürfen, unabhängig modulo p, wenn für jedes vorgelegte System $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Congruenzen

$$x \equiv \alpha,\ y \equiv \beta,\ z \equiv \gamma, \dots \pmod{p}$$

mit jenen Relationen verträglich sind, so lässt sich leicht zeigen, dass in

$$x^p = x + px_1$$

x und x_1 unabhängig modulo p sind. Eine Function m-ten Grades (unter Grad wird hier ausnahmsweise der grösste Exponent der einzelnen Variabeln verstanden) von beliebig vielen modulo p unabhängigen Variabeln kann nur dann die Primzahl p als Zahlenteiler haben, wenn alle Coefficienten durch p teilbar sind, oder wenn $p \leqq m$ ist. Die Teilbarkeit der gegebenen Function ist also nur in Bezug auf die Potenzen von endlich vielen Primzahlen zu untersuchen. Durch successive Anwendung der obigen Transformation lässt sich (unter Vermehrung der Zahl der Variabeln) der Grad der zu untersuchenden Function unter p herabdrücken; alsdann teilt p die gegebene Function genau so oft, als es im grössten gemeinsamen Teiler der Coefficienten der reducirten Function aufgeht. Lnd.

R. W. D. Christie. Question 14153. Ed. Times **72**, 26-28.

Christie hat die Auflösung vom $x^{6m} - x^{3m} + 1$ in Factoren verlangt. Cunningham giebt in kurzen Zügen die bekannte algebraische Zerlegung; darauf erläutert Christie genauer den Sinn seiner Frage, dass es sich für ihn um die Abtrennung von Zahlenfactoren handle. Solche findet er z. B. mit Hülfe der primitiven Wurzeln r einer Primzahl $6m+1$. Es ist nämlich dann in ganzen Zahlen

$$r^{2m} - r^m + 1 = P(M);$$

hieraus hat man unter anderem für $m = 3$:

$$2^6 - 2^3 + 1 = 3^6 - 3^3 + 1 = 10^6 - 10^3 + 1$$
$$= 13^6 - 13^3 + 1 = 19(M).$$

Ferner wird gezeigt, wie diese Betrachtungsart verallgemeinert werden kann. Lp.

P. de Sanctis. Teoremi sui prodotti delle cifre significative di certi gruppi di numeri di n cifre. Rom. Acc. P. d. N. L. **53**, 57-66.

Es werden noch andere Sätze von der Art hergeleitet, wie sie in den F. d. M. **30**, 178, 1899 im Anschluss an eine frühere Note des Verf. charakterisirt worden sind. Lnd.

H. J. Woodall, A. Cunningham. Factorise $10^\alpha \cdot 2^x \pm 1$, $\alpha = 1$ to 10. Ed. Times **73**, 83-94.

C. E. Bickmore. Note on question 14305. Ed. Times **73**, 95.

Die Autoren des ersten Aufsatzes stellen 16 Regeln auf, die bei der Zerlegung von Zahlen der Form $10^\alpha \cdot 2^x \pm 1$ anwendbar sind, und verweisen auf die sonstigen zweckdienlichen Hülfsmittel. Dann geben sie Tafeln, in denen die von ihnen ausgeführten Zerlegungen zusammengestellt sind. Die grössere Tafel giebt alle Zerlegungen von $\alpha = 1$ bis 10

und $x = 1$ bis 30. Eine vollständige Prüfung noch grösserer Zahlen ist vollendet worden von Cunningham bei $a = 1$ für x bis zu 60; bei $a = 2, 3, 4$ für x bis 40; bei $a = 5$ bis 20 für x bis 30. Die resultirenden Zerlegungen sind in einer kleineren Tafel enthalten. In den Tafeln sind 55 neue Primzahlen über 9 Millionen als solche bezeichnet, unter ihnen 51 von Cunningham geprüfte.

In der Note von Bickmore werden gewisse Formen als mögliche Factoren mitgeteilt. Lp.

C. E. Bickmore. Note on expressing a number as the difference of two squares. Ed. Times 72, 101-103.

Bemerkungen über diese Zerlegung, welche bei der Aufsuchung der Primfactoren einer vorgelegten Zahl oft gebraucht wird, vom Verf. in der vorstehend besprochenen Aufgabe auch angewandt ist. Lp.

R. W. D. Christie. Question 13980. Ed. Times 72, 40.

In $a \cdot 10^n - 1 \equiv P(M)$ soll a so bestimmt werden, dass P eine ungerade Primzahl ist. Der Verfasser findet, dass a ein Glied der recurrenten Reihe $10u_n + u_{n+1}$ ist, P ein Factor von $10m + 99$. Lp.

D. Biddle. Question 14263. Ed. Times 73, 76.

Wenn T ein Vielfaches von $\sqrt{N - T}$ ist, so ist N zerlegbar, falls nicht $N - T = 1$; umgekehrt, N ist entweder eine Primzahl oder das Quadrat einer Primzahl, wenn kein niedrigerer Wert von T als $N - 1$ die Bedingungen erfüllt. Lp.

J. Cullen. Question 14506. Ed. Times 73, 133-135.

Die Aufgabe enthält einen Hülfssatz nebst seinen Anwendungen bei der Untersuchung einer Zahl auf mögliche Zerlegung in Factoren. Lp.

A. Cunningham. Question 14471. Ed. Times 73, 103-104.

1. $q^x \equiv 1 \pmod{p}$, wo $x = 2^{2Q-3}$, $Q = q^2$, $p = Q \cdot 4^Q + 1$ = Primzahl.

2. $q^x \equiv 1 \pmod{p}$, wo $x = 2^{2Q-4}$, $Q = q^4$, $p = Q \cdot 16^Q + 1$ = Primzahl. Lp.

A. Cunningham. Factorize completely $1440^{10} + 1$. Ed. Times 72, 117-118.

Die Factoren sind:

2073601. 41. 241. 401. 941. 1061. 61. 61. 1256000401.

Lp.

A. CUNNINGHAM. Factorize $722^{10}+1$. Ed. Times 72, 86.

$722^{10}+1 = 5.\ 137.\ 761.\ 881.\ 15401.\ 19001.\ 5.\ 821.\ 69772881.$

Lp.

J. CULLEN. Factorize 329554457. Ed. Times 73, 96.

$$329554457 = (7^{11}-1)/(7-1) = 1123.\ 293459.$$

(Lösung von Cunningham.) Lp.

C. E. BICKMORE. Is the number 78875943472201 prime or composite? Ed. Times 72, 99-101.

Sowohl J. Cullen als Bickmore kommen durch mühevolle Proben zu dem Schlusse, dass die Zahl eine Primzahl ist, welchem Ergebnisse A. Cunningham zustimmt. Lp.

SANJÁNA. Question 13958. Ed. Times 73, 114-115.

1) $134^4+3^4 = 19273.\ 16729.$

2) $86^4+1 = 7673.\ 7129.$

3) $1786^4+9^4 = 17.\ 190649.\ 3139369.$

4) $3266^4+1 = 17.\ 41.\ 15289.\ 10677089.$

Lp.

E. LANDAU. Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre. Nouv. Ann. (3) 19, 344-362, 576.

Die bekannten Sätze, dass der Polynomialcoefficient

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)!}{x_1!\,x_2!\cdots x_\nu!}$$

und der Bruch

$$\frac{(2x_1)!\,(2x_2)!}{x_1!\,x_2!\,(x_1+x_2)!}$$

für positive ganzzahlige Variabeln stets ganze Zahlen darstellen (letzteres wurde zuerst von Catalan aus der Theorie der elliptischen Functionen hergeleitet), geben zu der Fragestellung Anlass, unter welchen Bedingungen der Bruch

$$\frac{(\alpha_1^{(1)}x_1+\cdots+\alpha_\nu^{(1)}x_\nu)!\cdots(\alpha_1^{(m)}x_1+\cdots+\alpha_\nu^{(m)}x_\nu)!}{(\beta_1^{(1)}x_1+\cdots+\beta_\nu^{(1)}x_\nu)!\cdots(\beta_1^{(n)}x_1+\cdots+\beta_\nu^{(n)}x_\nu)!},$$

der im Zähler m und im Nenner n homogene lineare Functionen von ν Variabeln mit ganzzahligen Coefficienten $\geqq 0$ enthält, für alle Systeme $x_1, \ldots, x_\nu \geqq 0$ ganze Zahlen darstellt. Es ergiebt sich als notwendige und hinreichende Bedingung das Bestehen der Ungleichheitsbedingung

$$[\alpha_1^{(1)} y_1 + \cdots + \alpha_\nu^{(1)} y_\nu] + \cdots + [\alpha_1^{(m)} y_1 + \cdots + \alpha_\nu^{(m)} y_\nu] \geqq [\beta_1^{(1)} y_1 + \cdots + \beta_\nu^{(1)} y_\nu] + \cdots + [\beta_1^{(n)} y_1 + \cdots + \beta_\nu^{(n)} y_\nu]$$

(wo $[u]$ die grösste ganze Zahl $\leqq u$ bezeichnet) für alle Systeme reeller Zahlen $y_1, \ldots, y_\nu$ zwischen 0 (incl.) und 1 (incl.). Lnd.

J. Perott. Sur le théorème de Fermat. Darboux Bull. (2) **24**, 175-176.

Alle a^p Möglichkeiten, auf jedes von p Feldern eine der Zahlen $1, 2, \ldots, a$ zu schreiben, zerfallen in zwei Klassen. Entweder man schreibt dieselbe Zahl p-mal hin, was auf a Arten möglich ist, oder es sind nicht alle p hingeschriebenen Zahlen gleich; die Anzahl dieser Möglichkeiten ist, wenn p eine Primzahl ist, durch p teilbar (Gauss: Disq. arithm., art. 41). Also ergiebt sich der Fermat'sche Satz:

$$a^p = a + hp.$$

Dieser Perott'sche Beweis ist jedoch nur der bekannte auf der Entwickelung von $(b_1 + b_2 + \cdots + b_a)^p$ nach dem polynomischen Satz beruhende Beweis in verkleideter Form. Lnd.

M. Vecchi. Intorno al teorema di Wilson. Periodico di Mat. (2) **3**, 22-24.

Einige Formeln, die Sätze ergeben, welche dem Wilson'schen Satze ähnlich sind, werden abgeleitet; z. B.: „Für jede Primzahl p ist das Product der quadratischen Reste, um 1 vermehrt oder vermindert, durch p teilbar; umgekehrt charakterisirt diese Eigenschaft die Primzahlen.“ Oder auch:

$$\{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2y - 1)\}^2 \frac{[\frac{1}{2}(p - 2y - 1)!^2]^2}{2^{2y}} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod{p},$$

gültig für alle Werte von y zwischen 0 und $\frac{1}{2}(p - 1)$. Lp.

J. W. L. Glaisher. Residue of the product of p numbers in arithmetical progression, mod. p^2 and p^3. Messenger **30**, 71-92.

Im ersten Teile bestimmt Verf. das Residuum des Quotienten

$$\frac{l(r + l)(2r + l) \cdots \{(p - 1)r + l\}}{p} \pmod{p}.$$

Einer der Factoren des Zählers ist durch p teilbar, und die Untersuchung

besteht in der Bestimmung des nach Division dieses Factors durch p entstehenden Quotienten, indem das Product der übrigen Factoren nach Wilson $\equiv -1 \pmod{p}$ ist. Der zweite Teil enthält eine strenge analytische Untersuchung des Residuums des Productes

$$l(r+l)(2r+l)\cdots\{(p-1)r+l\} \pmod{p^2}.$$

Das hier gefundene Resultat umschliesst dasjenige des ersten Teiles.

Wbg.

J. W. L. Glaisher. On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers, and their powers, to modulus p^2 or p^3. Quart. J. 31, 321-353.

Verf. führt die Betrachtungen einer früheren Arbeit (Quart. J. 31, 1-35; vergl. F. d. M. 30, 180, 1899) fort. Er berechnet für den Fall, dass n eine Primzahl p ist, die Reste der dort mit $A_1, \ldots, A_{p-1}$ bezeichneten Ausdrücke mod. p^2 und p^3. Für $r < p-1$ ist, wie a. a. O. gezeigt ist, A_r durch p teilbar. Für $\frac{A_r}{p}$ ergiebt sich nun, wenn B_m die m-te Bernoulli'sche Zahl ist:

$$\frac{A_1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \pmod{p},$$

und falls $t > 0$:

$$\frac{A_{2t+1}}{p} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \frac{A_{2t+1}}{p^2} \equiv (-1)^{t+1}\frac{(2t+1)B_t}{4t} \pmod{p},$$

$$\frac{A_{2t}}{p} \equiv (-1)^t \frac{B_t}{2t} \pmod{p}.$$

Ferner wird der Rest von

$$H_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^n}$$

mod. p^2 und p^3 bestimmt. Es ergiebt sich z. B. für Primzahlen $p > 3$: Wenn $2n$ kein Vielfaches von $p-1$ ist, so ist

$$H_{2n} \equiv 0 \pmod{p}, \quad H_{2n-1} \equiv 0 \pmod{p^2};$$

wenn $2n = k(p-1)$, ist

$$H_{2n} \equiv -1 \pmod{p}, \quad H_{2n-1} \equiv -\frac{k+1}{2}p \pmod{p^2}.$$

Endlich wird die $r$te elementarsymmetrische Function S_r von $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ mod. p^2 untersucht, ferner $S_r(1^3, 2^3, \ldots, (p-1)^3)$. Die allgemeine Untersuchung von

$$\lambda_r = S_r(1^n, 2^n, \ldots, (p-1)^n)$$

wird angedeutet; sie zerfällt in n Fälle.

Lnd.

J. W. L. Glaisher. On the residues of r^{p-1} to modulus p^2, p^3 etc. Quart. J. 32, 1-27.

Sylvester hatte (C. R. 52, 1861) über den Rest modulo p der nach dem Fermat'schen Satz für $p =$ Primzahl, $(r, p) = 1$ ganzen Zahl $\frac{r^{p-1}-1}{p}$ einen Satz ohne Beweis ausgesprochen. Verf. zeigt, dass der Wortlaut einer Verbesserung bedarf, und beweist die richtige Formel

$$\frac{r^{p-1}-1}{p} \equiv \frac{\mu_1}{1} + \frac{\mu_2}{2} + \cdots + \frac{\mu_{p-1}}{p-1} \pmod{p},$$

wo

$$\mu_i \equiv -i p^{-1} \pmod{r},\ 0 \leqq \mu_i < r$$

ist. Auch die Reste von r^{p-1} mod. p^3 etc. werden untersucht.

Uebrigens sind dem Verf. zwei Arbeiten von Stern (J. für Math. 100; vergl. F. d. M. 18, 148, 1886) und Mirimanoff (J. für Math. 115; vergl. F. d. M. 26, 209, 1895) entgangen, in denen Sylvester's Fehler schon berichtigt worden ist. Lnd.

J. W. L. Glaisher. Relations connected with the residues of r^{p-1} to modulus p^2 and p^3. Quart. J. 32, 240-251.

Es lässt sich für jede von zwei zu p teilerfremden Zahlen r, r' der Rest ihrer $(p-1)$ten Potenz mod. p^2 und p^3 nach den Methoden der vorigen Arbeit bestimmen. Es sei nun $r' = kp + r$; dann werden die Beziehungen zwischen den für r und r' gültigen Formeln untersucht. Lnd.

J. W. L. Glaisher. On the residues of the sums of the inverse powers of numbers in arithmetical progression. Quart. J. 32, 271-288.

Die in der oben auf S. 185 besprochenen Arbeit des Verf. für H_n gefundenen Resultate werden hier auf einem neuen Wege abgeleitet; derselbe liefert zwar die complicirteren Sätze über die Reste mod. p^2 und p^3 nicht, verdient aber für die Restbestimmung mod. p den Vorzug, weil sich zugleich der Rest der Summe der reciproken gleichnamigen Potenzen von Zahlen einer beliebigen arithmetischen Progression ergiebt. Als Anwendung wird z. B. bewiesen, dass

$$B_{\frac{1}{2}(p-3)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-3)} \frac{1}{30}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{p}{6}\right]^2}\right) \pmod{p}$$

ist. Lnd.

J. W. L. Glaisher. A congruence theorem relating to Eulerian numbers and other coefficients. Lond. M. S. Proc. 32, 171-198.

Sylvester hatte (C. R. 52, 1861) ohne Beweis ausgesprochen,

dass, wenn p eine Primzahl der Form $4k+1$, bezw. $4k-1$ bezeichnet und $(p-1)p^i$ ein Factor von $2n$ ist, p^{i+1} die $n$te Euler'sche Zahl E_n, bezw. $2(-1)^{n+1}+E_n$ teilt. Verf. beweist hier zwei allgemeine Sätze, deren jeder den Specialfall $i=0$ des Sylvester'schen Satzes umfasst. Wenn p eine ungerade Primzahl, r eine zu p teilerfremde Zahl, $l<p+r$, $\left[\frac{l}{p}\right]_r$ der kleinste positive Rest von $\frac{l}{p}$ (mod. r) ist, $\frac{l}{r}$ mod. p genommen wird, ferner

$$B_p(x)=1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(x-1)^{p-1},$$
$$A'_p(x)=B_p(x)-2^p B_p(\tfrac{1}{2}x),$$
$$\left(\frac{l}{p}\right)_{2r}=\left[\frac{l}{p}\right]_{2r}-\left[\frac{l}{p}\right]_r$$

ist, so ist

$$\text{(1)}\qquad r^p B_p\left(\frac{l}{r}\right)\equiv l-\left[\frac{l}{p}\right]_r \text{ (mod. } p),$$

$$\text{(2)}\qquad r^p A'_p\left(\frac{l}{r}\right)\equiv\left(\frac{l}{p}\right)_{2r} \text{ (mod. } p).$$

Von diesen Sätzen werden Anwendungen auf die Bestimmung der Reste gewisser Summen von $\frac{1}{2}(p-3)$ Gliedern mod. p gemacht; z. B. ist

$$E_0-m^2E_1+m^4E_2-\cdots+(-1)^{\frac{1}{2}(p-3)}m^{p-3}E_{\frac{1}{2}(p-3)}$$
$$\equiv 2+\frac{1}{2m}\left\{\left[\frac{m+1}{p}\right]_{4m}-\left[\frac{3m+1}{p}\right]_{4m}\right\}-\left[\frac{1}{p}\right]_4 \text{ (mod. } p).$$

Lnd.

J. W. L. Glaisher. On the residue to modulus p, of

$$1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots+\frac{1}{(p-2)^{2n}}.$$

Messenger **30**, 26-31.

Verf. hat (Quart. J. **31**) gezeigt, dass für eine ungerade Primzahl p

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^{2n}}\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

ist, ausser wenn $2n$ ein Vielfaches von $p-1$ ist, in welchem Falle die Reihe $\equiv -1$ (mod. p) ist. In der vorliegenden Arbeit beweist er, dass

$$1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots+\frac{1}{(p-2)^{2n}}\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

ist, es sei denn $2n$ ein Vielfaches von $p-1$, in welchem Falle die Reihe $\equiv -\frac{1}{2}$ (mod. p) ist. Wbg.

L. Gegenbauer. Ueber ein Theorem des Herrn MacMahon. Monatsh. f. Math. **11**, 287-288.

MacMahon hat (vergl. F. d. M. **24**, 181, 1892) bewiesen, dass die über alle Teiler d von n ausgedehnte Summe $\sum_d \varphi(d) r^{\frac{n}{d}}$ für jedes Zahlenpaar r, n durch n teilbar ist. Verf. beweist allgemeiner: Ist die Function $F(x)$ so beschaffen, dass die über alle Teiler d einer ganzen Zahl n ausgedehnte Summe $\sum_d F(d)$ durch n teilbar ist, so ist $\sum_d F(d) r^{\frac{n}{d}}$ für jedes Zahlenpaar r, n durch n teilbar.

Der Beweis wird auf den Nachweis des Specialfalles $F(x) = \mu(x)$ zurückgeführt. Dieser Satz, dass $\sum_d \mu(d) r^{\frac{n}{d}}$ durch n teilbar ist, ist oft entdeckt worden. Den vom Verf. citirten Autoren Kantor, Picquet, Kœnigs, Lucas, Weyr, Dickson ist noch als erster, der den Satz ausgesprochen hat, Serret (Nouv. Ann. 1855, 261), ferner Pellet (vergl. F. d. M. **15**, 142, 1883) und Cordone (vergl. F. d. M. **26**, 212, 1895) hinzuzufügen. Lnd.

R. W. D. Christie. Question 14327. Ed. Times **73**, 45-47.

Die Aufgabe verlangt die leichteste Methode zur Auffindung der ersten primitiven Wurzel einer Primzahl, danach aller übrigen. Cunningham verweist auf die Gauss'sche Methode, dargestellt in Mathews' Theory of numbers, bezeichnet das Verfahren aber als recht mühsam und zeigt, wie man es durch geschicktes Probiren abkürzen kann. Christie erläutert einen von ihm ersonnenen Weg an den Primzahlen 23, 73 und 71 und findet, dass derselbe weder mühsam sei, noch auf Probiren beruhe. Dagegen zeigt Cunningham, dass diese Beispiele nach den von ihm angegebenen drei Regeln rasch zu erledigen sind. Lp.

T. Pepin. Étude historique sur la théorie des résidus quadratiques. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **16**, 229-276.

Eine etwas verspätete Entgegnung auf Kronecker's in den Berl. Monatsber. 1875 (vergl. F. d. M. **7**, 18-19, 1875) enthaltene historische Untersuchung über das Reciprocitätsgesetz. Da Verf. die Thatsachen, 1. dass Euler ohne Beweis das Reciprocitätsgesetz in unwesentlich anderer Form ausgesprochen hat, 2. dass Legendre's Beweis ungenügend ist, und 3. dass Gauss als erster den Satz bewiesen hat, nicht bestreitet, so wird der Leser die Ueberzeugung des Verf. nicht teilen, dass Legendre's unzweifelhaft grosses Verdienst von Kronecker zu gering eingeschätzt worden ist. Verf. meint, der Umstand, dass noch jetzt, ein Vierteljahrhundert nach Kronecker's Publication, das Reciprocitätsgesetz das Legendre'sche heisst, beweise, dass die wissenschaftliche Welt Kro-

necker's Darlegungen nicht gefolgt ist. Dem gegenüber sei nur darauf hingewiesen, dass z. B. die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ noch jetzt die Pell'sche genannt zu werden pflegt, obgleich seit langer Zeit feststeht, dass sie sich schon bei Fermat findet, einfach weil der ihr von Euler gegebene Name „Pell'sche Gleichung" sich einmal eingebürgert hat.

Verf. charakterisirt Legendre's Beweis so: „Obgleich er einen schwachen Punkt besitzt, den Legendre selbst erkannt hat, ist er für die meisten Fälle vollkommen streng, so dass er die Wahrheit des Satzes ausser Zweifel stellt." Und an einer anderen Stelle sagt er: „Ein vermuteter Satz ist kein entdeckter Satz; er wird erst in dem Moment wirklich entdeckt sein, wo seine Wahrheit ausser Zweifel gestellt ist." Ein Satz, dessen Richtigkeit in dem hohen Grade wahrscheinlich ist, wie das Reciprocitätsgesetz es nach Legendre's Untersuchungen war, könnte doch aber auch falsch sein; das Reciprocitätsgesetz hat sich zufällig als richtig herausgestellt.

Streitig sind historische Fragen von geringerer Bedeutung, wie die, aus welchen Gründen Gauss in den Jahren 1801 und 1808 verschiedene Angaben über die Geschichte des Reciprocitätsgesetzes gemacht hat, und ob Gauss eine bestimmte Euler'sche Abhandlung gekannt hat.

Es sei noch zur Charakterisirung der Abhandlung ohne Commentar aus der Einleitung der Satz citirt: „Sollte nicht das Urteil des gelehrten Verf. [Kronecker] durch einen zu lebhaften Wunsch beeinflusst sein, Frankreich einen seiner wissenschaftlichen Ruhmestitel wegzunehmen?"

Lnd.

E. Fischer. Ueber Eisenstein's Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes. Monatsh. f. Math. **11**, 176-182.

Eisenstein stellte, vom Gauss'schen Lemma ausgehend, das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$, wo p und q Primzahlen sind, durch die Formel

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \Pi\left(4\sin^2\frac{2b\pi}{q} - 4\sin^2\frac{2a\pi}{p}\right)\begin{pmatrix} a = 1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2} \\ b = 1, 2, \cdots, \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}$$

dar, aus welcher das Reciprocitätsgesetz unmittelbar abgelesen werden kann. Eine solche Darstellung als Resultante zweier ganzen ganzzahligen Functionen einer Variable wird vom Verf. ohne Entfernung aus dem Gebiete der ganzen ganzzahligen Functionen unbestimmter Grössen abgeleitet, also auch ohne Benutzung des Gauss'schen Lemmas. Bezeichnet man die Resultante von

$$g(x) = a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \cdots + a_\mu,$$
$$h(x) = b_0 x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + \cdots + b_\nu$$

mit $R(g,h)$, definirt $f_n(u,v)$ für ungerades n durch die Gleichung

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2) f_n((x_1 + x_2)^2, x_1 x_2)$$

$\left(\frac{x_1^n + x_2^n}{x_1 + x_2}\right.$ ist ja eine ganze symmetrische Function von x_1, x_2, also eine ganze rationale Function von $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$, wo $x_1 + x_2$ offenbar nur in gerader Potenz auftreten kann) und setzt

$$f_n(x,1) = f_n(x),$$

so ergiebt sich für zwei positive ungerade Zahlen m, n

$$\left(\frac{m}{n}\right) = R(f_m, f_n).$$

Da nun

$$R(f_n, f_m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} R(f_m, f_n)$$

ist, so ist in jener Identität das Reciprocitätsgesetz enthalten. Lnd.

W. Scheibner. Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$. Leipz. Abh. **25**, 369-410.

Verf. giebt aus einer älteren, für seine Vorlesungen über Zahlentheorie niedergeschriebenen Ausarbeitung eine klare und ausführliche Darstellung der Lehre von den quadratischen Resten unter besonderer Hervorhebung des Umstandes, dass die meisten für das Reciprocitätsgesetz aufgestellten Beweise auch in Bezug auf das Jacobi'sche Symbol gelten, also die Primzahlqualität der Moduln nicht voraussetzen. Dann geht Verf. zur analytischen Bedeutung des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ über und bespricht die mit der Wertbestimmung der Gauss'schen Summen zusammenhängenden Probleme, speciell die Anwendung auf die lineare Transformation der Thetafunctionen. Jede der Transformationsformeln kann als analytischer Ausdruck für den Wert des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ angesehen werden. Lnd.

A. Zinna. L'analisi diofantea esposta con nuovi metodi ed illustrata con esempi. Trapani: Messina e Co. 68 S. 16mo.

E. Maillet. Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. Journ. de Math. (5) **6**, 261-277.

Die in einer vorangegangenen Note (vergl. F. d. M. **30**, 188-189, 1899) ausgesprochenen Sätze werden hier bewiesen. Lnd.

Züge. Lösung der diophantischen Gleichung $axy+bx+cy+d=0$. Hoppe Arch. (2) **17**, 329-332.

Diese leicht zu lösende Gleichung enthält u. a. als Specialfall die früher von Züge und Schilling behandelte, der Optik entstammende Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ (vergl. F. d. M. **26**, 206-207, 1895). Lnd.

G. Sforza. Sopra un problema di analisi indeterminata. Periodico di Mat. (2) **2**, 252-255.

„In ganzen und nicht negativen Zahlen die Gleichung $ax+by=c$ aufzulösen, wenn a, b, c ganz und nicht negativ, a und b relativ prim sind.“ Zu der bekannten Lösung dieser Aufgabe giebt der Verf. eine Anzahl interessanter Bemerkungen, z. B.: Zahlen, die kleiner als ab sind und nicht die Form $ax+by$ haben, giebt es im ganzen $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$. Die Zahlen $ab-1, ab-2, \ldots, ab-(a+b)+1$ sind alle von der Form $ax+by$. Lp.

G. B. Mathews. Diophantine inequalities. Cambr. Trans. **19**, 83-110.

P. A. MacMahon. The diophantine inequality $\lambda x \geqq \mu y$. Cambr. Trans. **19**, 111-131.

A. Palmström. Einige zahlentheoretische Probleme. Videnskabsselskabets Skrifter. I math.-naturv. Klasse 1900. No. 3. 16 S. 8°. Kristiania.

Es wird eine Methode zur Bildung der Zahlen von p Ziffern auseinandergesetzt, deren Quadrate mit denselben p Ziffern endigen, mit denen die Zahl selbst geschrieben ist. Einige Eigenschaften dieser Zahlen und die Anzahl der Lösungen für ein beliebiges Grundzahlsystem werden angegeben. Allgemeiner wird zuletzt die Aufgabe gelöst, diejenigen ganzen positiven Zahlen $x<g^f$ zu finden, die der Gleichung

$$ax^2+bx=yg^f$$

genügen, für den Fall, dass

$$b^2-4ac=d^2$$

ist. Gbg.

ZÜGE. **Allgemein-pythagoreische Zahlen.** Hoppe Arch. (2) 17, 354-362.

Es werden alle Tripel ganzer Zahlen bestimmt, welche der Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

genügen, wo $\cos\alpha$ eine gegebene rationale Zahl ist, d. h. alle ganzzahligen Dreiecke, bei denen ein Winkel mit rationalem Cosinus gegeben ist. Wie Verf. in einem Nachtrag selbst bemerkt, ist diese Aufgabe schon von Schwering (F. d. M. **29**, 156, 1898) behandelt worden, übrigens auf einfacherem Wege. Lnd.

R. HOPPE. **Definitive Scheidung der pythagoreischen und nicht-pythagoreischen Zahlen.** Hoppe Arch. (2) 17, 332-333.

Es handelt sich um den bekannten Satz, dass eine Zahl dann und nur dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, wenn sie keinen Primfactor der Form $4n-1$ in ungerader Potenz enthält.

Lnd.

R. F. DAVIS. C. E. HILLYER, A. CUNNINGHAM. **Question 14087.** Ed. Times 72, 30-33.

Davis teilt aus „Life and letters of Lewis Carroll" von S. D. Collingwood die Aufgabe mit, drei flächengleiche rechtwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen zu finden. Hillyer giebt folgende allgemeine Lösung. Bekanntlich ist für jedes rechtwinklige Dreieck in ganzen Zahlen a, b, c:

$$a = 2mn,\quad b = m^2-n^2,\quad c = m^2+n^2,\quad \varDelta = mn(m^2-n^2).$$

Tripel von Dreiecken mit gleichem Inhalte folgen aus:

(1) $m = k^2+kl+l^2,\qquad n = k^2-l^2;$

(2) $m = k^2+kl+l^2,\qquad n = 2kl+l^2;$

(3) $m = k^2+2kl,\qquad n = k^2+kl+l^2.$

$$\varDelta = (k^2+kl+l^2)(k^2-l^2)(2k+l)(k+2l)kl.$$

Cunningham berichtet, dass diese Aufgabe in einer gewissen Vollständigkeit gelöst ist in Frenicle's „Traité des triangles rectangles en nombres", etc. (1729?), und teilt aus dieser Schrift von 166 Seiten eine Skizze der in ihr entwickelten allgemeinen Methode mit. Ferner entnimmt er den von Frenicle durch blosses tabellarisches Rechnen gefundenen Zahlenergebnissen Beispiele von flächengleichen pythagoreischen Dreiecken; hierbei treten nicht bloss drei zusammengehörige Dreiecke auf, sondern bis zu sechs. Lp.

H. SCHUBERT. **Ueber heronische Dreiecke mit ganzzahliger Transversale.** Unterrichtsbl. f. Math. 6, 70-71.

„Um alle ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler zu finden, die, als Masszahlen für die Seiten eines Dreiecks aufgefasst, auch die

Schwerpunktstransversale t (zu a gehörig) ganzzahlig gestalten, wähle man für e, e', f, f' alle möglichen ganzen Zahlen so aus, dass $e > e'$, $f > f'$ ist und von den Zahlen e und e', bezw. f und f', die eine gerade, die andere ungerade ist. Dann setze man:

$$b = e(f+f') - e'(f-f'), \quad c = e(f-f') + e'(f+f'),$$
$$a = 2(ef - e'f').$$

Dann wird man für t die ganze Zahl $ef' + e'f$ erhalten. Lp.

D. N. Lehmer. Rational triangles. Annals of Math. (2) **1**, 97-102.

Der Verf. entwickelt auf einem neuen Wege einige Sätze aus der Theorie der rationalen Dreiecke, deren Seiten und Inhalt ganzzahlig darstellbar sind. Jhk.

Evans. Question 5276. Ed. Times **72**, 77-78.

Ein Punkt O in der Ebene eines Dreiecks ABC sei so gewählt, dass die drei Verbindungslinien OA, OB, OC gleiche Winkel mit einander bilden. OA, OB, OC (x, y, z) sollen gleichzeitig mit AB, BC, CA ganze Zahlen sein. Der Gang der Rechnung wird angegeben. Als kleinste Zahlen werden ermittelt:

$$a = 399,\ b = 455,\ c = 511,\ x = 195,\ y = 264,\ z = 325.$$

Lp.

A. Cunningham. Questions 14133, 14353. Ed. Times **72**, 45-46; **73**, 132-133.

Sind r und z zwei ganzzahlige Lösungen der Gleichung $2r^2 - z^2 = 1$, so ist

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2r-1)^3 = r^2 z^2;$$

daraus ergiebt sich die Möglichkeit, dass die Summe von auf einander folgenden Kuben ungerader Zahlen eine Quadratzahl werde. In der zweiten Note werden Folgen von Kuben nachgewiesen, die nicht mit 1 beginnen. Lp.

R. W. D. Christie. Question 14380. Ed. Times **73**, 115-117.

Die Aufgabe lautet: Es sei p eine ungerade Primzahl von der Form $8M+3$. Die Gleichung $X^2 - pY^2 = 1$ in ganzen Zahlen zu lösen, ohne die Methode der Kettenbrüche zu brauchen; dann die Methode für alle ungeraden Primzahlen zu verallgemeinern; endlich die Fälle einer sofortigen Lösung anzugeben.

Nach einer ersten Lösung von A. Cunningham giebt Christie selbst den Gang der Rechnung, den er bei der Stellung der Aufgabe im Sinne hatte. Lp.

S. Realis. Questions de théorie des nombres. Mathesis (2) **10,** 177-180.

Beweis der Unmöglichkeit, in ganzen Zahlen gewisse biquadratische Gleichungen zu lösen, die auf Euler'sche und Fermat'sche Gleichungen zurückführbar sind. Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $mx^2-3mxy+(2m+1)y^2=1$. Mn. (Lp.).

E. Dintzl. Bemerkung über einen Satz des Herrn Lerch. Monatsh. f. Math. **11,** 67-70.

Lerch hatte (vergl. F. d. M. **29,** 175, 1898) bei einer transcendenten Untersuchung als Nebenresultat den Satz gefunden, dass für jede quadratfreie ungerade ganze Zahl m

$$\sum_{a=1}^{m-1}\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a+1}{m^2}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\mu(m)$$

ist, wo $\mu(m)$ die Möbius'sche Function (J. für Math. **9,** 1832) ist. Verf. beweist, einer Andeutung von Gegenbauer folgend, diese Relation auf directem Wege und ermittelt allgemeiner den Wert von

$$s(m)=\sum_{a=1}^{m-1}\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a-\sigma}{m}\right)^2,$$

wo m eine beliebige positive ungerade Zahl, $\prod_{\varrho=1}^{\lambda} p_\varrho^{a_\varrho}$ und σ zu m teilerfremd ist. Es ergiebt sich

$$s(m)=\frac{m}{p_1\cdots p_\lambda}\lambda(m)\left(\frac{\sigma}{m}\right)\prod_{\varrho=1}^{\lambda}(p_\varrho-2)^{\frac{1}{2}(\lambda(p_\varrho^{a_\varrho})+1)},$$

wo $\lambda(m)$ die Liouville'sche Function (Journ. de Math. (2) **2,** 246, 1857) ist. Lnd.

E. Busche. Ein Beitrag zur Differenzenrechnung und zur Zahlentheorie. Math. Ann. **53,** 243-271.

Die in dieser Arbeit enthaltene Fundamentalformel hat Verf. während des Druckes bereits in noch allgemeinerer Form in den C. R. **129** publicirt (vergl. F. d. M. **30,** 182-183, 1899). Hier beweist er nur den Specialfall, dass die a. a. O. mit $F(x,y,z)$ bezeichnete Function das Product dreier beziehlich von x, y, z abhängigen Functionen ist. Zur Ableitung der bekannten Dirichlet'schen Transformationsformel (Werke **2,** 101) genügt jener Specialfall. Ferner macht Verf. eine Anwendung auf die Entwickelung einer endlichen Summe in eine Reihe von Gliedern, die von den Differenzen der in der Summe auftretenden Function abhängen. Die Entwickelungscoefficienten stellen eine Verallgemeinerung der Binomialcoefficienten dar und weisen manche analoge Eigenschaft auf. Lnd.

D. N. Lehmer. Asymptotic evaluation of certain totient sums. American J. **22**, 293-335.

Die zahlentheoretische Function $\varphi(x)$ wird bekanntlich von Sylvester totient genannt. Im ersten Kapitel glaubt Verf. durch Einführung des „m-fold totient“ $\varphi_m(x)$ (Anzahl aller Systeme von m Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m \leqq x$, für welche $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$ teilerfremd sind) etwas Neues zu leisten. Diese Function ist aber schon längst betrachtet und z. B. in der Gruppentheorie angewendet worden (Camille Jordan: Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, S. 96). Ihr Wert ist

$$\varphi_m(x) = x^m \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^m}\right) = x^m \sum_d \frac{\mu(d)}{d^m},$$

wo p alle Primfactoren, d alle Divisoren von x durchläuft; ihre charakteristische Eigenschaft ist

$$\sum_d \varphi_m(d) = x^m.$$

Nachdem Verf. noch viele andere complicirtere Relationen für $\varphi_m(x)$ abgeleitet hat, geht er im zweiten Kapitel dazu über, gewisse mit ihr zusammenhängende Summen asymptotisch abzuschätzen. Gleich beim Beginn begeht er aber einen Fehler. Es handelt sich um die Hülfsaufgabe, $\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n}$ näherungsweise zu berechnen, zunächst für ganze x, worauf der allgemeine Fall leicht zurückführbar ist. Statt nun einfach von der Formel

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = \log x + C + \frac{\vartheta}{2x} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

auszugehen, welche

$$\left| \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x \right| \leqq C + \frac{1}{2} \leqq 1,1$$

ergiebt, wendet Verf. für $\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x - C - \frac{1}{2x}$ die ins Unendliche ausgedehnte, bekanntlich divergente (semiconvergente) Reihe an, deren allgemeines Glied $(-1)^i B_{2i-1} \frac{1}{2ix^{2i}}$ ist; dabei schreibt er versehentlich noch $2i!$ in den Nenner, und anstatt an der Convergenz der so entstehenden Potenzreihe Anstoss zu nehmen, benutzt er gerade diese Convergenz zur Abschätzung von $\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x$. Der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes wird vergrössert, wenn x durch 1 ersetzt wird; die für $x = 1$ entstehende Reihe $C + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i-1}}{2i!} \frac{1}{2i}$ hat eine Summe < 3; daher (so schliesst Verf.) ist die gesuchte Differenz dem absoluten Betrage nach stets < 3. Glücklicherweise ist das Resultat selbst richtig, so

dass seine Anwendung im folgenden berechtigt ist. Von den asymptotischen Sätzen sei z. B. erwähnt:

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \varphi_m(i^n k^n) = \frac{x^{mn+1}}{mn+1} \frac{P_{(m,k)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{mn+1}}} + O(x^{mn} \log x),$$

wo

$$k = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \quad P_{(m,k)} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - 1}{p_i^{a\ -1}(p_i^{m+1} - 1)}.$$

Im dritten und vierten Kapitel werden die „totient points“, d. h. Gitterpunkte mit teilerfremden Coordinaten im n-dimensionalen Raume betrachtet; zunächst werden für die Ebene hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Anzahl der in einem geschlossenen Flächenstück liegenden Gitterpunkte, deren Abscisse und Ordinate teilerfremd sind, dividirt durch den Inhalt des Flächenstücks, sich der Grenze $\frac{6}{\pi^2}$ nähert, falls das Flächenstück sich unendlich ausdehnt. Das sind exacte Untersuchungen, während die manchmal in der Litteratur angewendete Ausdrucksweise: „die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen teilerfremd sind, ist $\frac{6}{\pi^2}$“ falsch oder mindestens einer präcisen Bedeutung bar ist. Auch Zusatzbedingungen, wie etwa die, das x durch eine Zahl k teilbar ist, werden eingeführt.

Die Schlussbetrachtungen enthalten noch eine neue Problemstellung, die hier zunächst an einem Beispiel auseinandergesetzt werden möge. Die mittlere Anzahl der Darstellungen aller Zahlen $\leqq N$ durch die Form x^2+y^2 ist bekanntlich (für $N=\infty$) π. Daraus lässt sich herleiten, dass die Anzahl der Lösungen von

$$x^2+y^2 \leqq N$$

mit der Nebenbedingung, dass x gerade, y ungerade und zu x teilerfremd ist, durch N dividirt, sich für $N=\infty$ der Grenze $\frac{1}{2\pi}$ nähert. Nun lässt sich aber eine Zahl dann und nur dann in zwei Quadrate obiger Art zerlegen, wenn alle ihre Primfactoren die Form $4k+1$ haben, und zwar alsdann auf $2^{\nu-1}$ Arten, wenn ν die Anzahl ihrer verschiedenen Primfactoren ist. Versteht man also unter $\Theta_{a,b}(x)$ 1 oder 0, je nachdem alle Primfactoren von n der Form $at+b$ angehören oder nicht, so ist

$$\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} 2^{\nu(x)} \Theta_{4,1}(x) = \frac{1}{\pi}.$$

Wie steht es nun mit

$$\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} 2^{\nu(x)} \Theta_{4,3}(x)?$$

Verf. vermutet, dass der limes existirt und $\frac{2}{\pi}$ ist. Die Theorie der quadratischen Formen bietet jedenfalls keine Handhabe, diese Frage anzugreifen; sie führt, wie Verf. zeigt, für jede Determinante nur zu einem Satz über das System s der Linearformen, für welche D quadratischer Rest von den durch sie dargestellten Primzahlen ist. Die bekannte Formel für die mittlere Anzahl der Darstellungen aller Zahlen durch das Formensystem führt zu einer anderen:

$$\varepsilon \lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} 2^{\nu(x)} \Theta_s(x) = \frac{12}{\pi} h \sqrt{\Delta} P_{(1,2\Delta)} \text{ für } D = -\Delta < 0,$$

$$= \frac{6}{\pi^2} h \sqrt{D} P_{(1,2D)} \log(T + U\sqrt{D}) \text{ für } D > 0,$$

wo h die Klassenzahl, T, U die Fundamentallösung der Pell'schen Gleichung ist, $P_{(m,k)}$ die oben angegebene Bedeutung hat, ε für $-D = \Delta > 1$ gleich 2, für $-D = \Delta = 1$ gleich 4, für $D > 0$ gleich 1 ist und $\Theta_s(x) = 1$ oder $= 0$, je nachdem alle Primfactoren von x zu dem System s von Linearformen gehören oder nicht. Aber für eine einzelne Linearform $at + b$ bleibt die Frage nach Existenz und Wert von $\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} 2^{\nu(x)} \Theta_{a,b}(x)$ offen.

Lnd.

A. Bozal Obejero. Suma de las potencias $m^{\text{ésimas}}$ de las recíprocos de todos los divisores de un número. Progreso mat. (2) **2,** 193-194.

Der Verf. giebt eine Formel zur Bestimmung der Summe der m^{ten} Potenzen der reciproken Divisoren einer gegebenen ganzen Zahl.

Tx. (Lp.)

N. W. Bugajew. Zusammenhang der Zahlenintegrale nach Divisoren mit den Zahlenintegralen nach natürlichen Zahlen. Mosk. Math. Samml. **21,** 335-350. (Russisch.)

N. W. Bugajew. Zusammenhang der Zahlenintegrale nach natürlichen Zahlen mit den Zahlenintegralen gemischten Charakters. Mosk. Math. Samml. **21,** 499-536. (Russisch.)

Der betreffende Zusammenhang wird vermittelst der Function $\bar{u}(n)$ hergestellt, welche den Wert 1 hat für jede ganze Zahl u, die Divisor von n ist, und den Wert 0 für u als Nichtdivisor von n, also $\bar{u}(n) = E\left(\frac{n}{u}\right) - E\left(\frac{n-1}{u}\right)$. Mit Hülfe dieser Function kann man jede Summe nach natürlichen Zahlen in das Zahlenintegral nach den Divisoren transformiren und umgekehrt. Es folgt die Anwendung dieses Princips auf verschiedene Formeln der Arbeit von Bugajew: „Zahlen-

identitäten, welche mit den Eigenschaften des Symbols E im Zusammenhang stehen" (Mosk. Math. Samml. **1**). — In der zweiten Abhandlung führt derselbe Gedanke zu weiteren Anwendungen. Es werden die Summen betrachtet, welche sich auf alle Wurzeln gewisser unbestimmter Gleichungen beziehen, wie $\Sigma f(u,v)$, wo u, v ganzzahlige Wurzeln der Gleichung $z+u+v=n$ sind. Verschiedene Functionen $f(u,v)$ geben verschiedene Zahlenidentitäten, wie $f(u,v)=\varphi(u).\theta(u).\bar{u}(v)$ (§ 2) u. s. w. Si.

F. Rogel. Entwickelung einiger zahlentheoretischer Functionen in unendliche Reihen. Prag. Berichte 1900, No. 30, 7 S.

Enthält die Fortsetzung der gleichnamigen Abhandlung des Verf. in Prag. Ber. 1897 (F. d. M. **28**, 181).

1. Anzahl $\varphi_r(n)$ der Zahlen $< n$, die mit n keine r-te Potenz einer Primzahl zum gemeinschaftlichen Masse haben.

2. Anzahl der Zahlen $< n$, deren grösstes gemeinschaftliches Mass mit n nur Primfactoren enthält, welche in der r-ten Potenz auftreten, und die also von der Form $2^k\, 3^k\, 5^k\, 7^k\, 11^k \cdots$ sind, wo k entweder gleich r oder gleich Null ist. Sda.

J. C. Kluyver. Der Staudt-Clausen'sche Satz. Math. Ann. **53**, 591-592.

Der Schwering'sche Beweis dieses Satzes (vergl. F. d. M. **30**, 253, 1899) veranlasst den Verf. zur Mitteilung eines anderen, auch sehr einfachen Beweises, der sich auf die Formel

$$(-1)^{n+1} B_n = \sum_{h=1}^{2n+1} \frac{1}{h} D^{2n}_{x=0}\, e^x (1-e^x)^{h-1}$$

stützt. Lnd.

F. Mertens. Beweis, dass jede lineare Function mit ganzen complexen teilerfremden Coefficienten unendlich viele complexe Primzahlen darstellt. Prace mat.-fiz. **11**, 194-222. (Polnisch.)

Vergl. F. d. M. **30**, 192, 1899.

F. Mertens. Ueber einen Satz von Dirichlet. Wien. Ber. **109**, 415-480.

Die von Dirichlet ausgesprochenen Sätze, dass jede primitive binäre quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellt, auch unter Hinzufügung der Nebenbedingung, dass die Primzahlen in einer gegebenen, mit den Charakteren der Form verträglichen Linearform ent-

halten sind, sind zuerst von Weber (vergl. F. d. M. **14,** 141-142, 1882) und A. Meyer (vergl. F. d. M. **20,** 192, 1888) bewiesen worden. Aber die hierbei benutzten Hülfsmittel gehören der Lehre von der Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen an, so dass noch Bachmann in seinem 1894 erschienenen Werk „Die analytische Zahlentheorie" (vergl. F. d. M. **25,** 249-252, 1893-94) auf eine ausführliche Darlegung dieser Entwickelungen verzichten musste, den Wunsch nach einem elementaren Nachweise aussprechend. Dies wurde zuerst vom Verf. in einer früheren Arbeit geleistet (vergl. F. d. M. **26,** 219-222, 1895). Bald darauf hatte auch de la Vallée-Poussin (vergl. F. d. M. **28,** 178-180, 1897) dem Desideratum Genüge gethan; sein Beweis ist aber trotz seiner principiell einfachen Natur sehr complicirt und wenig elementar. (Allerdings erreicht er zugleich viel mehr; er liefert nämlich den Nachweis, dass die Menge der Primzahlen der verlangten Art bis x, dividirt durch $\frac{x}{\log x}$, sich einem Grenzwert nähert). Darum ist es freudig zu begrüssen, dass Mertens in der vorliegenden Arbeit seinen eigenen früheren Beweis in noch einfacherer Weise darstellt. Lnd.

R. Daublebsky v. Sterneck. Zur Tschebyschef'schen Primzahlentheorie. Wien. Ber. **109,** 1137-1158.

Bekanntlich haben Hadamard (vergl. F. d. M. **27,** 154, 1896) und de la Vallée-Poussin (vergl. F. d. M. **27,** 155, 1896; **28,** 178, 1897) mit Hülfe der Theorie der Riemann'schen ζ-Function bewiesen, dass, wenn die Summe sich auf alle Primzahlen $p \leqq x$ erstreckt, $\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} \Sigma \log p$ existirt und $= 1$ ist. Daraus ergab sich unmittelbar, dass für jedes positive ε eine Zahl ξ existirt, so dass für alle $x \geqq \xi$ zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ mindestens eine Primzahl liegt (oder auch, was nicht allgemeiner ist, dass bei weiterer Annahme einer Zahl k für alle x von einem gewissen Werte ξ an zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ mindestens k Primzahlen liegen). Trotzdem ist es von grossem Interesse, zu untersuchen, wie weit man sich diesem Resultate unter alleiniger Benutzung der älteren, elementaren Tschebyschef'schen Methoden nähern kann. In Tschebyschef's grundlegender Arbeit (Journ. de Math. (1) **17,** 1852) ist implicite der Nachweis jenes Satzes für alle $\varepsilon > 0{,}2$ enthalten, zugleich mit den Mitteln zur wirklichen Bestimmung einer von ε, bezw. von ε und k abhängigen Zahl ξ, von der an das Intervall x bis $(1+\varepsilon)x$ mindestens 1, bezw. k Primzahlen enthält.

In Tschebyschef's Sinne hat Sylvester zweimal weitergearbeitet. In der ersten Arbeit (vergl. F. d. M. **13,** 132, 1881), an welche Verf. anknüpft, gelang es ihm, die Aufgabe für alle $\varepsilon > 0{,}167$ zu lösen; in der zweiten (vergl. F. d. M. **23,** 181-182, 1891), die wenig bekannt und auch dem Verf. entgangen ist, ist Sylvester durch Betrachtung der Reihe:

$$(1)\quad T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{6}\right) - T\left(\frac{x}{7}\right) + T\left(\frac{x}{70}\right) - T\left(\frac{x}{210}\right),\quad T(x) = \log([x]!)$$

und anderer complicirterer Reihen von ähnlicher Structur bis zu $\varepsilon > 0{,}092$ vorgedrungen.

Das Resultat der vorliegenden Arbeit, in welcher Verf. mit Hülfe von (1) bis zu $\varepsilon > 0{,}1427048$ gelangt, ist also schon in jener zweiten Sylvester'schen Untersuchung enthalten. Es sei noch bemerkt, dass man mit Hülfe neuerer Untersuchungen de la Vallée-Poussin's (vergl. F. d. M. **30**, 193-194, 1899) über die ζ-Function in der Lage ist, nach Annahme eines $\varepsilon > 0$ und eines k ein ξ wirklich zu bestimmen, das die Anfangs ausgesprochene Bedingung erfüllt. Lnd.

E. Landau. Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers. S. M. F. Bull. **28**, 25-38.

Hadamard hatte (vergl. F. d. M. **27**, 154, 1896) den Primzahlsatz

$$(1)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p = 1$$

(wo p alle Primzahlen $\leqq x$ durchläuft) mit Hülfe des allgemeineren Satzes

$$(2)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} = \Gamma(\mu) \qquad (\mu > 1)$$

bewiesen und die Vermutung ausgedrückt, dass (2) sich nicht umgekehrt aus (1) könne herleiten lassen; er stellte vielmehr die Aufgabe, zu untersuchen, welchen genaueren Aufschluss der Satz (2) über die Ordnung des Nullwerdens der Function $\frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p - 1$ geben kann. In der vorliegenden Arbeit wird aber gezeigt, dass (2) thatsächlich eine Folgerung aus (1) ist, also für jedes System von Zahlen p gilt, das (1) befriedigt, mithin über die Verteilung der Primzahlen keinen neuen Aufschluss liefern kann. Dies ergiebt sich aus einem durch partielle Summation beweisbaren Hülfssatz über gewisse hinreichende Bedingungen, aus denen für eine Function zweier Variabeln $F(v, x)$ die asymptotische Gleichheit

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) \backsim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du$$

folgt.

Ferner wird mit diesem Hülfsmittel der Satz bewiesen, dass die Menge aller Zahlen $\leqq x$, die aus k Primfactoren zusammengesetzt sind, asymptotisch

gleich $\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ ist, d. h. dass der Quotient durch diese Function sich für $x=\infty$ der Grenze 1 nähert.

Nunmehr wird auch der von de la Vallée-Poussin (vergl. F. d. M. **30**, 193-194. 1899) mit Hülfe seiner neuen Untersuchungen über die Verteilung der Nullstellen der ζ-Function bewiesene Satz

$$\sum_{p\leq x}\log p = x + O\left(xe^{-a\sqrt{\log x}}\right)$$

(a eine positive Constante) angewendet; er gestattet, einige Ergebnisse schärfer zu formuliren. Es wird endlich darauf hingewiesen, dass aus ihm der andere Satz de la Vallée-Poussin's, dass die Primzahlmenge bis x gleich $Li(x)+O\left(xe^{-a\sqrt{\log x}}\right)$ ist, sich direct beweisen lässt, ohne, wie sein Entdecker es thut, nochmals die Theorie der ζ-Function anzuwenden. Lnd.

H. von Koch. Sur la distribution des nombres premiers. C. R. **130**, 1243-1246.

H. von Koch. Sur la distribution des nombres premiers. Acta Math. **24**, 159-182.

Diese Arbeiten (die erste ist ein während des Druckes der zweiten erschienener Auszug) enthalten für das Primzahlproblem eine wichtige Erweiterung der Methoden. Zur Umkehrung der Gleichung

$$(1)\qquad \log\zeta(s) = \Sigma p^{-s} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3s} + \cdots,$$

welche die Riemann'sche ζ-Function durch die unendliche Folge der Primzahlen ausdrückt, war es herkömmlich, als Discontinuitätsfactor das Integral

$$J(v) = \lim_{s=\infty}\int_{a-si}^{a+si} e^{vz}\,d\log z \quad (a>0)$$

zu nehmen (vergl. Bachmann: Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894, S. 172-174 und 385). Statt dessen geht Verf. von der Bemerkung aus, dass, wenn x und s zwei positive Zahlen bedeuten,

$$\lim_{s=\infty}\left(1-e^{(-x^s)}\right) = 1 \text{ oder } 1-e^{-1} \text{ oder } 0$$

ist, je nachdem $x \gtreqless 1$. Betrachtet man nun den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\,x^{\nu s}\log\zeta(\nu s),$$

ersetzt $\zeta(\nu s)$ durch die aus (1) folgende Doppelreihe und lässt s unendlich wachsen, so ergiebt sich als Grenzwert der dreifach unendlichen Summe $f(x)-\varepsilon$, wo $F(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x ist, wo

$$f(x) = F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

gesetzt ist und wo $\varepsilon=0$, wenn x keine Primzahlpotenz ist, dagegen für $x=p^\lambda$ gleich $1/\lambda e$.

Es bedeute ferner im Anschluss an Tschebyschef $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $\leqq x$ und $\psi(x)$ die Summe $\vartheta(x)+\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\vartheta(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$. Wenn zur Abkürzung $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=Z(s)$ gesetzt wird, so ergiebt sich, analog wie oben:

$$(2)\qquad \psi(x)=\omega-\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}x^{\nu s}Z(\nu s),$$

wo ω für $x=p^\lambda$ gleich $e^{-1}\log p$, sonst gleich 0 ist.

Unter Benutzung der bekannten Sätze über die Verteilung der Nullstellen der ζ-Function, speciell über die absolute Convergenz gewisser aus ihnen gebildeter Reihen, wird aus (2) der Schluss gezogen, dass

$$(3)\qquad \psi(x)=x+\eta(x)$$

ist, wo der Fehler $\eta(x)$ dem absoluten Betrage nach $<k\sum_{\varrho}\left|\frac{s x^{\varrho}}{\varrho(\varrho-s)}\right|$ ist; hierin bezeichnet k eine Constante, s eine beliebige Zahl $\geqq x^2$, und ϱ durchläuft alle complexen Nullstellen der ζ-Function.

Nunmehr wird die Richtigkeit der Riemann'schen Vermutung angenommen, dass jedes ϱ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ habe. Dann ergiebt die Formel (3), dass

$$(4)\qquad \psi(x)=x+O(x^{\frac{1}{2}+\sigma})$$

ist, wo σ eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet. Da $\psi(x)$ sich von $\vartheta(x)$ nur um $O(\sqrt{x})$ unterscheidet, ist auch

$$(5)\qquad \vartheta(x)=x+O(x^{\frac{1}{2}+\sigma}).$$

Durch Combinirung dieser Resultate mit einer Formel aus de la Vallée-Poussin's in F. d. M. **30**, 193-194, 1899 besprochener Arbeit folgert Verf., dass die Primzahlmenge bis x

$$(6)\qquad F(x)=Li(x)+O(x^{\frac{1}{2}+\sigma})$$

ist, wo $Li(x)$ den Integrallogarithmus von x bezeichnet.

In einem Nachtrag zur zweiten Arbeit wird durch einen neuen Kunstgriff die Annäherung noch weiter getrieben, indem $O(x^{\frac{1}{2}+\sigma})$ in (4) und (5) durch $O(x^{\frac{1}{2}}\log^2 x)$ und in (6) durch $O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$ ersetzt wird, alles unter der unbewiesenen Annahme $R(\varrho)=\frac{1}{2}$.

Dies ist jedoch für $\psi(x)$ (also auch $\vartheta(x)$) genau das Ergebnis, zu dem auf anderem Wege schon Franel in seiner Arbeit, „Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique“ (vergl. F. d. M. **27**, 153, 1896) gelangt war, welche dem Verf. entgangen ist. Die Annäherung für $F(x)$ hat Franel allerdings nur in der Form (6). Aber es muss bemerkt werden, dass, wenn einmal die Formel

$$\vartheta(x)=x+O(x^{\frac{1}{2}}\log^2 x)$$

bewiesen ist, man daraus die andere

$$F(x)=Li(x)+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

ganz elementar herleiten kann, ohne, wie Verf. es thut, zur Theorie der

ζ-Function von neuem seine Zuflucht zu nehmen; man braucht nur die Identität

$$F(x) = \sum_{p \leqq x} 1 = \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{\log p} = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1)}{\log \nu}$$

$$= \sum_{\nu=2}^{x} \frac{1}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x} O(\nu^{\frac{1}{2}} \log^2 \nu) \left(\frac{1}{\log \nu} - \frac{1}{\log(\nu+1)} \right) + \frac{O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x)}{\log(x+1)}$$

anzuwenden. Lnd.

M. Lerch. Sur la fonction $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires de l'argument. Teixeira J. **14**, 65-69.

Der Verf. betrachtet in diesem Artikel die Riemann'sche Function $\zeta(s) = \Sigma 1/m^s$ $(m = 1, 2, \ldots, \infty)$, um zu beweisen, dass man für $s = 4k - 1$ ihre numerische Berechnung auf diejenige einer rasch convergirenden Reihe zurückführen kann vermittelst der Formel:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-1}} = \frac{(2\pi)^{4k-1}}{(4k)!} \left[B_{2k} + (-1)^{k-1} \frac{1}{2} \binom{4k}{2k} B_k^2 + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \binom{4k}{2\nu} B_\nu B_{2k-\nu} \right] - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-1}} \cdot \frac{1}{e^{2m\pi} - 1},$$

wo die B_ν die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten. Tx. (Lp.)

E. Busche. Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie. J. für Math. **122**, 227-262. (Zweiter Teil des Referates.)

Als Anwendung leitet Verf. einige auch auf anderem Wege beweisbare zahlentheoretische Sätze über ganze complexe Zahlen $a + bi$ her, um den Nutzen einer räumlichen Veranschaulichung der imaginären ebenen Gebilde darzuthun. Zunächst beweist er das auf den Körper $P(i)$ bezügliche Analogon zu der Formel, auf welche Gauss seinen dritten Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes gründet; Verf. hatte diese Gleichung auf anderem Wege schon früher (vergl. F. d. M. **29**, 153, 1898) hergeleitet. Dann folgen Relationen für die Teileranzahlen der complexen Zahlen. Der Verf. beweist zum Beispiel: Die Anzahl der Teiler aller ganzen Zahlen $a + bi$, deren absoluter Betrag den von n nicht übersteigt, ist

$$\Sigma \left[\frac{n}{y} \right] = 2 \Sigma' \left[\frac{n}{y} \right] - [\sqrt{n}]^2,$$

wo Σ sich auf die Werte $0 < |y| \leqq |n|$, Σ' auf $0 < |y| \leqq \sqrt{n}$ erstreckt, wo $[\gamma]$ die Anzahl aller complexen ganzen, von 0 verschiedenen Zahlen bezeichnet, deren absoluter Betrag $\leqq |\gamma|$ ist, endlich y die Reihe der complexen ganzen Zahlen im Summationsgebiete durchläuft.

Es sei übrigens bemerkt, dass diese Formel schon von Mertens (J. für Math. **77**, 325; vergl. F. d. M. **6**, 114-115, 1874) aufgestellt ist, und dass auch der entsprechende Satz für reelle Zahlen in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{[n]}\left[\frac{n}{\nu}\right]=2\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{\nu}\right]-[\sqrt{n}]^2$$

schon von Meissel (J. für Math. **48**, 306, 1854) und Mertens (l. c., S. 292) und nicht, wie meist citirt wird, zuerst von Hermite (Acta Math. **2**; vergl. F. d. M. **15**, 136, 1883) gefunden worden ist. Lnd.

H. Teege. Ueber die $\frac{p-1}{2}$ gliedrigen Gaussischen Perioden in der Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zu anderen Teilen der höheren Arithmetik. Diss. Kiel: P. Peters. 38 S. 8°.

Verf. bestimmt zunächst das Vorzeichen der Gauss'schen Summen auf eine neue Art, die mit der Kronecker'schen aus Journ. de math. (2) **1** verwandt ist und namentlich durch Combination mit Kronecker's Beweise relativ schnell zum Ziele führt.

Von den Anwendungen auf die Zahlentheorie und die Lehre von der Kreisteilung sei der Nachweis hervorgehoben, dass analog zu der bekannten, für positive Determinanten geltenden Beziehung auch für negative Determinanten die Klassenzahl der quadratischen Formen mit den durch die Gleichungen

$$2\Pi(x-r^a)=Y(x)-Z(x)\,i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P},$$

$$2\Pi(x-r^b)=Y(x)+Z(x)\,i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P}$$

$$\left(r=e^{\frac{2\pi i}{P}},\ \left(\frac{a}{P}\right)=1,\ \left(\frac{b}{P}\right)=-1\right)$$

definirten Functionen $Y(x)$, $Z(x)$ in Zusammenhang gebracht werden kann. Z. B. ist für $D=-\varDelta\equiv 1$ (mod. 4), falls $\varDelta$ das Product mehrerer verschiedener Primzahlen ist, die Klassenzahl gleich $\left(\frac{2}{\varDelta}\right)Z'(-1)$, dagegen gleich $-Z'(-1)$, falls $\varDelta$ eine Primzahl ist. Lnd.

K. S. Hilbert. Das allgemeine quadratische Reciprocitätsgesetz in ausgewählten Kreiskörpern der zweiten Einheitswurzeln. Diss. Göttingen. 35 S. 4°.

K. Matter. Die den Bernoulli'schen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln. Diss. Zürich: Zürcher & Furrer. 38 S. 8°; Zürich. Naturf. Ges. **45**, 238-269.

Die Bernoulli'schen Zahlen lassen sich bekanntlich durch die Gleichung definiren

$$\Sigma \frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo die Summe sich über alle ganzen Zahlen r mit Ausschluss der Null erstreckt und π als Wert des Integrales $2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ aufgefasst werden kann. Analog hatte Hurwitz (vergl. F. d. M. **28**, 393-394, 1897; **29**, 385, 1898) die durch die Gleichung

$$\Sigma'_{r,s} \frac{1}{(r+si)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} E_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \omega = 2\int\limits_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

definirten rationalen Zahlen E_n untersucht, die mit den Entwickelungscoefficienten der Function $\wp(u|\omega, i\omega)$ durch die Gleichung

$$\wp(u|\omega, i\omega) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} E_n}{4n} \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

zusammenhängen.

Verf. führt die analoge Untersuchung für die Entwickelungscoefficienten derjenigen doppeltperiodischen Function durch, die mit den Zahlen $a + b\varrho \left(\varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ in Beziehung gebracht werden kann. Ihr Periodenparallelogramm ist ein Rhombus vom Winkel 120°, die eine Primitivperiode ist das ϱ-fache der anderen

$$\omega = 2\int\limits_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3-4}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}};$$

die Invarianten sind $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. Setzt man

$$\wp(u|\omega, \varrho\omega) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n} F_n}{6n} \frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!},$$

also

$$\Sigma'_{r,s} \frac{1}{(r+s\varrho)^{6n}} = \frac{(2\omega)^{6n}}{(6n)!} F_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

so lassen sich die Zahlen F_n genau nach dem Vorbilde der Hurwitz'schen Arbeit untersuchen, wobei Verf. natürlich im einzelnen manche Schwierigkeit durch neue Kunstgriffe überwindet.

Dass die Zahlen F_n rational sind, folgt aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die hier $\wp''(u) = 6\wp^2(u)$ lautet und zur Recursionsformel

$$F_n = \frac{1}{(n-1)(36n^2-1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} (6\nu-1)(6n-6\nu-1) \binom{6n}{6\nu} F_\nu F_{n-\nu}$$

führt.

Das Hauptziel der Arbeit ist die sogenannte Partialbruchzerlegung der Zahlen F_n, die Verallgemeinerung des Staudt-Clausen'schen Satzes für Bernoulli'sche Zahlen. Es ergiebt sich:

$$F_n = G_n + \frac{(-1)^n}{4} + \Sigma \frac{(2\mathfrak{A})^{\frac{6n}{p-1}}}{p},$$

wo G_n eine ganze Zahl ist und sich die Summe über diejenigen Primzahlen p der Form $6k+1$ erstreckt, für welche $p-1$ ein Divisor von $6n$ ist. Die zu jeder solchen Primzahl gehörige Zahl $\mathfrak{A}$ ist die durch die Zerlegung $p=\mathfrak{A}^2+3\mathfrak{B}^2$ mit der Vorzeichenbestimmung $\mathfrak{A} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{6}}$ (mod. 3) eindeutig definirte Zahl. Dass die Glieder mit ungeraden Nennern obige Form haben, wird bewiesen; der Nachweis, dass das Glied $\frac{\varepsilon}{2^a}$ wirklich gleich $\frac{(-1)^n}{4}$ ist, wird allerdings hier nicht geliefert, sondern für eine spätere Publication in Aussicht gestellt. Zum Schluss giebt Verf. eine Tabelle der Zahlen F_n bis $n=12$. Lnd.

J. A. Gmeiner. Ueber die Primzahlen und Primideale im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln. Monatsh. für Math. **11**, 1-27.

Nachdem Verf. in zwei vorangegangenen Arbeiten (vergl. F. d. M. **27**, 159-160, 1896; **29**, 169, 1898) die ganzen Zahlen des Körpers $P(\sqrt[5]{1})$ untersucht hatte, geht er nunmehr dazu über, die Primideale des Körpers zu ermitteln. Zuerst wird die Hülfsaufgabe behandelt, modulo eines gegebenen Ideales ein vollständiges Restsystem herzustellen.

Der Verfasser findet: Die rationalen Primzahlen $5n+2$ und $5n+3$ bleiben unzerlegbar, die Primzahlen $5n+1$ bezw. $5n+4$ zerfallen in vier Primideale ersten Grades, bezw. zwei Primideale zweiten Grades. Es giebt also, während von vornherein wegen

$$N(p) = p^4 = cN(\mathfrak{p}) = cp^f$$

auch Primideale dritten Grades denkbar wären, nur solche ersten, zweiten und vierten Grades.

Aus den allerersten Betrachtungen aus der Theorie des Kreiskörpers der n-ten Einheitswurzeln (n Primzahl), auf den Verf. nicht Bezug nimmt, ergiebt sich dies als ganz selbstverständlich; es kommt eben auf den in $n-1$ (hier 4) aufgehenden Exponenten f an, zu dem p mod. n gehört. Lnd.

E. Störmer. Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques. S. M. F. Bull. **28**, 146-157.

Jede irrationale positive Zahl α lässt sich bekanntlich auf eine Weise in einen unendlichen Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}} \tag{1}$$

entwickeln, wo die a_π positive ganze Zahlen sind und a_0 auch Null sein kann. P_n/Q_n sei der n-te Näherungsbruch. Dann genügt nach Liouville (Journ. de Math. (1) **16**, 1851), wenn α eine algebraische Zahl r-ten Grades ist, a_n der Ungleichheitsbedingung

$$a_n < MQ_n^{r-2},$$

wo M eine von n unabhängige Zahl ist. Mit Hülfe dieses Satzes hatte Liouville den ersten Nachweis der Existenz transcendenter Zahlen geliefert.

Verf. stellt sich die Aufgabe, eine analoge notwendige Bedingung für die irrationalen Zahlen der Form

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B}$$

aufzustellen, wo A, B algebraische positive Zahlen > 1 sind (die Briggs'schen Logarithmen der algebraischen Zahlen gehören z. B. zu dieser Kategorie), und er gelangt zu dem Satze: Für die so definirten Zahlen α genügt in der Kettenbruchentwickelung (1) a_n der Ungleichheitsbedingung

$$a_n < K\frac{M^{Q_n}}{Q_n}, \tag{2}$$

wo K und M zwei nur von A und B abhängige und für alle n gleichbleibende Constanten sind.

Die Abhängigkeit der Constanten K, M von A und B wird in dem Specialfall, dass A und B ganze rationale Zahlen > 1 sind, näher untersucht; hier ergiebt sich

$$a_n < B^2 \log B \frac{A^{Q_n}}{Q_n}.$$

Construirt man eine Zahlenfolge a_n, welche nicht der Bedingung (2) genügt, z. B. $a_n = n^{Q_n}$ (Q_n ist ja nur von $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ abhängig; aus a_n ergiebt sich Q_{n+1}, daraus a_{n+1} u. s. w.), so ist der Wert des Kettenbruches (1) sicher nicht von der Form $\frac{\log A}{\log B}$, wo A, B positive algebraische Zahlen > 1 sind. Lnd.

D. Hilbert. Theorie der algebraischen Zahlkörper. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 675-714.

Inhaltsübersicht: 1. Algebraischer Zahlkörper. 2. Ganze algebraische

Zahl. 3. Ideale des Körpers und ihre Teilbarkeit. 4. Congruenzen nach Idealen. 5. Discriminante des Körpers. 6. Relativkörper. 7. Einheiten des Körpers. 8. Idealklassen des Körpers. 9. Transcendente Bestimmung der Klassenzahl. 10. Kronecker's Theorie der algebraischen Formen. 11. Zerlegbare Formen des Körpers. 12. Integritätsbereiche des Körpers. 13. Moduln des Körpers. 14. Galois'scher und Abelscher Körper. 15. Zerlegungskörper, Trägheitskörper und Verzweigungskörper eines Primideals im Galois'schen Körper. 16. Zusammensetzung mehrerer Körper. 17. Relativcyklischer Körper von relativem Primzahlgrade. 18. Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers. 19. Relativquadratischer Zahlkörper. 20. Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste in einem beliebigen Zahlkörper. Wbg.

A. Wiman. Zur Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper. Acta Univ. Lundensis **36**, 17 S.

Als Rationalitätsbereich wird hier ein beliebiger algebraischer Körper R vorausgesetzt. Es wird bewiesen, dass jeder Körper, welcher sich aus solchen zusammensetzen lässt, die in Bezug auf R abelsche sind, auch selbst in Bezug auf R abelsch sein muss. Ferner werden als Verallgemeinerungen gewisser Sätze von Hilbert Eigenschaften der Discriminante eines in Bezug auf R cyklischen Körpers C_h vom Primzahlpotenzgrade l^h entwickelt. So wird bewiesen, dass die Norm $n(P)$ eines jeden Primideals P des Körpers R, welches in l nicht aufgeht, aber Teiler der Relativdiscriminante des Unterkörpers C_{h_1} von C_h in Bezug auf R ist, die Eigenschaft besitzt, dass $n(P) = p^f \equiv 1$ (mod. l^{h-h_1+1}). Zuletzt wird noch unter der Voraussetzung, dass P in l nicht aufgeht, bewiesen, dass es immer einen in Bezug auf R cyklischen Körper C_h giebt, und dass jeder andere in Bezug auf R abelsche Körper, dessen Grad eine Potenz von l ist, sich als Unterkörper eines aus C_h und einem Körper, dessen Relativdiscriminante P nicht enthält, zusammengesetzten Körpers darstellen lässt. Bdn.

H. Minkowski. Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern. Gött. Nachr. 1900, 90-93.

Verf. beweist zunächst folgenden Determinantensatz: Wenn in einer m-reihigen Determinante alle Glieder ausserhalb der Hauptdiagonale negativ, die m Summen der Glieder je einer der Horizontalreihen aber positiv sind, so ist die Determinante positiv. Dieser Satz wird zu zwei interessanten Folgerungen benutzt. Erstens kann man in jedem algebraischen Körper, für welchen die Summe der Anzahl der conjugirten reellen Körper und der Anzahl der conjugirten complexen Körperpaare gleich $m+1$ ist, unmittelbar ein vollständiges System von m unabhängigen Einheiten aufstellen, während die Dirichlet'sche Methode ein successives

Verfahren einschlägt, durch welches nach Herstellung einer gewissen Anzahl unabhängiger Einheiten eine neue unabhängige hinzugefügt wird. Zweitens kann man in jedem Galois'schen Körper stets eine Einheit ε so bestimmen, dass unter den conjugirten Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m+1}$ irgend m ein vollständiges System unabhängiger Einheiten bilden. Hiernach gilt der Satz: In einem Galois'schen Körper kann man stets eine solche Einheit angeben, dass eine jede Einheit dieses Körpers ein Product aus einer Einheitswurzel und aus Potenzen dieser Einheit und ihrer conjugirten Einheiten mit rationalen Exponenten ist. Lsg.

F. Hausdorff. Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen. Leipz. Ber. **52**, 43-61.

In einem complexen Zahlensysteme mit n Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$, in welchem die Division im allgemeinen ausführbar ist, die Multiplication aber nicht commutativ zu sein braucht, können, wenn x eine beliebige Zahl des Systems ist, zwischen den n^2 Producten

$$e_i x e_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

lineare homogene Relationen mit Coefficienten bestehen, welche von x unabhängig sind. Wenn p unter jenen Producten linear unabhängig sind, so wird p der Index des Systemes genannt und gezeigt, dass p zwischen n und n^2 mit Einschluss der Grenzen gelegen ist. Die untere Grenze gilt für Systeme mit commutativer Multiplication und nur für diese, die obere Grenze dann und nur dann, wenn $n = m^2$ ist und das System von der Gesamtheit aller Bilinearformen mit m Variabelnpaaren gebildet wird.

Eine lineare homogene Function, d. i. eine Summe der Form

$$y = \sum_{i,k} a_{ik} e_i x e_k,$$

kann auf eine und nur eine Weise in die Gestalt

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$$

gesetzt werden, wo $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ein System linear unabhängiger Functionen bedeutet. Wendet man auf eine Grösse x erst die Substitution x_r, dann hierauf die Substitution x_s an, so sei die aus beiden zusammengesetzte Substitution

$$x_{rs} = \sum_t \delta_{rst} x_t;$$

dann giebt das Coefficientensystem δ_{rst} durch die Gleichung

$$f_r f_s = \sum_t \delta_{rst} f_t$$

zu einem neuen complexen Zahlensysteme mit im allgemeinen ausführbarer Division Veranlassung, welches von dem Verf. das Indexsystem des ersten genannt wird und dessen Eigenschaften untersucht werden. Lsg.

E. Wendt. Ueber die Zerlegbarkeit der Function $x^n - a$ in einem beliebigen Körper. Math. Ann. 58, 450-456.

Anknüpfend an einen Satz von Vahlen über die Zerlegbarkeit von $x^n - a$ im natürlichen Rationalitätsbereiche (Acta Math. 19; F. d. M. 26, 121, 1897), untersucht der Verf. die Zerlegbarkeit dieser Function in beliebigen Körpern und gelangt zu folgenden Sätzen:

1. Die Function $x^m - a$ ist dann und nur dann in einem Körper K reducibel, wenn sich a als Product der n-ten Potenz einer in K rationalen Zahl und der n-ten Potenz einer rationalen Function von ε mit ganzzahligen Coefficienten darstellen lässt, wobei n ein Teiler von m ist und ε eine primitive n-te Einheitswurzel bedeutet.

2. Die Function $x^n - a$ ist in einem Körper K, dem keine wirkliche ganze rationale Function von ε mit ganzzahligen Coefficienten angehört, nur in folgenden beiden Fällen reducibel:

a) wenn a die r-te Potenz einer in K enthaltenen Zahl ist, wo r in n aufgeht;

b) wenn n und a die Form haben $n = 4\delta, a = 4y^4$, wo δ eine ganze Zahl und y rational in K ist; und zwar sind dann die beiden Factoren der Function

$$x^{4\delta} - 4y^4 = (x^{2\delta} - 2yx^\delta + 2y^2)(x^{2\delta} + 2yx^\delta + 2y^2)$$

in K irreducibel.

3. In einem Körper K, zu welchem eine rationale Function von ε mit ganzzahligen Coefficienten gehört, in dem also ε einer Gleichung von niedrigerem als dem $[\varphi(n)]$-ten Grade genügt, ist die Function $x^n - a$ nur in folgenden beiden Fällen reducibel:

a) wenn a die s-te Potenz einer in K rationalen Zahl ist, wo s ein Teiler von n ist;

b) wenn $n = 2^\nu$ und $a = -D^{\frac{n}{2}}$, wo D dem Bereiche K angehört.

Die gefundenen Resultate sind auf anderem Wege kurz vorher von Capelli (F. d. M. 28, 90, 1897; 29, 71, 1898 und Math. Ann. 54, 602) abgeleitet worden. Lsg.

F. X. Grissemann. Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmsstellung der Quaternionen unter den complexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten. Monatsh. f. Math. 11, 132-147.

Wenn in einem complexen Zahlensystem mit mehr als zwei Einheiten, welches dem distributiven und associativen Gesetze genügt und eine im allgemeinen eindeutig bestimmte Division zulässt, ein Product dann und nur dann verschwindet, wenn einer der Factoren verschwindet, so ist es das Hamilton'sche Quaternionensystem. Dieser Satz von Frobenius (J. für Math. 84) wird hier von neuem auf elementarem Wege ohne Zuhülfenahme der Theorie der Bilinearformen erwiesen. Lsg.

R. Dedekind. Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. **53**, 371-403.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ den grössten gemeinsamen Teiler, mit $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so gelten für diese Operationen die drei Gesetze:

$$(1)\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a},$$

$$(2)\quad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}),$$

$$(3)\quad \mathfrak{a}+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{a}.$$

Wenn zwei Operationen $\pm$ aus je zwei Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines endlichen oder unendlichen Systems $\mathfrak{G}$ zwei Elemente $\mathfrak{a}\pm\mathfrak{b}$ desselben Systems erzeugen und den Gesetzen (1), (2) und (3) genügen, so wird $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die beiden Operationen eine Dualgruppe genannt.

In jeder Dualgruppe gilt ausser einigen Elementarsätzen auch das Gesetz:

(A) Ist $\mathfrak{D}$ ein Teiler von $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Element, so ist

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}<(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m}.$$

Wendet man aber die Operationen $\pm$ in der vorher angegebenen Weise auf Moduln an, so gilt das viel schärfere Gesetz:

(B) Ist der Modul $\mathfrak{d}$ ein Teiler des Moduls $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Modul, so ist

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}=(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m},$$

welches in keiner Weise aus (1), (2) und (3) ableitbar ist.

Es wird nun zunächst die aus drei Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch die Operationen $\pm$ erzeugte Dualgruppe $\mathfrak{D}$ eingehend untersucht; dieselbe ist endlich und besteht aus 28 Moduln, welche im allgemeinen von einander verschieden sind. Sind die Moduln Ideale, so reducirt sich die aus ihnen erzeugte Dualgruppe auf höchstens 18 verschiedene Elemente.

Es werden sodann die Beziehungen der beiden Gesetze (A) und (B) zu einander tiefer ergründet. In einer Dualgruppe $\mathfrak{G}$ heisst $\mathfrak{d}$ ein nächster Teiler von $\mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$ ist und sich zwischen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{m}$ kein Element einschieben lässt, welches ein Vielfaches von $\mathfrak{d}$ und ein Teiler von $\mathfrak{m}$ ist. Eine Aufeinanderfolge von Elementen von $\mathfrak{G}$, von der Art, dass jedes folgende ein nächster Teiler des vorhergehenden ist, heisst eine Kette; Ketten mit gleichem Anfangs- und Endelement heissen aequivalent. In der Modulgruppe $\mathfrak{D}$ gilt das „Kettengesetz", dass aequivalente Ketten gleiche Länge haben. Es wird erwiesen, dass die Geltung dieses Kettengesetzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Gesetz (A) in das Modulgesetz (B) übergeht. Lsg.

H. Hancock. On the reduction of Kronecker's modular systems, whose elements are functions of two and three variables. J. für Math. **122**, 265-298.

Der Verf. hatte in einer früheren Arbeit (J. für Math. **119**; F. d. M. **29**, 69, 1898) für die Modulsysteme, deren Elemente ganze ganzzahlige Functionen einer Veränderlichen sind, kanonische Formen abgeleitet, vermöge deren die Teilbarkeit einer Function durch das Modulsystem durch eine Folge von Divisionen entschieden werden kann. In der vorliegenden überträgt er die damals angewendeten Methoden auf solche Modulsysteme deren Elemente ganze ganzzahlige Functionen von zwei und mehr Variabeln sind. Leider erhebt sich die Arbeit nicht zur Feststellung allgemeiner Sätze, was wohl möglich gewesen wäre; sondern es wird eine Folge von Einzelresultaten gewonnen. Ist z. B. das gegebene Modulsystem durch ein und nur ein Primmodulsystem der Form $(p, g(x))$ teilbar, so wird eine Normalform der folgenden Art abgeleitet:

$$[p, g(x)^2, g(x)^2 f(x,y), g(x) h(x,y), k(x,y)].$$

Auch ist die Reduction auf die „kanonische“ Form, die das Haupinteresse darbietet, nicht durchgeführt. Lsg.

B. Theorie der Formen.

K. Th. Vahlen. Arithmetische Theorie der Formen. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 582-635.

Inhaltsübersicht: a) Lineare Formen. b) Allgemeines über bilineare und quadratische Formen. c) Binäre quadratische Formen und bilineare Formen von vier Variabeln. d) Ternäre quadratische Formen. e) Quadratische Formen von n Variabeln. f) Formen, die in Linearfactoren zerfallen; Normen. g) Sonstige Formen. Wbg.

H. Weber. Complexe Multiplication. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 716-732.

Inhaltsübersicht: 1. Historische Einleitung. 2. Complexe Multiplication und quadratische Formen. 3. Die Invarianten. 4. Klasseninvarianten und Klassenkörper. 5. Klasseninvarianten in verschiedenen Ordnungen. 6. Irreducibilität der Klassengleichung. 7. Galois'sche Gruppe der Klassengleichung. 8. Primideale im Klassenkörper. 9. Zerfällung der Klassengleichung. 10. Die Klasseninvarianten $f(w)$, $f_1(w)$. 11. Complexe Multiplication und Teilung. 12. Die Klassenzahlrelationen.

Wbg.

K. Petr. Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die Theorie der quadratischen Formen mit negativer Discriminante. Rozpravy **9**, No. 38, 17 S. (Böhmisch).

Ausgehend von den Relationen zwischen der Anzahl der Klassen der quadratischen Formen mit negativer Determinante, wie dieselben von Kronecker und Hermite gegeben worden sind, gelangt der Verf. zu

den sämtlichen Relationen von Kronecker sowie zu den von Gauss stammenden Lehrsätzen von der Zerlegung einer Zahl in drei Quadrate und findet sodann neue Relationen über die Anzahl der Klassen der quadratischen Formen von negativer Determinante. Sda.

G. Frattini. Di un gruppo notevole di sostituzioni lineari nella teorica delle forme quadratiche. Periodico di Mat. (2) **2**, 190-196.

In der quadratischen Form $x^2 - Dy^2$ sei D ganz, positiv und keine Quadratzahl. Die Coordinatenebene sei in Quadrate von der Seite 1 geteilt. Setzt man $x^2 - Dy^2 = N$ und trägt die Zahl N in die Ecke oder den „Knoten" eines Quadrates ein, dessen Coordinaten x, y sind, so erscheint die Zahl N unendlich oft in der Zeichenebene. Minimalknoten wird derjenige genannt, dessen Coordinaten die kleinsten Werte haben. Hiernach gilt der Satz: Wenn $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n)$ Coordinaten von Knoten sind, die zu Primzahlen gehören, so transformiren die linearen Substitutionen der Gruppe:

$$X_0 + Y_0 \sqrt{D} = (p_1 - q_1 \sqrt{D}) \cdots (p_n - q_n \sqrt{D})(x_0 + y_0 \sqrt{D})$$

das System der in dem ganzen und positiven Felde der Form $x^2 - Dy^2$ enthaltenen Minimalknoten in sich selbst. Hierbei bezeichnen (x_0, y_0) die Coordinaten des zu transformirenden Punktes, (X_0, Y_0) die des Transformationspunktes; auf der rechten Seite hat man das Product zu entwickeln und dann die von $\sqrt{D}$ freien Glieder, sowie die mit $\sqrt{D}$ behafteten Glieder einzeln einander gleich zu setzen. In einem Nachtrage wird der entsprechende Satz für die Form $x^2 + Dy^2$ ausgesprochen.

Lp.

H. Minkowski. Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen. Math. Ann. **54**, 91-124.

„Unter den verschiedenen möglichen Kettenbruchentwickelungen für eine reelle Grösse a, wobei die Teilzähler ± 1 und die Teilnenner positive ganze Zahlen sind, giebt es eine bestimmte Art der Entwickelung (und zwar die am besten convergirende), für welche die sämtlichen Näherungsbrüche x/y sich von vorn herein in einfachster Weise charakterisiren lassen: Als Zähler und Nenner der einzelnen Näherungsbrüche erscheinen dabei genau die sämtlichen Paare von ganzen Zahlen x, y, für die $y > 0$ ist, x und y relativ prim sind und dazu die Bedingung

$$|(x - ay)y| < \tfrac{1}{2}$$

erfüllt ist" (abgesehen vom Falle $a =$ ganze Zahl $+ \frac{1}{2}$). Verf. hatte auf diese Kettenbruchentwickelung schon früher hingewiesen (vergl. F. d. M. **27**, 170, 1896); hier weist er nach, dass die obige Ungleichung für dieselbe charakteristisch ist.

Der Nachweis ergiebt sich als Specialfall einer auf geometrische Betrachtungen gegründeten Theorie des Systems zweier linearen Formen $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ mit beliebigen reellen Coefficienten und ganzzahligen Unbestimmten. Von dem ersten Satze ausgehend: „Für $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ giebt es stets ganze Zahlen x, y, die nicht beide Null sind, und für welche $|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}$ ist", gelangt Verf. schliesslich (unter der Annahme, dass die quadratische Form $\xi\eta$ nicht durch eine ganzzahlige Substitution $x = pX + p'Y$, $y = qX + q'Y$ mit der Determinante ± 1 in XY oder $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ transformirt werden kann), dazu, alle Paare ganzer teilerfremder Zahlen x, y, für welche $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ und ausserdem $\eta > 0$ bezw. $\eta = 0$, $\xi > 0$ ist, in eine Reihe nach wachsenden η und zugleich nach abnehmenden $|\xi|$ zu ordnen, welche so beschaffen ist: Für je zwei auf einander folgende Systeme $x = p$, $y = q$ und $x = p'$, $y = q'$ ist $pq' - qp' = \pm 1$. Je nachdem $\frac{\delta}{-\gamma}$, bezw. $\frac{-\beta}{\alpha}$ rational oder irrational ist, weist die Reihe ein bestimmtes erstes, bezw. letztes System auf oder nicht. Ist die Reihe ohne letztes System, so convergirt $|\xi|$ nach Null, und η wächst über jede Grenze; ist sie ohne erstes System, so wächst bei umgekehrter Folge der Systeme $|\xi|$ über jede Grenze und η convergirt nach Null.

Die Reihe der hier auftretenden Gitterpunkte x, y, nach wachsenden η geordnet, heisse eine Kette zu den Formen ξ, η, ein einzelner Gitterpunkt ein Kettenglied. Der Algorithmus zur Berechnung eines Kettengliedes aus dem vorhergehenden führt zu einem einfachen Zusammenhang zwischen drei auf einander folgenden Kettengliedern.

Von den allgemeinen Untersuchungen macht Verf. nun die Anwendung auf das System der Formen $\xi = x - ay$, $\eta = y$. So ergiebt sich der am Anfang ausgesprochene Satz. Nebenbei erhält man das wichtige Resultat: Nach Annahme dreier reellen Grössen a, b, c kann man stets ganze Zahlen x, y finden, so dass

$$|(x - ay - b)(y - c)| < \tfrac{1}{4}$$

ist. Für $c = 0$ ist dies eine Verschärfung des entsprechenden Hermite'schen Satzes, bei dem statt $\frac{1}{4}$ die grössere Zahl $\sqrt{\frac{2}{27}}$ steht (vorher war Tschebyschef bis $\frac{1}{2}$ und noch früher Dirichlet bis 1 gekommen).

Verf. nennt den hier definirten Kettenbruch für die Grösse a aus einem der geometrischen Interpretation entstammenden Grunde den Diagonalkettenbruch und beweist zum Schluss, dass für Wurzeln von quadratischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten und nur für solche der Diagonalkettenbruch periodisch ist. Lnd.

J. Beinhorn. Zur Theorie der quadratischen Formen. Diss. Marburg. 42 S. 8°.

V. Jamet. Sur la théorie des formes quadratiques. Marseille Ann. **10**, 127-144.

Bericht auf S. 116 dieses Bandes.

L. W. Reid. Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper. Diss. Göttingen. 75 S. 8° (1899).

G. Pick. Geometrisches zur Zahlenlehre. Sitzungsber. Lotos Prag (2) **19**, 311-319.

Kapitel 3.

Kettenbrüche.

W. Lewicky. Zur Theorie der Kettenbrüche. Wiad. Mat. **4**, 52-59. (Polnisch.)

Summirung der Kettenbrüche

$$Uz = -\frac{1|}{|a_n} - \frac{1|}{|a_{n-1}} - \cdots - \frac{1|}{|a_2} - \frac{1|}{|a_1 + z};$$

$$U_1 z = a_n - \frac{1|}{|a_{n-1}} - \frac{1|}{|a_{n-2}} - \cdots - \frac{1|}{|a_2} - \frac{1|}{|a_1 + z}.$$

Dn.

Wl. Lewicky. Beitrag zur Theorie der Kettenbrüche und der Modulgruppe. Lemberg math. naturw. Sect. **4**, No. 1, 8 S.

P. Cattaneo. Sullo sviluppo in frazione continua della radice quadrata dei numeri razionali. Periodico di Mat. (2) **2**, 217-218.

Es sei m/n eine positive, rationale, nicht quadratische Zahl, grösser als 1, r die grösste in der Quadratwurzel aus m/n enthaltene ganze Zahl, so ist

$$x = \sqrt{m/n} - r = \frac{(\sqrt{m/n} - r)(\sqrt{m/n} + r)}{\sqrt{m/n} + r} = \frac{m/n - r^2}{2r + x}$$

$$= \frac{m - nr^2}{2nr + nx} = \frac{m - nr^2}{2nr + \frac{m - nr^2}{2r + x}};$$

$$\sqrt{\frac{m}{n}} - r = \left(\frac{m-nr^2}{2nr}, \frac{m-nr^2}{2r}; \frac{m-nr^2}{2nr}, \ldots\right).$$

Lp.

A. Pringsheim. Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche. Münch. Ber. 1900, 463-488.

Die Methode von Landsberg (F. d. M. **24**, 191, 1892) zur Herleitung der Convergenz-Kriterien für periodische Kettenbrüche mit reellen und rationalen Elementen dehnt Verf. auf den Fall beliebiger complexer Glieder aus; indem er gleichzeitig die Bezeichnungsweise zweckmässig ändert, gelangt er zu einer einfachen und übersichtlichen Formulirung der zuerst von Stolz (Allgemeine Arithmetik, II, 299) angegebenen Bedingungen; zugleich gelingt auch in diesem allgemeinsten Falle der Beweis für die Darstellung der zweiten Wurzel der quadratischen Gleichung durch den conjugirten Kettenbruch, welcher durch geeignete Inversion der Periode entsteht. R. M.

H. Padé. Sur la distribution des réduites anormales d'une fonction. C. R. **130**, 102-104.

Bei der vom Verf. geübten Zuordnung der Näherungsbrüche einer Function zu den ganzzahligen Punkten der Ebene (F. d. M. **30**, 206, 1899; **22**, 395, 1890) kann es ausnahmsweise vorkommen, dass ein Bruch mehreren Punkten entspricht; es zeigt sich, dass dies alsdann alle Punkte eines gewissen Quadrates sind. R. M.

H. Padé. Sur l'extension des propriétés des réduites d'une fonction aux fonctions d'interpolation de Cauchy. C. R. **130**, 697-700.

Die bekannte, von Cauchy herrührende interpolatorische Darstellung einer gebrochenen Function, die für $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vorgeschriebene Werte $u_0, u_1, u_2, \ldots$ annimmt, liefert, wenn man die Anzahl der vorgeschriebenen Werte allmählich steigert, eine doppelt zu ordnende Schar von Brüchen $U_{\mu\nu}: V_{\mu\nu}$ (wobei $\mu+\nu+1$ gleich der erreichten Anzahl ist), welche den vom Verf. früher betrachteten Näherungsbrüchen einer Function (F. d. M. **30**, 206, 1899) ganz analog sind, welche ganz analoge Relationen befolgen und ebenso aus Kettenbrüchen gewonnen werden können.

R. M.

L. Saalschütz. Zur Convergenz und Summation von Kettenbrüchen. Königsb. Phys.-ökon. Ges. **40**, 8-13 (1899).

Vierter Abschnitt.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

W. H. METZLER. **On the excess of the number of combinations in a set which have an even number of inversions over those which have an odd number.** American J. **22,** 55-59.

Zur Bestimmung der in der Ueberschrift angedeuteten Zahl führt die Betrachtung einer zahlentheoretischen Function $\varphi(i, k)$, die den Bedingungen

$$\varphi(2m+1,\ 2l+1) = \varphi(2m+1,\ l) = \varphi(2m,\ 2l) = \binom{m}{l},$$

$$\varphi(2m,\ 2l+1) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1)$$

genügt. Ot.

H. BILENKI. **Note sur les permutants.** Nouv. Ann. (3) **19,** 213-216.

Ein rechtwinkliges System $|a_\alpha^\beta|$ von q Zeilen und p Spalten werde nach folgenden Regeln entwickelt: 1. Jedes Glied $a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots a_{\alpha_{p+q-1}}^{\beta_{p+q-1}}$ der Entwickelung enthält $p+q-1$ Elemente des Systems, jedes jedoch nur einmal; 2. die Summe $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{p+q-1}$ der oberen Indices kann die $p+q-1$ Werte $q-1+\frac{p(p+1)}{2}+k$, 3. die Summe $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p+q-1}$ der unteren Indices die entsprechenden $p+q-1$ Werte $p-1+\frac{q(q+1)}{2}+k$ annehmen, wobei $k=0,1,\ldots,$ $p+q-2$ ist. Diese Entwickelung wird als Permutante bezeichnet. Die Betrachtung besonderer Permutanten führt zu Formeln der combinatorischen Analysis. Ot.

D. André. De l'organisation des assauts complets. Soc. Philom. Bull. (9) **2**, 45-73.

Sollen die Spiele eines vollständigen Turniers (vergl. F. d. M. **30**, 209, 1899) eine lineare Reihe bilden, so müssen sie so angeordnet werden, dass ein und derselbe Spieler nicht an zwei auf einander folgenden Spielen teilnimmt. Soll ferner bei einer grossen Anzahl von Spielen eine Einteilung in Spielgruppen stattfinden, von denen jede innerhalb einer bestimmten Zeit erledigt wird, so muss die Teilung so vollzogen werden, dass die einzelnen Gruppen gleich viele Spiele enthalten, dass jeder Spieler nur an einem Spiel der Gruppe teilnimmt, und dass möglichst alle Spieler bei einem Spiel der Gruppe beteiligt sind. In der Sprache der Combinatorik lauten die beiden Aufgaben folgendermassen: 1. Die einfachen Combinationen von n Elementen zur zweiten Klasse derart in eine lineare Reihe zu ordnen, dass zwei auf einander folgende Combinationen kein gemeinsames Element haben; 2. dieselben Combinationen in Gruppen von gleich vielen Combinationen zu ordnen, in denen jedes Element nur einmal auftritt, und die womöglich sämtliche Elemente enthalten. Die sehr breit geschriebene Abhandlung giebt mehrere praktische Verfahren zur Lösung an und weist zum Schluss auf die Verallgemeinerung der combinatorischen Probleme hin. Ot.

D. André. Supplément à la comptabilité des assauts complets. Soc. Philom. Bull. (9) **3**, 77-83.

Bei Feststellung der Ergebnisse eines Fechtturniers kann man die Kämpfer entweder nach der grösseren Zahl der gegebenen Hiebe oder nach der kleineren Zahl der empfangenen Hiebe anordnen. Die beiden so erhaltenen Anordnungen sind im allgemeinen nicht identisch. Verf. giebt daher ein befriedigenderes Verfahren an. Ot.

F. Fitting. Ueber eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe. Zeitschr. f. Math. **45**, 137-160.

Auf einem n-feldigen Schachbrette giebt es $n!$ verschiedene Wege von Feld zu Feld, auf welchen in ganz willkürlicher Reihenfolge jedes Feld, aber jedes nur einmal berührt wird. Man kann nun das Fortschreiten von bestimmten Feldern zu gewissen anderen als unerlaubt ausschliessen und fragen, wie viele solcher Wege dann noch übrig bleiben. Eine erschöpfende Beantwortung dieser Frage bereitet auch eine Entscheidung über die Anzahl der Rösselsprünge, der Königszüge auf beliebig gestalteten Schachbrettern und überhaupt die Lösung aller ähnlichen Aufgaben vor.

Da es auf die gegenseitige Lage der n Felder nicht ankommt, so empfiehlt es sich, ihnen n willkürlich liegende Punkte beliebig zuzuordnen und durch Linien anzudeuten, zu welchen Feldern ein unmittelbares Fortschreiten von einem beliebigen Punkte aus gestattet ist. Das Fehlen

einer Linie zwischen zwei Punkten p und q deute an, dass ein Sprung von dem Punkte p nach dem Punkte q oder umgekehrt erlaubt ist. Derartige Bewegungsfreiheiten, durch das Zeichen (pq) angedeutet, werden als Wegelemente bezeichnet, weil sie Teile der zu zählenden Wege sein können; die Wegelemente (pq) und (qp) werden durch die Benennung Elementenpaar zusammengefasst. Die gestellte Aufgabe kann dann folgendermassen formulirt werden: Zeichnet man n Punkte und scheidet von den $\frac{1}{2}n(n-1)$ zwischen ihnen vorhandenen Wegelementen eine gewisse Anzahl dadurch aus, dass man eine Reihe von Punkten zu je zweien geradlinig verbindet, auf wievielfache Weise lässt sich unter alleiniger Benutzung der restirenden Wegelemente von Punkt zu Punkt fortschreiten, so dass jeder Punkt, aber jeder nur einmal berührt wird?

Tilgt man zwischen den n Punkten a Elementenpaare in beliebiger Anordnung durch Zeichnen von Geraden, hierauf zwischen denselben Punkten statt jener a andere Elementenpaare, so ist im allgemeinen die Anzahl der Wege in beiden Fällen verschieden. Demnach hängt diese zwar von a und n ab, ist aber nicht eine Function jener beiden Grössen allein. Es lassen sich jedoch, wie der Verf. zeigt, recht brauchbare, ganz allgemeine Recursionsformeln gewinnen, wenn man davon ausgeht, die Abhängigkeit von a und n allein ins Auge zu fassen und mit $W_{(n,a)}$ die Anzahl aller zwischen n Punkten möglichen Wege zu bezeichnen, wenn zwischen ihnen a Elementenpaare wegfallen. Ot.

P. A. MacMahon. Combinatorial analysis. Lond. Phil. Trans. **194** (A), 361-386. — Abstract. Lond. Roy. Soc. Proc. **66**, 336-337.

Die Arbeit betrifft die Verteilung von Zahlen in Quadratfeldern, insbesondere die Frage, wie viel Verteilungen nach einem bestimmten Gesetz möglich sind. Es wird zu diesem Zweck ein Algorithmus derart geschaffen, dass eine bestimmte Operation iterirt auf eine bestimmte Function angewandt und das so analytisch erhaltene Resultat für den einzelnen Fall concret interpretirt wird. So wird (im einfachsten Fall) aus der Thatsache, dass der n-te Differentialquotient (Operation) aus x^n (Function) $= n!$ ist, der Satz abgeleitet: Es giebt $n!$ Möglichkeiten, n Zahlen in die n^2 Felder eines Quadrates von der Seitenlänge n so einzuordnen, dass jede Vertical- und jede Horizontalreihe eine und nur eine Zahl enthält. Aehnliche einfache Combinationen von Operationen und Functionen werden synthetisch untersucht und für ähnliche Probleme zweckentsprechend interpretirt. Br.

G. Tarry. Les permutations carrées de base 6. Liége Mém. (3) **2**, 10 S.; auch Mathesis (2) **10**, Supplém.

Beweis des Satzes, dass die Aufgabe der 36 Offiziere keine Lösung zulässt. Mn. (Lp.)

G. Tarry. **Carrés magiques supérieurs.** Nouv. Ann. (3) **19**, 176-177.

Wenn n eine ungerade zusammengesetzte Zahl ist, so könne man die ersten n^2 ganzen Zahlen derart in ein magisches Quadrat ordnen, dass sowohl die Summe der Zahlen aller Zeilen, als auch aller Colonnen constant ist, dass dasselbe für die Summe der Quadrate gilt, und dass endlich das ganze Quadrat in n gleich grosse Rechtecke zerfällt, in deren jedem dieselben Constanten des ersten und zweiten Grades wiederkehren; statt eines Beweises teilt Verf. das Beispiel $n = 15$ mit. R. M.

W. Ahrens. **Mathematische Unterhaltungen und Spiele.** Leipzig: B. G. Teubner. XII + 428 S. 8⁰.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, der deutschen Litteratur ein ähnliches Werk zu geben, wie es die französische in Lucas' „Récréations mathématiques“ und die englische in Ball's „Mathematical Recreations“ längst besitzen. Im Gegensatz zu ähnlichen Productionen der neueren Zeit, die unter vorwiegender Rücksichtnahme auf den nicht mathematisch gebildeten Leser geschrieben sind, behandeln die „Mathematischen Unterhaltungen und Spiele“ nur solche Gegenstände, welche ein wissenschaftliches Interesse erwecken, und deren eingehendes Verständnis, wenn auch nur geringe positive mathematische Kenntnisse, so doch eine gewisse Uebung im mathematischen Denken erfordert. Man wird dem Verf. gern zugeben, dass er sich nicht darauf beschränkt hat, alte Theorien zu reproduciren oder in neue Formen umzugiessen, sondern dass er auch eigene Untersuchungen angestellt und namentlich bezüglich der litterarischen Studien keine Mühe gescheut hat. Das fliessend geschriebene, durch anschauliche Figuren erläuterte und gut ausgestattete Buch wird sich unzweifelhaft viele Freunde erwerben.

Inhaltsangabe: Erschwerte Ueberfahrten. Ein Problem Tait's. Numerationssysteme. Umfüllungsaufgaben. Parkettirungen. Einige kleinere Unterhaltungen. Brettspiele. Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär)spiel. Das Achtköniginnenproblem. Die fünf Königinnen auf dem Schachbrett. Der Rösselsprung. Magische Quadrate. Euler'sche Quadrate. Anordnungsprobleme. Das Josephsspiel. Einiges aus der Analysis situs. Brücken und Labyrinthe. Das Hamilton'sche Dodekaederspiel. Das Farbenkartenproblem. Das Boss-Puzzle oder Fünfzehnerspiel. Das Dominospiel. Zeit und Kalender. Geometrische Constructionen durch Falten von Papier. Ot.

T. Brodén. **Wahrscheinlichkeitsbestimmungen bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung reeller Zahlen.** Lunds Astronomiska Observatorium Nr. 11, 239-266.

A. Wiman. **Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwickelungen.** Stockh. Öfv. **57**, 829-841.

Im Jahre 1888 wurde Gyldén bei seinen störungstheoretischen

Untersuchungen auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit von Convergenz oder Divergenz gewisser Reihen geführt, unter denen die grösste Möglichkeit für Divergenz die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^2\, r_n^2\, \varepsilon^{r_n}$$

darbot. Hier bedeutete ε eine positive Grösse < 1, und die Zahlen a_{n+1} und r_n gehörten in der Weise zu der Kettenbruchentwickelung einer zwischen 0 und 1 liegenden reellen Zahl μ, dass

$$\mu = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

und $\frac{r_n}{s_n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Convergenten des Kettenbruches waren. Die Untersuchung der Convergenz gipfelte in der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine der (positiven) ganzen Zahlen a_n einen gewissen Wert k erhält. Die Brodén'sche Abhandlung bezeichnet sich als eine Revision der Gyldén'schen Untersuchungen. Sie greift unter Anwendung der Mengenlehre das Problem mit grösserer Gründlichkeit an, sie ergänzt die Wahrscheinlichkeitsfrage in gewissen Beziehungen sachlich, bemerkt einige Versehen Gyldén's und fügt auch zu dessen Hauptresultat der reihentheoretischen Untersuchung manches Bemerkenswerte hinzu. Dagegen erbringt sie nicht den Beweis der nach Gyldén's Behauptung verschwindenden Wahrscheinlichkeit für die Divergenz der citirten Reihe, und sie beschränkt sich bei dem eigentlichen Wahrscheinlichkeitsproblem auf mehr oder weniger genaue Approximationen.

Beide Aufgaben, die Untersuchung der Divergenz und die wirkliche Ausführung der Wahrscheinlichkeitsbestimmungen, löst Wiman vollständig, und zwar auf die denkbar elementarste Weise. Seinen Entwickelungen, wie denen Brodén's, liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass alle Teilstrecken zwischen 0 und 1 von gleicher Länge gleichberechtigt sein sollen, d. h. dass dieselbe Wahrscheinlichkeit besteht, dass die Zahl μ in eine solche Teilstrecke wie in jede andere fällt. Sind dann $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene Zahlen, nicht aber die folgenden, so liegt μ zwischen den Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1)$ und ist auf die Strecke $l_{n1} = (-1)^n [(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)] = 1/s_n (s_n + s_{n-1})$ beschränkt. Soll nun weiter $a_{n+1} \geqq k$ sein, so muss μ in die Strecke $(a_1, a_2, \ldots, a_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n, k)$ fallen, für deren Länge l_{nk} man $l_{nk} = 1/s_n (ks_n + s_{n-1})$ findet. Die Wahrscheinlichkeit, dass μ bei den gegebenen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu dieser Strecke gehört, ist nach der Voraussetzung über die Gleichberechtigung gleich langer Strecken $l_{nk} : l_{n1}$. Es ergiebt sich demnach, falls $s_{n-1}/s_n = q_n$ gesetzt wird, für die Wahrscheinlichkeit $W(q_n, k)$, dass a_{n+1} den Wert k erreicht oder übersteigt, der Ausdruck:

$$W(q_n, k) = \frac{1+q_n}{k+q_n}.$$

Wird ferner mit $F(q_n, k)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass $a_{n+1} = k$ wird, so ergiebt sich

$$F(q_n, k) = W(q_n, k) - W(q_n, k+1) = \frac{1+q_n}{(k+q_n)(k+1+q_n)}.$$

Einen Hauptpunkt in den Entwickelungen bei Gyldén und Brodén bildet die Bestimmung des wahrscheinlichen Wertes q von q_n bei unbegrenzt wachsendem n. Obgleich die dabei angewandten Methoden auf Genauigkeit keinen Anspruch machen, so zeigt Wiman doch, dass der von beiden gegebene Wert $q = \sqrt{2} - 1$ mit dem richtigen völlig übereinstimmt. Dagegen ist die Uebereinstimmung mit dem wahren Sachverhältnis nicht länger vollkommen, wenn man mit Brodén in $W(q_n, k)$ und $F(q_n, k)$ für q_n diesen Wert q substituirt, um Näherungswerte der Wahrscheinlichkeiten $S_{n,k}$, bezw. $D_{n,k}$ zu erhalten, dass $a_{n+1} \geqq k$, bezw. $a_{n+1} = k$ ist. Die Beweisführung Wiman's stützt sich auf den folgenden Hülfssatz: Bezeichnen q_n' und q_n'' irgend zwei Stellen zwischen 0 und 1, und grenzt man bei diesen Stellen zwei gleich grosse, aber sehr kleine Teilstrecken ab, so nähert sich das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, dass q_n in die eine oder andere von diesen Teilstrecken fällt, bei fortgehender Verminderung der Strecken und unbegrenzt wachsendem n einem von n unabhängigen Grenzwert.

Der für $W(q_n, k)$ gefundene Ausdruck liefert endlich die Mittel zum Nachweise des Gyldén'schen Satzes, dass für die eingangs erwähnte Reihe die Wahrscheinlichkeit, zu divergiren, äusserst gering ist. Ot.

T. Brodén. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung reeller Zahlen. Stockh. Öfv. **57**, 239-266.

A. Wiman. Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwickelungen. Ibid. 733-745.

T. Brodén. Bemerkungen über Mengenlehre und Wahrscheinlichkeitstheorie, durch eine Schrift des Herrn A. Wiman veranlasst. Malmö. 1901. 23 S.

A. Wiman. Bemerkungen über eine von Gyldén aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage. Lund. 1901. 17 S.

T. Brodén. Noch einmal die Gyldén'sche Wahrscheinlichkeitsfrage. Malmö. 1901. 11 S.

Berichtigungen und Ergänzungen zu einer Untersuchung von Gyldén, welche auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die Convergenz gewisser in der Störungstheorie vorkommender Reihen hinzielte (Stockh. Öfv. 1888). Ausserdem eine kleine hieran sich anschliessende Polemik (vergl. das vorangehende Referat). Bdn.

J. Gomoll. **Ableitung von Formeln für die mathematische Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel nebst einigen Anwendungen.** Hoppe Arch. (2), **17**, 363-400.

Bezeichnet $w_{n,p}$ die Wahrscheinlichkeit, eine gewisse Augenzahl n mit p Würfeln zu werfen, und ist $i_{n,p}$ die Anzahl der dem Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle, so ist $w_{n,p} = i_{n,p} : 6^p$. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe, $i_{n,p}$ als Function der Augen- und Würfelanzahl darzustellen. Es zeigt sich, dass eine einheitliche Formel stets im Gewande einer complicirten transcendenten Function erscheinen würde, und dass es daher zweckmässiger ist, p verschiedene Formeln aufzustellen, deren jede nur innerhalb eines bestimmten Bereiches von n gilt. Die erste von den p Einzelformeln für $i_{n,p}$ gilt nur für den Bereich von $n = p$ bis $n = p + 1 \cdot 5$, die $k$te für den Bereich von $n = p + (k-1)5$ bis $n = p + k \cdot 5$, die $p$te und letzte für den Bereich von $n = 6p - 5$ bis $n = 6p$. Doch gestalten sich auch diese Formeln mit jeder Gruppe umfangreicher und überschreiten bald die Grenzen der praktischen Brauchbarkeit; es wird daher ein Verfahren angegeben, das zwar keine explicite Formel für $i_{n,p}$ liefert, aber doch verhältnismässig schnell und einfach in allen praktisch vorkommenden Fällen zum Ziele führt. Im Anschluss hieran wird endlich noch eine Art des Würfelspiels näher untersucht, die man zuweilen auf Volksfesten findet. Ot.

W. A. Whitworth. Questions 5669 and 5804. Ed. Times **72**, 66-70.

5669. Jemand trinkt in beliebiger Folge n Gläser Wein und n Gläser Wasser, alle von gleicher Grösse. Die Wahrscheinlichkeit, dass er während des ganzen Vorgangs nie mehr Wein als Wasser getrunken hat, ist $1/(n+1)$. — 5804. Jemand spielt unter gleich verteilten Aussichten $(3n+2)$-mal, indem er $(2n+1)$-mal gewinnt, $(n+1)$-mal verliert. Die Wahrscheinlichkeit, dass er während des ganzen Spieles nie schlechter steht als zu Anfang und nie besser als zu Ende, ist $n/(4n+6)$. — Lösungen von H. Fortey. Lp.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte von Crofton, E. B. Seitz, Matz mit Lösungen von R. Chartres, H. W. Curjel, H. A. Webb, W. A. Whitworth finden sich in Ed. Times **72**, 49-50, 104; **73**, 36, 39, 80. Lp.

N. Herz. **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung.** Leipzig: G. J. Göschen. IV + 381 S. 8°. (Sammlung Schubert XIX.)

Als Vorlage bei Abfassung seines Buches haben dem Verf. hauptsächlich die von E. Czuber deutsch bearbeiteten „Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung von A. Meyer“ aus dem Jahre 1879 gedient. Die mancherlei gewichtigen Mängel, die dem Herz'schen Buche anhaften,

sind übrigens nicht jenem vortrefflichen Werke zur Last zu legen, sondern sie treten dann auf, wenn der Verf. eigene Wege zu wandeln versucht, oder sie sind dadurch veranlasst, dass in den letzten 22 Jahren bedeutende Fortschritte auf diesem Gebiete zu verzeichnen sind, ohne dass darauf stets Rücksicht genommen wäre. Die sechs Kapitel des Buches behandeln: 1. Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Allgemeine Theoreme über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. 3. Anwendungen auf Glücksspiele. 4. Anwendungen auf das menschliche Leben. 5. Ueber die Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen, Urteilssprüche und Ahnungen. 6. Anwendungen auf die Naturgesetze, Ausgleichungsrechnung.

Auf eine Anzahl von Stellen in den ersten fünf Kapiteln, die zu kritischen Bemerkungen Anlass geben, ist von berufener Seite bereits an einem andern Orte (Zeitschr. f. Math. **46,** 486-487, 1901) hingewiesen worden. Indem ich hierbei nicht länger verweile, möchte ich nur noch etwas näher auf das die Ausgleichungsrechnung behandelnde Kapitel eingehen. Es nimmt einen verhältnismässig sehr grossen Raum ein, indem es die Seiten 259-377 umfasst. Bei dieser Ausdehnung hätte man etwas anderes erwarten können, als hier vorliegt. Dass bei der Ableitung des Fehlergesetzes (Verf. nennt es Wahrscheinlichkeitsfunction) die erste Begründung von Gauss aus dem Princip des arithmetischen Mittels und die von Hagen und Laplace gegeben werden, ist in einem Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht anders zu erwarten; dass aber die zweite von Gauss in der Theoria combinationis und ihrem Supplementum auseinandergesetzte Begründungsweise der Methode der kleinsten Quadrate, die darauf beruht, das mittlere zu befürchtende Fehlerquadrat der gesuchten Grössen (das consequent als der Durchschnittsbetrag des wahren Fehlerquadrats für unendlich viele gleichartige Fälle gebildet wird) zu einem Minimum zu machen, gar nicht erwähnt wird, ist kaum zu verzeihen. Dies Verfahren ist um so weniger zu billigen, als man schon seit langer Zeit weiss, welchen Wert Gauss dieser Ableitung, seiner ersten gegenüber, beilegte. Die Bestimmung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit für directe Beobachtungen einer Unbekannten auf S. 316/317 ist geschraubt, dazu nicht streng und mit der gewöhnlichen nicht zu vergleichen. Die Anmerkung hierüber auf S. 317, soweit sie den Ersatz des mittleren Fehlers durch den wahrscheinlichen betrifft, ist missverständlich. Auf S. 327 bezeichnet der Verf. die bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen auftretenden Fehlergleichungen als Bedingungsgleichungen, wie es noch Gerling that. Bei der später behandelten Ausgleichung bedingter Beobachtungen in Verbindung mit vermittelnden muss er dann solche Gleichungen zum Unterschied von den wirklichen Bedingungsgleichungen als Bestimmungsgleichungen einführen. Dass als einziges, dabei unvollständig durchgeführtes Beispiel einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen die Ableitung einer Planetenbahn gewählt ist, ist unpraktisch. Der über 5 Seiten umfassende Excurs über die Bildung von Normalorten (S. 355-360) ist fast vollkommen überflüssig. Die ausführliche Heranziehung der

Determinantentheorie entspricht nicht der Anlage des ganzen Kapitels. Statt dessen hätten besser andere Gegenstände Platz finden müssen. So fehlt z. B. bei den vermittelnden und bedingten Beobachtungen die Bestimmung der Gewichte und mittleren Fehler für Functionen der unbekannten, bezw. beobachteten Grössen vollständig, und doch ist häufig die Kenntnis dieser Grössen von der allergrössten Wichtigkeit. Soll z. B., um im Gedankenkreis des Verf. zu bleiben, aus der auf Beobachtungen in nur einer Opposition beruhenden Bestimmung einer Planetenbahn eine Aufsuchungs-Ephemeride für die nächste Opposition berechnet werden, so ist es von Wert, zu wissen, wie gross die mittlere Unsicherheit dieser Ephemeriden-Angaben ist. Dahin gehört auch die Bestimmung des mittleren Fehlers der Endseite eines Basisentwickelungsnetzes und vieles andere. Bei den bedingten Beobachtungen fehlt sogar die Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit. Für das Beispiel der Dreiecksnetz-Ausgleichung (S. 374) sind als hierbei auftretende Bedingungsgleichungen nur die Winkelgleichungen und Horizontabschlüsse aufgeführt, nicht aber die Seitengleichungen. Ueberhaupt ist der ganze Abschnitt über bedingte Beobachtungen unzulänglich. Verf. hat sich darauf beschränkt, seine diesbezügliche Darstellung aus dem „Handwörterbuch der Astronomie von Valentiner" einfach herüber zu nehmen, obwohl hier doch ein ganz anderer Leserkreis vorausgesetzt wird. In der am Ende angehängten Tafel für das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, die aus der siebenstelligen Tafel in dem Meyer-Czuber'schen Buche für engere Intervalle durch Interpolation abgeleitet und auf 6 Decimalen beschränkt ist, ist vom Argument 1,750 bis ans Ende in schwer übersichtlicher Weise die Anordnung geändert worden.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Verweisung auf andere Stellen des Buches durch Angabe der Paragraphennummern sehr unbequem ist, da diese im Kopfe der Seiten nicht angegeben sind und im Text nur wenig hervortreten. Bö.

W. Láska. Ueber die Ausgleichsrechnung. Astr. Nachr. **158,** No. 3651, 37-58.

W. Láska. Ueber das arithmetische Mittel. Jordan Z. f. V. **29,** 593-597.

Mit dem Satz, dass das arithmetische Mittel gleich genauer Beobachtungswerte einer Unbekannten ihren wahrscheinlichsten Wert darstelle, steht und fällt, nach des Verf. Meinung, das ganze Gebäude der Methode der kleinsten Quadrate. Ihm scheint also ebenso wie Herz (vergl. das vorangehende Referat) die zweite Gauss'sche Begründungsweise in der Theoria combinationis vollkommen unbekannt zu sein.

Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen das arithmetische Mittel als Näherungswert der gesuchten Grösse betrachtet werden kann, ohne dass dabei von den Lehren der Wahrscheinlichkeits-

rechnung mehr als unbedingt nötig Gebrauch gemacht wird. Zunächst soll die Frage behandelt werden, in welcher Beziehung die Gestalt der Ausgleichscurve zu dem zu wählenden Ausgleichsprincip steht. Für die Anwendung des arithmetischen Mittels zeigt sich, dass die Curve symmetrisch sein muss. Für die weitere Untersuchung geht der Verf. von der sogenannten Häufigkeitscurve aus, die erhalten wird, wenn man eine Strecke, als Träger einer Reihe von Beobachtungswerten, in gleiche Intervalle teilt, deren Mitten man die Anzahl der in dem Intervalle enthaltenen Beobachtungen als Ordinaten zurechnet. Die Endpunkte der Ordinaten liefern dann die Häufigkeitscurve, die zunächst discontinuirlich ist, aber, ausgehend von der Elementarfunction

$$f_1 = a_1 e^{-b^2 \Delta x^2},$$

passend durch die allgemeine Reihe

$$\varphi = \sum_0^\infty{}_x C_x \frac{d^x (e^{-b^2 \Delta x^2})}{d(\Delta x)^x}$$

dargestellt werden kann, wo Δx Fehler bedeuten.

Die einfachste asymmetrische Häufigkeitscurve ist

$$\eta = (a + a_1 \xi)\, e^{-b^2 \xi^2},$$

was an einem Beispiel erörtert wird.

Sind ferner x_x, x_λ zwei Beobachtungswerte für die Länge einer mit einem richtigen Massstab gemessenen Strecke, die gegenüber dem wahren Wert höchstens je um $\pm R$ falsch sein können, so liegt das Wertgebiet der unbekannten Grösse in Grenzen eingeschlossen, die um so enger sind, je mehr sich der Bruch

$$\frac{x_x - x_\lambda}{2R}$$

der Einheit nähert. Der Halbirungspunkt dieses Gebietes entspricht dem arithmetischen Mittel. Hieraus geht hervor, dass die nahe Uebereinstimmung zweier Beobachtungen nicht immer als besonderer Vorteil angesehen werden kann.

Ein Kriterium für die Anwendbarkeit des arithmetischen Mittels ist, dass es dem wahren Wert der gesuchten Grösse so nahe kommen muss, dass man die zweite Potenz der Abweichung des arithmetischen Mittels vom wahren Werte vernachlässigen darf (nach Bienaymé).

Es wird sodann untersucht, unter welchen Bedingungen die allgemeinste Form

$$x = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

durch das arithmetische Mittel ersetzt werden kann. Es werden hierbei auch die zwei Fälle behandelt, bei denen die Unbekannte durch

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

bestimmt werden muss.

Entstehen die Fehler nach Art der Hagen'schen Hypothese, so ist das arithmetische Mittel am Platze; ist aber z. B.

$$x_x = f_x x,$$

so kommt man auf das geometrische Mittel.

Arithmetisches Mittel, Methode der kleinsten Quadrate und die symmetrische Häufigkeitscurve stehen in innigem Zusammenhang. Von diesen ist aber durch die Beobachtungen allein die Häufigkeitscurve gegeben. Ihre Construction sollte also eigentlich jeder Ausgleichung vorausgehen, im Falle ihrer Asymmetrie aber das praktischste Ausgleichsprincip schaffen. Auch hierzu werden die Mittel angegeben.

Man sieht aber, dass die Methode der kleinsten Quadrate in der überwiegenden Anzahl der praktischen Fälle allein durchführbar ist.

In der zweiten Abhandlung werden einige Teile der ersten in etwas anderer Form wiedergegeben und ergänzt. Ist z. B.

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

eine ausgedehnte Reihe von $n = 2^p$ Beobachtungswerten von x, die nach der Grösse, vom kleinsten anfangend, geordnet sind, und sind ihre Abweichungen gegen den wahren Wert

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n,$$

so ist im allgemeinen

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n,$$

und in der Reihenfolge der δ kommt, ebenfalls im allgemeinen, nur ein Zeichenwechsel vor. Bildet man nun eine zweite Reihe

$$x'_k = \frac{x_k + x_{n-k+1}}{2} \qquad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\right),$$

so hat man die erste abgeleitete Reihe

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{\frac{1}{2}n}.$$

Fährt man so fort, so ist die p-te abgeleitete Reihe das arithmetische Mittel. Ordnet man die einzelnen abgeleiteten Reihen vor jeder weiteren Ableitung wieder nach der Grösse, so bilden die neuen δ jedesmal wieder eine Zahlenreihe mit im allgemeinen nur einem Zeichenwechsel, während die absoluten Werte der δ immer mehr abnehmen. Sind also 2^p Beobachtungsgrössen einer Unbekannten gegeben, die sich symmetrisch um die Unbekannte gruppiren, so stellt das arithmetische Mittel einen Näherungswert der Unbekannten dar, der sich um so weniger von ihr unterscheiden wird, je grösser die Anzahl der Beobachtungen und je ausgeprägter die Symmetrie der Beobachtungen ist. Bö.

P. A. Nekrassow. Ueber die Antwort von A. A. Markow. Mosk. Math. Samml. **21**, 379-386. (Russisch.)

Polemischer Aufsatz, schon in F. d. M. **30**, 215 erwähnt. Si.

A. A. Markow. Ueber die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Charkow Ges. (2) **7**, No. 1, 23-26. (Russisch.)

Beweis des Satzes: „Erscheint ein Ereignis k_0-mal in n_0 Versuchen, so wird die Wahrscheinlichkeit der Ungleichungen

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}} \leqq \frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0} \leqq +\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}}$$

für jede positive Zahl k (= Anzahl der Erscheinungen des Ereignisses in n Versuchen) grösser als $1-\frac{1}{t^2}$." Si.

A. Liapounoff. Sur une proposition de la théorie des probabilités. St. Petersb. Bull. (5) **13**, No. 4, 359-386.

Da der Beweis des berühmten Satzes von Laplace-Poisson über Wahrscheinlichkeiten der Summen unabhängiger Grössen, der zuerst von Tschebyschew gegeben und von A. Markow (F. d. M. **29**, 188; vergl. das folg. Ref.) neuerdings vervollständigt wurde, wenn auch ganz streng, doch etwas complicirt ist und nicht aus der Natur der Frage fliesst, so stellte sich der Verf. die Aufgabe, einen directen und möglichst elementaren Beweis zu geben. Dies ist ihm gelungen mit Hülfe der Methode des discontinuirlichen Factors (zuerst wohl von Glaisher angewandt, wie der Verf. bemerkt); er beweist den Satz in folgender Form:

Es sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von unabhängigen Veränderlichen; bekannt seien nicht deren Werte selbst, wohl aber die Wahrscheinlichkeiten, dass sie zwischen gegebenen Grenzen liegen. Vorausgesetzt, dass die mathematischen Hoffnungen d_i, a_i, l_i der Grössen $x_i, x_i^2, |x_i|^3$ wirklich existiren, setzen wir $\Sigma(a_i-\alpha_i^2)=nA$ und L^3 gleich der grössten der Zahlen $l_1, \ldots, l_n$. Wenn $\lim_{n=\infty} \frac{L^2}{A\sqrt[3]{n}}=0$, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit der Ungleichungen

$$z_1\sqrt{2nA} < x_1-\alpha_1+x_2-\alpha_2+\cdots+x_n-\alpha_n < z_2\sqrt{2nA}$$

(z_1 u. $z_2 > z_1$ beliebig) für unendlich wachsendes n der Grenze

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}dz,$$

und zwar gleichförmig für alle Werte von z_1 und z_2. Si.

A. A. Markow. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. St. Petersburg. 279 S. 8°. (Russisch.)

Das Buch von Markow zeichnet sich durch eine eigenartige Anordnung des Stoffes und durch die Strenge der Darstellung aus. Nur wenige Seiten (1-20, Kap. I) widmet der Verf. der Erklärung des Be-

griffes der Wahrscheinlichkeit nach Laplace sowie den Grundsätzen der Theorie, von denen der Verf. zwei aufzählt: die Sätze über die Addition und über die Multiplication der Wahrscheinlichkeiten; er stellt damit das Axiom auf: Sind in gewissen Fällen die Ereignisse $p, q, \dots, w$ gleich möglich und für das Ereignis A ungünstig, so werden nach Eintritt von A sämtliche dem A ungünstige Ereignisse unmöglich und fallen weg, die übrigen aber bleiben gleich möglich. Im Kap. II (S. 21-51) beschäftigt sich der Verf. mit der Aufgabe über die Ergebnisse wiederholter Versuche. Wahrscheinlichste Anzahl der Wiederholungen. Laplace'scher Beweis des Satzes von J. Bernoulli mit einigen Abänderungen. Der Verf. hebt die Notwendigkeit hervor, den Fehler der angenäherten Formel abzuschätzen, geht aber nicht darauf ein und bemerkt, dass die Compensation der Resultate von Versuchen keineswegs eine notwendige Folge des Satzes von J. Bernoulli sei. Kap. III (Ueber die Summen der unabhängigen Grössen. S. 52-100) enthält eine Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate. Begriff der mathematischen Hoffnung, Eigenschaften der Summe und des Products. Die Ungleichung von Tschebyschew, dass $1-1/t^2$ für beliebige t kleiner als die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$\Sigma a - t\sqrt{\Sigma(a_1 - a^2)} < \Sigma X < \Sigma a + t\sqrt{\Sigma(a_1 - a^2)}$$

ist, wo $a, b, \dots$ die mathematischen Hoffnungen der unabhängigen Grössen $X, Y, \dots$ und $a_1, b_1, \dots$ die ihrer Quadrate sind, dient zur Verallgemeinerung des Satzes von J. Bernoulli und zur Aufstellung des Satzes von Poisson. Kap. IV giebt eine Reihe von Beispielen zur Illustration verschiedener Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. 100-157). Kap. V handelt über Grenzbegriff, Irrationalzahlen und stetige Grössen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hier wird erstens die „Aufgabe von Tschebyschew" analysirt: die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein Bruch mit aufs Geratewohl hingeschriebenem Zähler und Nenner irreducibel sei. Es folgen weiter einige Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Kap. VI (Ueber Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen und künftiger Ereignisse) handelt über die Aenderung der Wahrscheinlichkeit bei Aenderung der Data. Die Lösung einer Reihe von Fragen wird auf den Satz über Division der Wahrscheinlichkeiten gegründet. Es seien hervorgehoben die Bemerkungen des Verf. über die Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer und die Anwendung auf Zeugenaussagen. In Anerkennung des grossen praktischen Wertes der Sterblichkeitstabellen hält Verf. es für unmöglich, ihre Richtigkeit durch Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu unterstützen. Ueber Zeugenaussagen giebt er eine neue Lösung der Aufgabe von Buniakowsky (vergl. dessen Grundlagen der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeiten) und deckt einen Fehler auf. Kap. VII ist der Methode der kleinsten Quadrate gewidmet (S. 213-266). Die Ansichten des Verf. sind in früheren Referaten besprochen (vergl. F. d. M. **29**, 188, 1898). Auf Grund dieser Ansichten wird hier eine zusammenhängende Darstellung gegeben. Den Schluss des Buches bildet Kap. VIII

über Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherung (S. 267-279). Si.

W. Gosiewski. Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. Definitionen und Principien. Wiad. mat. **4**, 137-153. (Polnisch.)

Kritik der üblichen Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der „Möglichkeit" zur „Notwendigkeit". Princip der totalen Wahrscheinlichkeit. Princip der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit. Dn.

M. Feldblum. Ueber die von Herrn Gosiewski gegebene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Wiad. mat. **4**, 268-269.

W. Gosiewski. Replik. Daselbst 270-272.

Es handelt sich um die von Gosiewski gegebene Definition der Wahrscheinlichkeit (s. das vorangehende Referat) und die gegen sie gerichteten Bemerkungen. Dn.

J. C. Wilson. Inverse or „a posteriori" probability. Nature **68**, 154-156.

Dem Verf. genügen die Beweise nicht, welche für die Formel der Wahrscheinlichkeit der Ursachen gegeben zu werden pflegen. Er liefert daher zwei Schlussweisen, die nach seiner Ansicht strenger sind. Danach lässt er sich über die Grundbegriffe der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre des weiteren aus. Lp.

H. MacColl. Question 14181. Ed. Times **72**, 79-80.

A und B seien zwei Ereignisse, die nicht unabhängig von einander sind. Ist die Abhängigkeit des A von B gleich der Abhängigkeit des B von A, so ist die Wahrscheinlichkeit des Eintritts von A gleich derjenigen des Eintritts von B. — Lösungen nach einer Art des Logikcalculs von MacColl und von Curjel. Eine geometrische Aufgabe verwandter Art ist No. 14318 von MacColl in Ed. Times **72**, 117. Lp.

H. MacColl. Question 6330. Ed. Times **78**, 49-51.

Die Wahrscheinlichkeiten zweier Ursachen X und Y sind beziehungsweise 0,1 und 0,2. Die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die Ursache X auftritt, ein Ereignis Z als Begleiterscheinung sich zeigt, ob als eine Folge der Ursache oder nicht, ist 0,6; die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die Ursache Y auftritt, das Ereignis Z als Begleiterscheinung sich zeigt, ob als eine Folge der Ursache oder nicht, ist 0,7. Ausserdem kann das Ereignis Z nicht eintreten bei Abwesenheit beider Ursachen X und Y. Unter der Annahme, dass X und Y unabhängig sind, und dass Z wahr-

scheinlicher ist, wenn sowohl X als auch Y eintreten, als wenn nur eine der Ursachen wirkt, liegt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zwischen 0,18 und 0,186, während nach Boole's Formel (Laws of thought) 0,190697 folgen würde. Die vom Verf. redigirte Note schliesst sich an seinen „Calculus of equivalent statements" an (vergl. F. d. M. **12**, 45, 1880 und **28**, 64, 1897), wo schon Boole's „Challenge problem" erörtert worden ist. Lp.

H. MacColl. Question 14210. Ed. Times **73**, 69-70.

Es mögen a und b wirkliche Erwartungen (real chances) bedeuten, k eine positive Zahl. Zwischen welchen Grenzen müssen k, a, b, liegen, damit der Bruch $k(1-a-b)/(1-b-bk)$ eine wirkliche Erwartung bezeichne? Die Grenzen von b sind in a, die von a in k, die von k numerisch anzugeben. Lösung vom Verf. selbst. Lp.

H. MacColl. Question 14244. Ed. Times **73**, 54-55.

Die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von A ist a, die für B ist b. Ausserdem weiss man, dass die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von A, wenn wir B als richtig annehmen, k-mal so gross ist wie die Wahrscheinlichkeit für die Unrichtigkeit von A, wenn B unrichtig angenommen wird. Es sollen in a, b, k, ausgedrückt werden: 1. die letzten beiden Wahrscheinlichkeiten, 2. die Abhängigkeit des A von B, 3. die Bedingung, dass A von B unabhängig ist. — Lösungen vom Verf. und von Curjel. Lp.

J. Eggenberger. Zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zeitschr. f. Math. **45**, 43-51

Sind p und q die einfachen und constanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse ε und ε', so ist die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass das Ereignis ε in einer sehr grossen Anzahl von $\mu = m + n$ Versuchen eine Anzahl a von Malen, die zwischen $m \pm \lambda$ liegt, eintrifft, gegeben durch

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{+\lambda} \frac{\mu!}{(m+i)!\,(n-i)!}\, p^{m+i} q^{n-i},$$

wobei noch $p:q = m:n$ vorausgesetzt sein möge. Für diesen schon von Jacob Bernoulli I gegebenen Ausdruck suchte zuerst de Moivre einen numerischen Wert. Seine Untersuchungen wurden fortgesetzt von Laplace, dessen Ergebnis

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \qquad \left(\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu p q}}\right)$$

seither allgemeine Anwendung gefunden hat. Das zweite, vom Integral-

zeichen freie Glied, in Theorie und Praxis oft vernachlässigt, ist stets gesondert zu berechnen. Es kann jedoch, wie die Abhandlung zeigt, mit dem Integral vereinigt werden, so dass $P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma'} e^{-t^2}dt$ wird und demnach ohne weiteres den Integraltafeln entnommen werden kann. Zu diesem Resultat führt die Anwendung der Stirling'schen Formel und der Euler'schen Summenformel auf den Bernoulli'schen Ausdruck. Es ergiebt sich $\gamma'=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$.

Verf. weist an zwei Beispielen (Verhältnis der Knaben- zu den Mädchengeburten, Verhältnis der Krankheitsfälle zu der Mitgliederzahl bei einer Krankenkasse) nach, dass sich die numerische Rechnung mit Hülfe der Grösse γ' sehr vereinfacht, trotzdem aber die Abweichung der Resultate von den genaueren, mittels der Laplace'schen Formel gefundenen ganz unerheblich ist. Es steht demnach nichts im Wege, der letzteren fortan die neue bequeme Form zu geben. Ot.

Andrade. A propos de deux problèmes de probabilités. C. R. **120,** 395-396.

Berichtigung einer früheren Note (C. R. **116,** 1281-1284, vergl. F. d. M. **25,** 345, 1893), welche die wiederholte Anwendung des Bernoulli'schen Theorems zum Gegenstande hatte. Ot.

E. Goedseels. Étude sur les erreurs d'observations. Rev. des qu. sc. (2) **17,** 144-174.

Eine populäre Schrift, in der manche gute Bemerkungen vorkommen; z. B. die folgenden: 1. Wenn n Beobachtungen die Feststellung ermöglicht haben, dass eine gemessene Grösse in den Intervallen

$$(a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_n, A_n)$$

liegen, wo die a_i kleiner als die A_i sind, so liegt sie notwendigerweise in dem Intervalle (a_M, A_m), wo a_M das grösste aller a_i, A_m das kleinste aller A_i ist. 2. Wenn man für eine Grösse einen Wert V annimmt, der grösser (oder kleiner) als n beobachtete Werte ist, kleiner (oder grösser) als $n+k$ beobachtete Werte, so liegt V sicherlich dem wahren Werte näher als n der beobachteten Werte. 3. Der Verf. betrachtet einen einer Grösse beigelegten Wert als gut, wenn er das Mittel zwischen den aus der Beobachtung hergeleiteten Werten ist, oder auch zwischen allen, wie in der Methode der kleinsten Quadrate, oder zwischen einer gewissen Anzahl dieser Werte, wie bei der Methode von Mayer, wenn es bloss zwei Unbekannte sind. Mn. (Lp.)

E. Goedseels. Étude sur la méthode de Tobie Mayer. Brux. S. sc. **24** B, 37-58.

P. Mansion. Rapport. Brux. S. sc. **24** A, 85-88.

1. Bei der ursprünglichen Mayer'schen Methode sind $3n$ Gleichungen für x, y, z gegeben, in denen die Coefficienten von x gleich 1 sind, die von y nach der Grössenfolge geordnet erscheinen. Man bildet drei Endgleichungen, indem man zunächst die n ersten Gleichungen addirt, dann die n folgenden, darauf die letzten n. Man kann ebenso vorgehen, wenn die Zahl 3 durch m ersetzt wird. Für $m = 2t$ liegen die durch die Endgleichungen gelieferten Werte zwischen den grössten und den kleinsten Werten, die man durch gewisse Combinationen der ursprünglichen Gleichungen zu je zweien erhält.

2. Diese Eigenschaft bleibt in dem Falle zweier Unbekannten bestehen, wenn man die Mayer'sche Methode in der modernen Gestalt anwendet; dann aber scheint die ursprüngliche Methode mindestens ebenso gut zu sein.

3. Wie gross auch die Anzahl der Unbekannten sein mag, so kann man enorme Vereinfachungen an den Rechnungen der Mayer'schen Methode anbringen.

Diese drei Bemerkungen von Goedseels sind neu. Mn. (Lp.)

Estienne. Sur la théorie des erreurs. C. R. **130**, 66-69.

Weiss man nur, dass die Summe der positiven gleich der Summe der negativen Fehler ist, so ist die Wahrscheinlichkeit P'_n, dass das arithmetische Mittel von n Beobachtungen mit einem Fehler $< \varepsilon$ behaftet sei (ε absolut genommen),

$$P'_n = \Theta\left(\frac{\varepsilon}{q}\sqrt{\frac{n}{2}}\right),$$

wo q der mittlere quadratische Fehler ist. Hiernach bildet also das arithmetische Mittel einen Näherungswert von vollkommen bestimmter Art. Es braucht aber nicht immer den besten Näherungswert zu liefern.

Verf. will nun zeigen, dass der Medianwert (d. h. der in der Mitte gelegene Wert) der nach der Grösse geordneten Beobachtungen eine ähnliche Rolle spielt, welches auch das Fehlergesetz sei.

Ist nämlich $p_1(\varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit, bei einer Beobachtung einen Fehler $< \varepsilon$ zu begehen, wobei nur vorausgesetzt wird:

$$p_1(0) = 0, \quad p_1(-\infty) = p_1(+\infty) = \tfrac{1}{2}$$

und $p_1(\varepsilon)$ fortwährend wachsend von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \pm\infty$, so ist die Wahrscheinlichkeit $p_{2n+1}(\varepsilon)$, dass der Medianwert von $2n+1$ Beobachtungen mit einem Fehler $< \varepsilon$ behaftet sei,

$$p_{2n+1}(\varepsilon)=\frac{\int_0^{2p_1(\varepsilon)}(1-z^2)^n\,dz}{2\int_0^1(1-z^2)^n\,dz},$$

wodurch also p_{2n+1} explicit durch p_1 ausgedrückt ist.

Ist n gross (für $n=9$ ist $\Theta(\sqrt{n})$ schon sehr nahe $=1$), so kann man mit sehr grosser Annäherung setzen:

$$p_{2n+1}=\tfrac{1}{2}\,\Theta\left(2p_1\sqrt{n}\right).$$

Betrachtet man nur absolute Werte von ε, und bezeichnet man die in diesem Falle p_1 und p_{2n+1} entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit P_1 und P_{2n+1}, so wird

$$P_{2n+1}=\Theta\left(P_1\sqrt{n}\right).$$

Setzt man z. B. $P_1=\frac{1}{2}$ und $n=9$, so sieht man, dass der wahrscheinliche Fehler r bei 19 Beobachtungen für den Medianwert nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ überschritten wird.

Da P_1 fortwährend von 0 bis 1 wächst, wenn ε von 0 bis ∞ geht, und da $\Theta(z)$ sehr stark mit z wächst, so kann man (bei einem grossen Wert von $P_1\sqrt{n}$) $P_1(\varepsilon)$ durch $\frac{\varepsilon}{k}$ ersetzen, wobei $y=\frac{\varepsilon}{k}$ die Gleichung der Tangente im Ursprung der Curve $y=P_1(\varepsilon)$ ist. Man erhält so

$$P_{2n+1}(\varepsilon)=\Theta\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{n}\right),$$

während für das arithmetische Mittel in diesem Falle

$$P'_{2n+1}(\varepsilon)=\Theta\left(\frac{\varepsilon}{q}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)$$

wird.

Ist also $q<k$, so ist das arithmetische Mittel besser, für $q>k$ aber der Medianwert. Da aber $k<2r$ ist, so ist noch um so mehr der Medianwert vorzuziehen, wenn $q>2r$ ist. Für das Gauss'sche Fehlergesetz ist $q=\frac{3}{2}r$. Ein noch günstigeres Resultat soll man aber bei Unkenntnis des Fehlergesetzes und beim Bekanntsein von q und r erhalten, wenn man zwischen dem Medianwert und dem arithmetischen Mittel ein Mittel mit den bezüglichen Gewichten q und $2r$ nimmt.

Bö.

Estienne. Valeur plausible d'une grandeur variable. C. R. **130**, 393-395.

Man wird in der Physik und in der Astronomie bisweilen in die Notwendigkeit versetzt, einer zwischen gewissen Grenzen nach einem mehr oder weniger bekannten Gesetze variablen Grösse einen bestimmten Wert beizulegen. Man wählt hierbei gewöhnlich den „wahrscheinlichen" Wert der Grösse, auch „Mittelwert" genannt; ein Unbefangener aber wird,

falls er die unbekannte Grösse x durch eine der Zahlen μ, k zu ersetzen hat, sich dann für μ entscheiden, wenn es sicher ist, dass der Fehler $|x-\mu|$ wahrscheinlich einen geringeren Wert hat als der Fehler $|x-k|$. Eine solche Zahl μ existirt nun, und zwar ist sie diejenige, für welche die Wahrscheinlichkeit, unter oder über dem wahren Werte der Variable zu liegen, gleich gross ist; μ ist der „plausible Wert“.

Kennt man die Wahrscheinlichkeit $p(x)=f(x)\,dx$ dafür, dass x zwischen den Grenzen x und $x+dx$ liegt, so ist der plausible Wert gegeben durch die Gleichung $\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^b f(x)\,dx$, wenn a und b die Grenzen sind, innerhalb deren sich die Variable bewegt. Die Anwendung dieses Satzes auf experimentell gefundene Curven leuchtet ohne weiteres ein.

Wird die Variable x durch eine andere Variable $y=f(x)$ ersetzt, und sind P_x, P_y die plausiblen Werte von x und y, so ist allgemein $P_y=f(P_x)$, vorausgesetzt, dass $f(x)$ innerhalb der betrachteten Grenzen beständig wächst oder abnimmt. Der wahrscheinliche Wert hat die analoge Eigenschaft nur in dem speciellen Falle, wo $f(x)$ eine lineare Function ist. Ot.

B. Weinberg. Ueber die Wahrscheinlichkeit einer Fehlerverteilung.
Astr. Nachr. **153**, No. 3659, 193-204.

Lehmann-Filhés hatte in einer Abhandlung „Ueber wahrscheinlichste Fehlerverteilungen“ in den Astron. Nachr. **127**, No. 3043, 305 bis 316 (vergl. F. d. M. **23**, 239-240, 1891) auf eine Unvollkommenheit in der üblichen Art der Bestimmung der Anzahl der Fehler einer Beobachtungsreihe zwischen gegebenen Grenzen (d. h. in der Bestimmung der theoretischen Fehlerverteilung) hingewiesen, diese Unvollkommenheit beseitigt und, hiervon ausgehend, eine sichere Methode zur Auffindung der wahrscheinlichsten Fehlerverteilung angegeben. Hierbei kam es auf die Form des Fehlergesetzes im allgemeinen nicht an.

Ist nun w die Wahrscheinlichkeit der Erfahrungs-Fehlerverteilung, berechnet nach der Formel:

$$w=\frac{N!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\ldots\,\nu_k!}\,w_1^{\nu_1}\,w_2^{\nu_2}\cdots w_1^{\nu_k},$$

welche die Wahrscheinlichkeit einer solchen Verteilung von N Fehlern in k Gruppen darstellt, bei der die Fehler, deren Wahrscheinlichkeit w_i ist, ν_i-mal vorkommen, so ist nach dem Verf. die Bestimmung des Wertes des Verhältnisses $w:W$, wo W die analog wie w berechnete Maximal-Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Fehlerverteilung bedeutet, das richtigste und bequemste Mittel, die Frage, ob auf die gegebenen Beobachtungen irgend ein Fehlergesetz oder welches am besten anwendbar ist, zu beantworten. Jedoch kommt durch die Willkürlichkeit der Gruppirungsweise der Fehler, d. h. durch die Wahl der Fehlergrenzen $a_1; a_2; \ldots; a_k$ für die einzelnen Gruppen, in die Berechnung von $w:W$

eine Unsicherheit hinein, die, wie an dem auch von Lehmann-Filhés behandelten Beispiel gezeigt wird, jeden sicheren Schluss unmöglich macht.

Nun ist aber von allen Werten $w:W$ der als der richtigste zu betrachten, der sich auf die kleinsten Differenzen der Gruppengrenzen bezieht, also auf den kleinsten Bruchteil α der Masseinheit, der bei den betreffenden Beobachtungen vorkommt. Da wir jede Beobachtung, deren Resultat zwischen $t\alpha \mp \frac{1}{2}\alpha$ liegt, wo t eine ganze Zahl ist, durch $t\alpha$ darstellen müssen, so ist als berechtigtste Gruppirung der Fehler die zu betrachten, bei der die Grenzen der Gruppen

$$-\infty, \cdots, -(i+\tfrac{1}{2})\alpha, -(i-\tfrac{1}{2})\alpha, \cdots, -1\tfrac{1}{2}\alpha, -\tfrac{1}{2}\alpha, +\tfrac{1}{2}\alpha, \cdots, +(i-\tfrac{1}{2})\alpha, +(i+\tfrac{1}{2})\alpha, \cdots, +\infty$$

sind. Nimmt man, um eine bestimmte Annahme zu machen, das Gauss'che Fehlergesetz an, so ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $t_i\alpha$

$$w_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{(t_i-\frac{1}{2})\alpha}{\varepsilon\sqrt{2}}}^{\frac{(t_i+\frac{1}{2})\alpha}{\varepsilon\sqrt{2}}} e^{-z^2}\,dz,$$

wo ε den mittleren Fehler bedeutet. Ist ν_i die Anzahl der Fehler $t_i\alpha$ nach der Erfahrung, und berechnet man nach der üblichen Methode oder auch nach Lehmann-Filhés die Zahlen n_i für die Anzahl der Fehler in jeder Gruppe nach der wahrscheinlichsten Fehlerverteilung, so hat man:

$$w = \frac{N!}{\Pi \nu_i!} \Pi\, w_i^{\nu_i}; \quad W = \frac{N!}{\Pi n_i!} \Pi\, w_i^{n_i}.$$

Die Aufgabe könnte hiermit als gelöst angesehen werden; jedoch wird diese Methode in allen den Fällen praktisch unausführbar bleiben, wo die Anzahl der vorhandenen möglichen Fehler die Zahl der Beobachtungen bedeutend übertrifft. In diesen Fällen muss man die Auffindung der Anzahl der Fehler in verschiedenen Gruppen durch die Auffindung der wahrscheinlichsten Gesamtheit der Gruppen, in denen je ein Fehler enthalten sein kann, ersetzen. Die Abscissen b_i, welche die wahrscheinlichste Anordnung der Gesamtheit der Fehler darstellen, werden nun durch die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{b_i}{\varepsilon\sqrt{2}}} e^{-z^2}\,dz = \frac{i-\frac{1}{2}}{N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

gegeben. Da aber jeder Fehler durch eine ganze Zahl von Einheits-

bruchteilen α dargestellt sein muss, so ist die wahrscheinlichste Gesamtheit der Fehler durch

$$\tau_1 \alpha, \tau_2 \alpha, \ldots, \tau_N \alpha$$

dargestellt, wo

$$\tau_i = E\left(\frac{b_i}{\alpha}\right) + 1,$$

d. h. das zu b_i nächst grössere Multiplum von α ist.

Diese Methode wird an einem Beispiele ausführlich erläutert, indem auch die praktischsten Rechenvorschriften angegeben werden, bei deren Anwendung sich Tafeln für $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz$ als sehr nützlich erweisen.

Bö.

K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. — On the law of reversion. Lond. R. S. Proc. **66**, 140-164.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit, bestimmte Merkmale eines Vorfahren im Nachkommen wieder zu finden. Br.

K. Pearson and A. Lee. Mathematical contributions to the theory of evolution VII. — On the application of certain formulae in the theory of correlation to the inheritance of characters not capable of quantitative measurement. Lond. R. S. Proc. **66**, 324-327.

Kurzer Bericht über eine Arbeit, die sich mit Einzelfragen betreffs der Variabilität ererbter Eigenschaften beschäftigt. Br.

K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. VIII. — On the correlation of characters not quantitatively measurable. Lond. R. S. Proc. **66**, 241-244.

Kurzer Bericht über eine Arbeit, welche die Häufigkeit des Eintretens eines bestimmten Complexes von Erscheinungen aus den Coefficienten einer Maclaurin'schen Reihe bestimmt, die nach den Abhängigkeitscoefficienten der einzelnen Charaktere entwickelt ist. Br.

K. Pearson. Data for the problem of evolution in man. III. — On the magnitude of certain coëfficients of correlation in man, etc. Lond. R. S. Proc. **66**, 23-32.

Enthält eine Reihe statistischer Angaben über folgende Fragen: Abhängigkeit der Geburtenzahl von der Mondphase, Beziehung zwischen Länge und Gewicht bei Neugeborenen, Beziehung zwischen Grösse,

Gewicht, Körperkraft und Schädelbildung von Erwachsenen, Einfluss körperlicher Aehnlichkeit von Mann und Weib auf die Fruchtbarkeit der Ehe. Br.

K. Pearson. Data for the problem of evolution in man. IV. — Note on the effect of fertility depending on homogamy. Lond. R. S. Proc. **66**, 316-323.

Ableitung der These, dass durch die natürliche Vermehrung ohne Hinzukunft der natürlichen Zuchtwahl differenzirte Arten nicht entstehen können, sondern höchstens eine ganz langsame progressive Variation. Die Ableitung basirt auf dem verallgemeinerten Fehlergesetz, dessen Anwendung natürlich das Nichtvorhandensein einer natürlichen Zuchtwahl voraussetzt. Br.

K. Pearson. Data for the problem of evolution in man. V. — On the correlation between duration of life and the number of offspring. Lond. R. S. Proc. **67**, 159-179.

Der Durchschnitt der Personen, die ein höheres Lebensalter erreichen, ist fruchtbarer als der Durchschnitt derjenigen, die früher sterben. Die Abhängigkeit ist durch Curven darstellbar. Br.

A. Lee and K. Pearson. Data for the problem of evolution in man. VI. — A first study of the correlation of the human skull. Lond. R. S. Proc. **67**, 333-337.

Ueberlegungen, welche speciellen Schädelmasse voraussichtlich zu anderen Körpermassen in festen Beziehungen stehen werden, so dass alle Abweichungen als dem verallgemeinerten Fehlergesetz folgend geltend können. Br.

K. Pearson. On the criterion, that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. Phil. Mag. (5) **50**, 157-175.

Es handelt sich um die Fehlerverteilung im Falle mehrerer Variabeln, die in Beziehung zu einander stehen. Diese wird, ebenso wie bei einer Variable, mit Hülfe der Kramp'schen Function ermittelt, die in der Weise verallgemeinert wird, dass im Exponenten von e eine homogene Function zweiten Grades der Variable steht, deren Coefficienten durch die Bedingungen gegeben sind. Der Weg zur praktischen Berechnung der entsprechenden Werte in einem Einzelfall wird angegeben, und einige Beispiele werden mitgeteilt. Br.

G. U. Yule. On the association of attributes in statistics: with illustration from the material of the childhood society. Phil. Trans. **194**(A), 257-319. Abstract. Lond. R. S. Proc. **66**, 22-23.

Wenn es sich darum handelt, aus statistischen Resultaten auf die grössere oder geringere Abhängigkeit verschiedener Merkmale von einander zu schliessen, braucht man exacte Kriterien, um zu entscheiden, inwieweit eine Abhängigkeit überhaupt vermutet werden darf. Das einfachste Kriterium ist, dass vollständige Unabhängigkeit zweier Merkmale dann vorliegt, wenn die Wahrscheinlichkeit ihres gemeinsamen Eintreffens, ermittelt aus den statistischen Daten, gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens der einzelnen Merkmale ist. Ist dies nicht der Fall, so ist eine Abhängigkeit beider Merkmale in irgend einer Weise zu vermuten. Die Arbeit giebt nun Mittel an, wie man die Beobachtungsergebnisse zur Erforschung der Art und Weise, sowie des Masses der Abhängigkeit verwerten kann. Auch für die Berechnung der wahrscheinlichen Fehler werden Anweisungen gegeben. Die erhaltenen Resultate werden auf mehrere praktische Beispiele angewandt. Br.

W. F. Sheppard. On the tabulation of certain frequency-distributions. Phil. Mag. (5) **50**, 393-398.

Wenn eine durch statistische Ermittelungen gegebene Zahlenabhängigkeit zweier Grössen durch einfache Potenzfunctionen empirisch dargestellt werden soll, pflegt man zur Ermittelung der Coefficienten die Abscisse in äquidistante Teile zu teilen und numerisch über die Producte aus Ordinate und den entsprechenden Potenzen zu integriren. Dies Verfahren wird derart abgeändert, dass die Abscisse in nicht-äquidistante Teile geteilt wird, nämlich solche, welche gleichen Flächeneinheiten der Curve entsprechen, und dass dann die Integration numerisch durchgeführt wird. Dies Verfahren ist namentlich von Bedeutung, wenn beide Randordinaten ∞ sind. Einige Beispiele werden gegeben. Br.

J. A. Thomson. Facts of inheritance. Nature **62**, 331-334.

Vortrag in der Royal Institution. Teile: I. Die physische Grundlage der Vererbung. II. Duale Natur der Vererbung. III. Verschiedene Grade erblicher Aehnlichkeit. IV. Rückschlag. V. Galton's Gesetz. In dem letzten Teile ist eine hübsche Tabelle, bezüglich der Ahnen Kaiser Wilhelm's II.:

Generationen:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1. Theoretische Zahl	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
2. Wirkliche Zahl (bekannt)	2	4	8	14	24	44	74	111	162	206	225	275
3. Ungenau bekannt								5	15	50	117	258
4. Wahrscheinliche Zahl								116	177	256	342	533

Lp.

FRIEDR. WERNER. Beiträge zur Collectivmasslehre. Wundt Philos. Studien **15**, 453-500.

Die Arbeit schliesst sich an die Abhandlungen von Bruns an: „Ueber die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik" (F. d. M. **25**, 352-354, 1893), sowie besonders: „Zur Collectivmasslehre" (F.d.M. **29**, 189, 1898). Wie Bruns in der letzteren Arbeit zeigt, dass das Fechner'sche Verfahren nach der rechnerischen, also formalen Seite hin einer Verbesserung fähig sei, und dass auch die Begriffsbestimmung eines Collectivgegenstandes noch eine andere, weitergehende Fassung zulasse, so liefert der Verf. durch eine Behandlung teils der von Fechner gewählten Beispiele, teils neu construirter Fälle durch Abzählen gewisser Buchstaben in den einzelnen Zeilen eines Druckwerkes eine Illustration der Bruns'schen Ausführungen. Ueber die Ergebnisse berichten wir mit den Worten des Verf. (S. 497): „In rein formaler Hinsicht könnte nun die Ausbeute der Rechnung gering erscheinen; denn dass die Collectivgegenstände im allgemeinen asymmetrische Verteilungscurven aufweisen, das hat Fechner bereits gezeigt, und er hat auch durch Einführung des dichtesten Wertes d und durch Angabe des Unterschiedes $m'-m_1$, der Differenz der Summen der Werte z oberhalb und unterhalb dieses dichtesten Wertes, ein bestimmtes Mass für die Asymmetrie geschaffen. Aber die Reihenentwickelung von Bruns giebt uns in den numerischen Werten der Coefficienten A_3 und A_5, A_7 u. s. w. ein viel genaueres Mass derjenigen Abweichungen vom Gauss'schen Gesetz, welche sich unsymmetrisch zum arithmetischen Mittelwerte verteilen, und überdies erhalten wir in den Coefficienten A_4, A_6 u. s. w. einen sicheren Massstab zur Beurteilung der symmetrisch zu dem Mittelwerte verteilten Abweichungen. Das Ergebnis der durchgeführten Rechnungen steht also doch wohl hinter den Ausführungen Fechner's nicht zurück." Lp.

L. CAMERANO. Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento. Torino Atti **35**, 650-666.

Die von der englischen und amerikanischen Schule in das Studium der „biologischen Variation" eingeführten analytischen Methoden werden kritisirt und statt ihrer die Bestimmung folgender Grössen vorgeschlagen, wenn es sich darum handelt, in einer Reihe von Individuen die quantitative Variation eines Charakters festzustellen:

1. Der Variabilitätsindex. Er ist durch die Zahl der Ausdrücke gegeben, welche in das „Variationsfeld" eintreten. Letzteres kann in Form einer arithmetischen Reihe dargestellt werden, welche die constante Differenz 1 hat und sich zwischen den beiden äussersten beobachteten Werten des Charakters erstreckt.

2. Der Variationsindex wird erhalten als Verhältnis derjenigen in der arithmetischen Reihe enthaltenen Ausdrücke, welche in der Serie

der Individuen wirklich beobachtet worden sind, zu der Gesamtanzahl der Ausdrücke des Variationsfeldes.

3. Die Frequenzindices der im Vergleich zum mittleren Werte kleineren, gleichen und grösseren Werte. Man bestimmt den mittleren Wert der das ganze Variationsfeld bildenden Werte und teilt in Bezug auf diesen die thatsächlich beobachteten Werte in drei Gruppen; darauf summirt man die Frequenzen der Werte einer jeden Gruppe und bildet die Verhältnisse der bezüglichen Summen zu der Gesamtanzahl der Individuen.

4. Die Deviationsindices (Abweichung vom mittleren Werte). Man teilt das Variationsfeld in zwei Teile: a) vom kleinsten Werte zum mittleren Werte, b) vom mittleren Werte zum grössten Werte, bildet in jedem Teile die Summe der Abweichungen aller möglichen Werte (d. h. aller Glieder der so construirten arithmetischen Reihen) vom mittleren Werte des ganzen Variationsfeldes, berechnet in gleicher Weise die Summen der Abweichungen der thatsächlich beobachteten Werte des Variationsfeldes vom mittleren Werte des ganzen Variationsfeldes und bildet endlich die entsprechenden Verhältnisse der beiden Summen. Will man gleichzeitig der Frequenz Rechnung tragen, so multiplicirt man die so erhaltenen Indices bezüglich mit den nach 3. gebildeten Frequenzindices.

5. Der Isolationsindex eines Wertes der Reihe wird erhalten, indem man die Zahl aller möglichen Werte berechnet, die zwischen ihm und den nächsten, thatsächlich beobachteten Werten liegen, und darauf diese Zahl durch die Gesamtzahl der Werte des Variationsfeldes dividirt. Will man auch die Frequenz des Wertes berücksichtigen, so hat man wie vorher den erhaltenen Isolationsindex mit dem Frequenzindex zu multipliciren. Ot.

Th. Klompers. Cours théorique et pratique d'algèbre financière. Anvers: Van Isboven. XXXIX + 364 S. 8°.

Ein sehr gut geschriebenes, praktisches Werk, welches die Theorie und die Praxis aller Finanzoperationen enthält, die von der Theorie der Zinsen abhängen, mit Einschluss der Anleihen und ihrer Tilgung, sowie der Leibrenten nebst den zur Berechnung nötigen Tabellen. Aufgenommen sind auch die Principien der von vielen Rechnungsführern angenommenen allgemeinen Bezeichnung nach dem „Text-Book of the King“.

Mn. (Lp.)

L. Bachelier. Théorie de la spéculation. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 21-86. Paris: Gauthier-Villars. 70 S. 4°.

Diese geistreiche Abhandlung verdient das volle Interesse nicht allein des Mathematikers, sondern vor allem der Finanz- und Versicherungswelt. Leider machen die zahlreichen technischen Ausdrücke, denen der Verf. überdies noch eigene Definitionen hinzufügt, eine dem Nichtfachmann verständliche Berichterstattung über die Ergebnisse der Arbeit unmöglich. Es möge daher hier nur ein kurzes Inhaltsverzeichnis Platz finden:

1. Besprechung der Börsenoperationen (feste Operationen, Reports, äquivalente und wahre Kurse, Prämien).

2. Die Wahrscheinlichkeiten bei den Börsenoperationen (mathematische Hoffnung, Wahrscheinlichkeitsgesetz, Wahrscheinlichkeit in einem gegebenen Intervall, wahrscheinliche Abweichung), Gesetz der Prämienschwankungen, einfache und Doppelprämie, Optionen.

3. Feste Geschäfte, Wahrscheinlichkeit des Kassageschäfts und des festen Kaufs.

4. Prämiengeschäfte.

5. Zusammengesetzte Operationen (fester Kauf gegen Verkauf mit Prämie u. s. w.).

6. Wahrscheinlichkeit, dass ein Kurs in einem gegebenen Zeitintervall erreicht wird, Anwendungen, Curve der Maximalwahrscheinlichkeit.

Ot.

B. Danielewicz. Berechnung der Prämienreserve in den Lebensversicherungen. Wiad. mat. **4**, 60-68.

Discussion einer von Hamza vorgeschlagenen allgemeinen Formel zur Berechnung der Prämienreserve. Dn.

Chr. Hansen. Livrenter betalbare *m* Gange aarlig. Nyt Tidss. for Math. **11** B, 58-68.

Der Verf. leitet mit elementarer Begründung Formeln für Leibrenten her, die *m*-mal jedes Jahr zahlbar sind. V.

J. Wasteels. Sur la représentation proportionnelle. Mathesis (2) **10**, 81-84.

Das belgische System der proportionalen Vertretung verwirklicht aufs bestmögliche die Proportionalität in einem einzigen Wahlkörper nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mn. (Lp.)

Weitere Litteratur.

H. Schubert. Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. 2. Aufl. 3 Bände. I. Zahlprobleme. II. Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme. III. Reiseprobleme und geometrische Probleme. Leipzig: G. J. Göschen. VIII + 199, IV + 247, III + 265 S. 8°.

C. E. Wasteels. Over binomiale curven. Vlaamsch natuurk. congres 1899, 27-31.

C. E. Wasteels. Over verzamelcurven. Vlaamsch natuurk. congres 1899, 32-37.

L. Lindelöf. Un problème de calcul des probabilités. Helsingfors Öfv. **42**, 79-87.

R. Schmidt. Beiträge zum Gesetze der kleinen Zahlen. Diss. Göttingen. 56 S. 8°.

D. P. Bartlett. General principles of the method of least squares, with applications. 2nd edition. Boston Mass.: Institute of Technology. 142 + 11 S. 8°.

M. Beeton and K. Pearson. Data for the problem of evolution in man. First study of the inheritance of long-evity and the selective death-rate in man. London, Journ. Inst. Actuar. 1900. 18 S. 8°.

M. Merchich. Isagoge in principia mathematica oeconomices politicae, eruditis orbis catholici congressum quintum mense Augusto anni 1900 Monaci celebraturis tradita. Vienna, Horvát-Kimle: Merchich. 26 S. 8°.

Chr. Moser. L'ordre de survie et les fonctions de Lamé. Arch. sc. phys. Genève (4) **8**, 377 (1899).

R. Viti. Sulla teoria matematica della previdenza; seconda conferenza tenuta il 17 marzo 1900 alla R. Accademia dei ragionieri di Bologna. Roma: Giovanni. 15 S. 8°.

L. Grossmann. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten neuen Fundamenten der politischen Arithmetik. 11. Lieferung. (Suppl. Bd. IV, 80 S.) Wien: Selbstverlag. gr. 8°. 12. (Schluss)-Lieferung. VIII + 80 S. gr. 8°.

J. Jung. Die Elemente der Versicherungstheorie in synthetischer Behandlung. Pr. Pilsen. 16 S. 8°.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Kapitel 1.

Allgemeines.

P. SWESCHNIKOW. Elementare Theorie der Reihen. Jahresb. d. Realschule Uralsk 1898-99. 52 S. 8°. (Russisch.)

Elementare Darstellung der Grundlagen der Theorie, ungefähr wie in Cauchy's Algebraischer Analysis. Si.

E. SCHIMPF. Einführung eines Masses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe. Deutsche Math. Ver. 8_1, 216-217.

„Bezeichnet man die Function, welcher sich die Reihe $\sum\limits_0^n a_k$ für den Fall ihrer Convergenz als Grenzwert nähert, mit a, denkt sich alle Functionen, welche der Differenz $\sum\limits_0^n a_k - a$ infinitär gleich sind, zusammengestellt und sucht unter diesen eine solche aus, welche einen besonders einfachen Bau besitzt, so gelangt man zu einer Function, die als Convergenzmass der Reihe gelten kann.“ Wz.

G. DE LONGCHAMPS. Sur la règle de Raabe ou règle de Duhamel. Nouv. Ann. (3) **19**, 216-218.

Setzt man in der Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ den Quotienten

$$v_{n+1} : v_n = 1 : \left(1 + \frac{1}{n} + \beta\right),$$

so ist die Reihe divergent für $\beta \leqq 0$. Hat jedoch $n\beta$ für $n=\infty$ eine von Null verschiedene Grenze k, oder wird $n\beta$ für $n=\infty$ unendlich gross, so ist die Reihe convergent. Wz.

K. Žorawski. Ueber die Convergenz der Umkehrungsreihen. Krak. Abh. **37**, 139-153. (Polnisch.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist die Untersuchung der Convergenz der Umkehrungsreihen für die durch eine Gleichung $f(z)=\zeta$ definirten Functionen z von ζ, zu welchen die bekannten Reihen von Lagrange, Bürmann und Wronski gehören. Die Untersuchung wird mittels der Methode der conformen Abbildungen durchgeführt, und die Resultate werden geometrisch interpretirt. Die Arbeit enthält mehrere allgemeine Sätze und Anwendung derselben auf die durch Gleichung $e^z=\zeta$ und $f(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_n=\zeta$ definirten Functionen z von ζ. Dn.

M. Lerch. Arithmetisches über unendliche Reihen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 217-219.

In der Reihe $S=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3+\cdots$ seien die Grössen w_ν positiv und $\lim w_\nu=0$ für $\nu=\infty$, die v dagegen beliebig; wird gesetzt

$$S_m=\frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu\,[mw_\nu],$$

worin m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist, wenn S absolut convergirt, $\lim S_m=S$ für $m=\infty$. Ist dagegen S bedingt convergent, so gilt Folgendes:

I. Die Gleichung $\lim S_m=S$ besteht, wenn die v_ν abwechselnd $+1$ und -1 bedeuten und die w_ν mit wachsendem ν abnehmen ($S=w_1-w_2+w_3-w_4+\cdots$).

II. Die Gleichung $\lim S_m=S$ besteht, wenn die w_ν abnehmen und die Summe $v_1+v_2+\cdots+v_n$ absolut kleiner bleibt als eine Grösse von der Form $M:w_n^\varrho$, wobei M eine positive Constante und ϱ einen constanten positiven echten Bruch bedeutet. Wz.

F. London. Ueber Doppelfolgen und Doppelreihen. Math. Ann. **53**, 322-370.

Eine zweifach unendliche Folge reller Zahlen a_μ^ν ($\mu, \nu=0,1,2,\ldots$) heisst eine Doppelfolge und wird durch $\{a_\mu^\nu\}$ bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass die $|a_\mu^\nu|$ unter einer bestimmten Zahl G sich befinden; deshalb heisst die Folge eine begrenzte. Dann existirt eine untere und obere Grenze U und O, so dass keine der Zahlen $a_\mu^\nu<U$ und $>O$

ist, dass aber in jedem U, bezw. O umschliessenden Intervall Zahlen der Folge sich befinden.

Existirt eine Zahl a, so dass sich jeder positiven Zahl ε zwei ganze positive Zahlen m, n so zuordnen lassen, dass für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$

$$|a - a_\mu^\nu| \leqq \varepsilon$$

wird, so heist a der Grenzwert der Folge, die Folge convergent:

$$\lim_{\mu, \nu = a} a_\mu^{\nu'} = a.$$

Jede begrenzte, nie abnehmende (zunehmende) Doppelfolge besitzt ihre obere Grenze O (untere Grenze U) als Grenzwert. Jede monotone Folge ist convergent.

Die obere und untere Grenze der Partialfolge $a_{\mu+\varrho}^{\nu+\sigma}$ $(\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots)$ werde durch o_μ^ν und u_μ^ν bezeichnet, dann heissen die begrenzten Doppelfolgen u_μ^ν, o_μ^ν $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die untere und obere Grenzfolge der Doppelfolge a_μ^ν; beide sind convergent.

$$\operatorname{Lim}_{\mu, \nu = \infty} u_\mu^\nu = \underline{\operatorname{Lim}}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^\nu = u; \quad \operatorname{Lim}_{\mu, \nu = \infty} o_\mu^\nu = \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^\nu = o.$$

u und o heissen die untere und obere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge.

Die Unbestimmtheitsgrenzen einer begrenzten Doppelfolge a_μ^ν sind die Grenzwerte der zu a_μ^ν gehörigen unteren und oberen Grenzfolge.

Unter einer in der Doppelfolge a_μ^ν enthaltenen einfachen Folge versteht man eine einfache Folge von Zahlen a_μ^ν, welche der Doppelfolge angehören, und deren Zeiger unabhängig von einander über alle Grenzen wachsen. $\{a_{\mu_\varrho}^{\nu_\varrho}\}$, wobei $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ zwei Folgen ganzer positiver Zahlen bedeuten. $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} \mu_\varrho = \infty$, $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} \nu_\varrho = \infty$.

Die Unbestimmtheitsgrenzen einer jeden in einer begrenzten Doppelfolge enthaltenen einfachen Folge liegen zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen der Doppelfolge.

Das von den Unbestimmtheitsgrenzen einer Doppelfolge begrenzte Intervall (u, o) heisst das Oscillationsintervall der Doppelfolge. Ein Intervall (u', o') heisst in einem andern enthalten, wenn $u \leqq u' \leqq o' \leqq o$ ist.

Ist eine einfache Folge in einer Doppelfolge enthalten, so ist auch ihr Oscillationsintervall in dem der Doppelfolge enthalten.

Eine Doppelfolge convergirt dann und nur dann, wenn ihre Unbestimmtheitsgrenzen einander gleich werden.

Eine Doppelfolge convergirt dann und nur dann, wenn sämtliche in ihr enthaltenen einfachen Folgen convergiren.

Unter gleichmässiger Convergenz der Folgen eines Systems zum Grenzwert a versteht man, dass bei sämtlichen Folgen die Glieder sich von ein und derselben Stelle an von a höchstens um die beliebig kleine Grösse ε unterscheiden.

Wenn in einer Doppelfolge die Diagonalfolge $a_\mu^\mu \ (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ und die zu ihr parallelen Folgen zu einem und demselben Grenzwert gleichmässig convergiren, so convergirt auch die Doppelfolge zu diesem Grenzwert und umgekehrt.

Die Doppelfolge mit convergenten Zeilen (Colonnen) ist dann und nur dann convergent, wenn die Convergenz der Zeilen (Colonnen) eine gleichmässige ist und auch die von den Zeilen-(Colonnen-)Grenzwerten gebildete Folge convergirt.

Sind die Zeilen $\{a_0^\nu, a_1^\nu, a_2^\nu, \ldots\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ nicht convergent, so oscilliren sie zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen $\underline{\mathrm{Lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu = \underline{a}^\nu$, $\overline{\mathrm{Lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu = \bar{a}^\nu$. Die sämtlichen Zeilen nähern sich ihren Oscillationsintervallen gleichmässig, wenn jeder beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Zeiger m zugeordnet werden kann, so dass für jedes einzelne ν $\underline{a}^\nu - \varepsilon \leqq a_\mu^\nu \leqq \bar{a}^\nu + \varepsilon$ für $\mu \geqq m$, dass also in jeder einzelnen Zeile vom m-ten Gliede ab die Glieder sich höchstens im Abstande ε vom zugehörigen Oscillationsintervall befinden. Ein so beschaffenes System von Folgen heisst gleichmässig oscillirend.

Eine Doppelfolge ist dann und nur dann convergent, wenn das System der Zeilen gleichmässig oscillirt und die aus den Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen gebildeten Folgen zu demselben Grenzwert convergiren.

Wenn in einer Doppelfolge die Zeilen und Colonnen convergiren und eins von diesen beiden Systemen gleichmässig convergirt, so convergirt auch die Doppelfolge und somit auch die Folgen der Zeilen- und Colonnen-Grenzwerte.

Stellt man a_μ^ν durch einen Punkt einer Ebene dar, welcher in Bezug auf ein fest gegebenes rechtwinkliges Coordinatensystem die Coordinaten $x = \mu, y = \nu$ besitzt, so werden die a_μ^ν durch die Ecken eines Punktgitters dargestellt, welches den von der positiven X- und der positiven Y-Axe begrenzten Quadranten überspannt. Die Punkte, welche die Elemente einer in der Doppelfolge enthaltenen einfachen Folge $\{a_{m_\nu}^\nu\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ darstellen, geben, successive verbunden, einen gebrochenen Linienzug; ein solcher teilt den Quadranten in zwei Teile H und V, von denen H von dem Linienzug und der positiven X-Axe, V von dem Linienzug und der positiven Y-Axe begrenzt wird. Die Gesamtheit der Elemente a_μ^ν, deren Punkte sich in H, bezw. V befinden, heisst der horizontale, bezw. verticale Teil der Doppelfolge. Eine Doppelfolge verläuft in H oder V, wenn sie von Anfang oder einer bestimmten Stelle an ganz H oder V angehört.

Eine Doppelfolge heisst horizontal convergent, wenn sich dieselbe durch eine in ihr enthaltene einfache Folge in einen horizontalen Teil H und einen verticalen Teil V zerlegen lässt, so dass sämtliche in der Doppelfolge enthaltenen und in H verlaufenden einfachen Folgen convergiren. Dann convergiren alle diese Folgen zu demselben Grenz-

wert a, die Doppelfolge convergirt horizontal zum Grenzwert a. (Entsprechend wird die verticale Convergenz definirt.)

Wenn eine Doppelfolge zum Grenzwert a horizontal (vertical) convergirt, so convergiren die beiden von den oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen (Colonnen) gebildeten Folgen zum Grenzwert a.

Wenn die Doppelfolge zum Grenzwert a lateral (d. h. horizontal und vertical) convergirt, so convergiren die aus den Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen und Colonnen gebildeten Folgen sämtlich zum Grenzwert a und umgekehrt.

Es ist dann und nur dann

$$\text{I.}\quad \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^\nu = \lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^\nu,$$

wenn die Doppelfolge $\{a_\mu^\nu\}$ lateral convergirt und sämtliche Zeilen und Colonnen convergiren.

Ist eine Doppelfolge mit convergenten Zeilen und Colonnen convergent, so sind die Grenzprocesse I vertauschbar.

Convergiren in einer Doppelfolge alle Zeilen und Colonnen, und ist eins von diesen Systemen gleichmässig convergent, so sind die beiden Grenzprocesse vertauschbar.

Eine Doppelfolge $\{u_\mu^\nu\}$, deren Glieder man successive durch Summation an einander zu reihen beabsichtigt, heisst eine unendliche Doppelreihe. Setzt man

$$\begin{array}{l} u_0^0 + u_1^0 + u_2^0 + \cdots + u_\mu^0 \\ + u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + \cdots + u_\mu^1 \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_0^\nu + u_1^\nu + u_2^\nu + \cdots + u_\mu^\nu \end{array}$$

gleich S_μ^ν, so heisst die Doppelfolge $\{S_\mu^\nu\}$ die Doppelfolge der Partialsummen der Doppelreihe. Ist $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} S_\mu^\nu = s$, so heisst die Doppelreihe convergent und s die Summe der Doppelreihe.

Die Glieder einer Doppelreihe kann man so anordnen, dass sie eine einfache Reihe bilden; dabei ist entweder jedes Glied der einfachen Reihe mit einem Glied der Doppelreihe identisch, oder jedes Glied der einfachen Reihe ist eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der Doppelreihe. Alle so entstehenden Reihen heissen die aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen.

Wenn alle aus einer Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen convergiren, so muss die Doppelreihe absolut convergiren und umgekehrt.

Das System

$$\begin{array}{llll} u_0^0 & u_1^0 & \cdots & u_\mu^0 \\ u_0^1 & u_1^1 & \cdots & u_\mu^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_0^\nu & u_1^\nu & \cdots & u_\mu^\nu \end{array}$$

heisst das Rechteck $[u_\mu^\nu]$.

Bildet man für $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3, \ldots, \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3, \ldots$

$$\sum_0^{\nu_2}{}^{\nu} \sum_0^{\mu_2}{}^{\mu} u_\mu^\nu - \sum_0^{\nu_1}{}^{\nu} \sum_0^{\mu_1}{}^{\mu} u_\mu^\nu = S_{\mu_2}^{\nu_2} - S_{\mu_1}^{\nu_1},$$

$$\sum_0^{\nu_3}{}^{\nu} \sum_0^{\mu_3}{}^{\mu} u_\mu^\nu - \sum_0^{\nu_2}{}^{\mu} \sum_0^{\mu_2}{}^{\mu} u_\mu^\nu = S_{\mu_3}^{\nu_3} - S_{\mu_2}^{\nu_2},$$

so erhält man die aus der Doppelreihe hervorgehende einfache Reihe

$$S_{\mu_1}^{\nu_1} + (S_{\mu_2}^{\nu_2} - S_{\mu_1}^{\nu_1}) + (S_{\mu_3}^{\nu_3} - S_{\mu_2}^{\nu_2}) + (S_{\mu_4}^{\nu_4} - S_{\mu_3}^{\nu_3}) + \cdots.$$

Die durch die Partialsummen $S_{\mu_1}^{\nu_1}, S_{\mu_2}^{\nu_2}, S_{\mu_3}^{\nu_3}, \ldots$ gebildete Reihe heisst eine Rechteckanordnung der Doppelreihe.

Zur Convergenz einer Doppelreihe ist notwendig und hinreichend, dass sämtliche aus ihr mittels Rechteckanordnung hervorgehenden einfachen Reihen convergiren.

Ein System convergenter Reihen ist dann und nur dann das System der Zeilen einer convergenten Doppelreihe, wenn erstens die von den Summen der Reihen gebildete Reihe convergirt, und wenn zweitens die aus den Reihen des Systems durch successive Summation gebildeten Reihen zu ihren Summen gleichmässig convergiren.

Wenn in einer Doppelreihe alle Zeilen und Colonnen convergiren und die dann ebenfalls stattfindende Convergenz der durch successive Summation der Zeilen (Colonnen) gebildeten Reihen eine gleichmässige ist, so ist die Doppelreihe convergent, und es ist

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^\nu \right) = \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\mu^\nu \right) = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^\nu.$$

Die Gesamtheit derjenigen Elemente u_μ^ν, welche sich in dem von der horizontalen Anfangsfolge $\{u_0^0, u_1^0, u_2^0, \ldots\}$ und einer einfachen Folge $\{u_{m_0}^0, u_{m_1}^1, u_{m_2}^2, \ldots\}$ begrenzten Teil befinden, heisst der horizontale Teil des Systems $\{u_\mu^\nu\}$; es sind die Zahlen $u_{m_\nu+\mu}^\nu$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Aehnlich wird der verticale Teil V erklärt.

Eine Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu\nu} u_\mu^\nu$ heisst horizontal convergent, wenn die zugehörige Doppelfolge der Partialsummen $\{s_\mu^\nu\}$ horizontal convergirt.

Entsprechend wird die verticale Convergenz einer Doppelreihe definirt. Eine Doppelreihe heisst lateral convergent, wenn die Doppelfolge ihrer Partialsummen lateral convergirt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in einer Doppelreihe mit convergenten Zeilen und Colonnen die Reihen der Zeilen-Summen und Colonnen-Summen convergiren und dieselbe Summe liefern, besteht in der lateralen Convergenz der Doppelreihe. Wz.

A. Pringsheim. Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen.
Math. Ann. 53, 289-321.

Eine zweifach unendliche Folge reeller Zahlen a_μ^ν ($\mu=0,1,2,\ldots$; $\nu=0,1,2,\ldots$) wird eine Doppelfolge genannt. Sie heisst convergent und besitzt den endlichen Grenzwert A $\left(\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^\nu = A\right)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, so dass $|a_\mu^\nu - A| \leqq \varepsilon$ für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$ ist; sie heisst eigentlich divergent, ihr Grenzwert $+\infty$ (bezw. $-\infty$) $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^\nu = +\infty$ (bezw. $-\infty$), wenn zu jedem $G > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, so dass $a_\mu^\nu > G$, bezw. $< -G$ für $\mu \gtreqqless n_1$, $\nu \gtreqqless n_2$. In beiden Fällen „existirt der Limes der Doppelfolge oder der Doppellimes a_μ^ν."

Die Doppelfolge a_μ^ν heisst monoton, und zwar niemals ab-, bezw. niemals zunehmend, wenn durchweg

$$a_{\mu+\varrho}^{\nu+\sigma} - a_\mu^\nu \geqq 0, \text{ bezw. } a_{\mu+\varrho}^{\nu+\sigma} - a_\mu^\nu \leqq 0$$

($\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots$) ist.

Bleiben die $|a_\mu^\nu|$ unter einer Zahl g, so ist die monotone Doppelfolge $|a_\mu^\nu|$ allemal convergent.

Eine monotone Doppelfolge a_μ^ν ist convergent oder eigentlich divergent, je nachdem $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^\nu$ endlich oder unendlich ist, und es ist

$$\lim_{\mu,\,\nu=\infty} a_\mu^\nu = \lim_{\nu=\infty} a_\nu^\nu.$$

Jede Doppelfolge, die weder convergent noch eigentlich divergent ist, wird als uneigentlich divergent bezeichnet.

Die Gesamtheit der in der Doppelfolge a_μ^ν enthaltenen Terme wird durch $[a_\mu^\nu]_0^0$ bezeichnet; ebenso bezeichnet $[a_\mu^\nu]_m^n$ die Gesamtheit derjenigen Terme, welche nach Weglassung der ersten m Colonnen und n Zeilen übrig bleiben. Die Terme $[a_\mu^\nu]_m^n$ besitzen allemal eine untere Grenze $\underline{A}_m^n$ und eine obere $\bar{A}_m^n$, welche auch $-\infty$, bezw. $+\infty$ sein können. Dann ist $\lim\limits_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^\nu = \underline{A}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} \bar{A}_\nu^\nu = \bar{A}$, $\underline{A} \leqq \bar{A}$, wo $\underline{A}$, $\bar{A}$ auch $-\infty$ oder $+\infty$ sein können. $\underline{A}$, $\bar{A}$ heissen die Haupt-Limites (Unbestimmtheitsgrenzen) der Doppelfolge a_μ^ν, und zwar $\underline{A}$ der untere, $\bar{A}$ der obere Doppellimes: $\underline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}} a_\mu^\nu = \underline{A}$, $\overline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}} a_\mu^\nu = \bar{A}$, und es ist $\underline{A} - \varepsilon \leqq a_\mu^\nu \leqq \bar{A} + \varepsilon$ für $\left.\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\right\} \geqq n$, d. h.:

Bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ und hinlänglich grossem n gehören alle Terme der Doppelfolge $[a_\mu^\nu]_n^n$ dem Zahlenintervall $(\underline{A} - \varepsilon, \bar{A} + \varepsilon)$ an.

Zu jedem beliebig klein vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ giebt es unendlich viele, jede beliebig gross vorgeschriebene Zahl übersteigende Zahlenpaare μ, ν, so dass $\underline{A} - \varepsilon < a_\mu^\nu < \underline{A} + \varepsilon$, bezw. $\bar{A} - \varepsilon < a_\mu^\nu < \bar{A} + \varepsilon$ ist.

Insbesondere existiren zu jeder positiven nach Null convergirenden Zahlenfolge ε_ν monoton ins Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen m_ν, n_ν, bezw. p_ν, q_ν, so dass

$$\underline{A} - \varepsilon_\nu < a^{n_\nu}_{m_\nu} < \underline{A} + \varepsilon_\nu, \text{ bezw. } \bar{A} - \varepsilon_\nu < a^{q_\nu}_{p_\nu} < \bar{A} + \varepsilon_\nu.$$

Bedeutet μ, ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ je eine Folge natürlicher monoton ins Unendliche wachsender Zahlen, so soll die aus der Doppelfolge herausgehobene einfache Folge $(a^{n_\nu}_{m_\nu})$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine echte Teilfolge der ersteren heissen.

Ist $\underline{\lim}_{\mu, \nu = \infty} a^\nu_\mu = \underline{A}$, $\overline{\lim}_{\mu, \nu = \infty} a^\nu_\mu = \bar{A}$, so existiren echte Teilfolgen mit den Grenzwerten $\underline{A}$ und $\bar{A}$; dagegen giebt es keine echte Teilfolge, welche einen kleineren Grenzwert als $\underline{A}$ oder einen grösseren als $\bar{A}$ besitzt.

Wenn jede echte Teilfolge convergirt, bezw. eigentlich divergirt, so gilt dasselbe von der Doppelfolge selbst.

Die Terme a^ν_μ jeder einzelnen Zeile (also ν beliebig, aber constant, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$) besitzen stets einen unteren und oberen Limes $\underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu = \underline{a}^\nu$, bezw. $\pm \infty$, $\overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu = \bar{a}^\nu$, bezw. $\pm \infty$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Beide können zusammenfallen $\underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu = \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu = a^\nu$, bezw. $= \pm \infty$, und die betreffende Zeile ist convergent, bezw. eigentlich divergent.

Zu jeder der beiden Folgen $\underline{\lim}_{\mu = \infty} a^0_\mu$, $\underline{\lim}_{\mu = \infty} a^1_\mu, \ldots$, $\underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \ldots$ und $\overline{\lim}_{\mu = \infty} a^0_\mu$, $\overline{\lim}_{\mu = \infty} a'_\mu, \ldots$, $\overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \ldots$ gehört ein unterer und oberer Limes

$$\underline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \quad \overline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \quad \underline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \quad \overline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu.$$

Die beiden äusseren dieser vier Zahlen heissen der iterirte untere, bezw. obere Zeilen-Limes, und es ist:

$$\underline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu \leqq \overline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu \leqq \overline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu,$$

$$\underline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu \leqq \underline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu \leqq \overline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu.$$

Man kann aus der Doppelfolge (a^ν_μ) stets echte Teilfolgen $(a^{n_\nu}_{m_\nu})$, $(a^{q_\nu}_{p_\nu})$ so herausheben, dass

$$\lim_{\nu = \infty} a^{n_\nu}_{m_\nu} = \underline{\lim}_{\nu = \infty} \underline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu, \quad \lim_{\nu = \infty} a^{q_\nu}_{p_\nu} = \overline{\lim}_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a^\nu_\mu.$$

Wenn jede Zeile convergirt: $\lim_{\mu = \infty} a^\nu_\mu = a^\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so heisst dies: zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne ν existiren

Zahlen m_ν und somit eine kleinste Zahl m'_ν, so dass $|a^\nu_\mu - a^\nu| \leqq \varepsilon$, wenn $\mu \geqq m'_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Die m'_ν sind mit ν im allgemeinen veränderlich und können (sämtlich oder teilweise) zugleich mit ν über alle Grenzen wachsen, ebenso die $|a^\nu|$. In beiden Fällen heissen die Zeilen ungleichmässig convergent. Sie heissen dagegen gleichmässig convergent, wenn für die m'_ν ein bestimmtes endliches Maximum m und für die $|a^\nu|$ eine endliche Schranke g existirt.

Sind alle Zeilen eigentlich divergent, so ist also $\lim\limits_{\mu=\infty} a^\nu_\mu = +\infty$, bezw. $-\infty$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, d. h. zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ und für jedes einzelne ν existiren Zahlen m_ν und eine kleinste Zahl m'_ν, so dass $a'_\mu > G$, bezw. $< -G$, wenn $\mu \geqq m'_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Haben dann die m'_ν ein bestimmtes endliches Maximum m, so dass $a^\nu_\mu > G$, bezw. $< -G$, wenn $\mu \geqq m$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so heissen die Zeilen gleichmässig divergent; sie heissen ungleichmässig divergent, wenn ein solches Maximum nicht vorhanden ist, so dass die m'_ν gleichzeitig mit ν sämtlich oder teilweise ins Unendliche wachsen.

Wenn die Limites der Zeilen (nach Ausschluss einer endlichen Zahl) unter einer festen Schranke bleiben: $\underline{\lim}\, a^\nu_\mu = \underline{a}^\nu$, $\overline{\lim}\, a^\nu_\mu = \bar{a}^\nu$, wo $\left.\begin{matrix}|\underline{a}^\nu| \\ |\bar{a}^\nu|\end{matrix}\right\} < g$ für $\nu \geqq n$, so existirt zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste Zahl m'_ν, so dass $\underline{a}^\nu - \varepsilon \leqq a^\nu_\mu \leqq \bar{a}^\nu + \varepsilon$ für $\mu \geqq m'_\nu$, $\nu \geqq n$. Haben dann die m'_ν ein endliches Maximum m, so dass $\underline{a}^\nu - \varepsilon \leqq a^\nu_\mu \leqq \bar{a}^\nu + \varepsilon$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ $\left.\begin{matrix}|\underline{a}^\nu| \\ |\bar{a}^\nu|\end{matrix}\right\} < g$, so sollen die Zeilen für $\nu \geqq n$ gleichmässig begrenzt heissen, dagegen ungleichmässig begrenzt, wenn eine solche Zahl m nicht existirt, oder wenn die $|\underline{a}^\nu|$ und $|\bar{a}^\nu|$ nicht unter einer endlichen Schranke bleiben.

Bestehen die fraglichen Bedingungen nur für einen der beiden Limites, d. h. hat man nur $\bar{a}^\nu - \varepsilon \leqq a^\nu_\mu$ für $\mu \geqq n$, $\nu \geqq n$, $|\underline{a}^\nu| < g$ oder $\bar{a}^\nu + \varepsilon \geqq a^\nu_\mu$ für $\mu \geqq n$, $\nu \geqq n$, $|\bar{a}^\nu| < g$, so heisst die Begrenzung der Zahlen einseitig gleichmässig.

Ist $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a^\nu_\mu = +\infty$, bezw. $-\infty$, so existirt für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste Zahl m'_ν, so dass $a^\nu_\mu > G$, bezw. $< -G$ für $\mu \geqq m'_\nu$, $\nu \geqq n$. Ist dann für die m'_ν ein endliches Maximum m vorhanden, so dass $a^\nu_\mu > G$, bezw. $< -G$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$, so heissen die Zeilen der Doppelfolge gleichmässig unbegrenzt.

Der iterirte untere, bezw. obere Limes ist niemals kleiner, bezw. grösser als der entsprechende Doppel-Limes, d. h. es ist stets

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a^\nu_\mu \left\{\begin{matrix} \leqq \underline{\lim}\limits_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a^\nu_\mu \leqq \overline{\lim}\limits_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a^\nu_\mu \\ \leqq \underline{\lim}\limits_{\mu=\infty}\ \underline{\lim}\limits_{\nu=\infty} a^\nu_\mu \leqq \overline{\lim}\limits_{\mu=\infty}\ \overline{\lim}\limits_{\nu=\infty} a^\nu_\mu \end{matrix}\right\} \leqq \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a^\nu_\mu.$$

Es ist stets

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu \end{array}\right\} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu,$$

sobald der letzte Grenzwert existirt.

Sind die Zeilen (Colonnen) der Doppelfolge nach eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt oder unbegrenzt, im Falle $\overline{\lim}\ \overline{\lim}\, a_\mu^\nu = +\infty$ oder $\underline{\lim}\ \underline{\lim}\, a_\mu^\nu = -\infty$ wenigstens einseitig gleichmässig begrenzt, so ist

$$\underline{\lim}_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^\nu = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu, \quad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu,$$

bezw.

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty}\ \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu, \quad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu.$$

Für die Convergenz der Doppelfolge a_μ^ν ist notwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt sind, und dass $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu$, bezw. $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu$ existirt. Ist diese Bedingung für die Zeilen und $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu$ erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen und $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu$, vice versa, und man hat dann allemal

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu = \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu.$$

Für die eigentliche Divergenz der Doppelfolge ist notwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig unbegrenzt sind. Ist diese Bedingung für die Zeilen erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen, vice versa, und man hat dann allemal

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^\nu = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^\nu = \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^\nu = +\infty, \text{ bezw. } -\infty.$$

Wz.

A. Pringsheim. Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. Münch. Ber. **30**, 37-100.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ $(a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i)$ habe den Convergenzradius $|x| = 1$; ist dann Σa_ν convergent, und bedeutet ϱ eine reelle positive Zahl < 1, so ist nach dem Abel'schen Grenzwertsatz $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$; dann ist auch $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu X^\nu$, falls X eine

beliebige Stelle auf dem Convergenzkreise bedeutet, für welche $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu X^\nu$ convergirt.

Wenn Σa_ν eigentlich divergirt (d. h. wenn mindestens eine der beiden Reihen $\Sigma\alpha_\nu, \Sigma\beta_\nu$ eigentlich, d. h. nach $+\infty$ oder nach $-\infty$ divergirt), so ist $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty$. Ist $\Sigma a_\nu X^\nu$ eigentlich divergent, so ist $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$.

Besitzt für irgend eine Stelle X auf dem Convergenzkreise $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen bestimmten Wert, so kann $\Sigma a_\nu X^\nu$ nur convergiren oder uneigentlich divergiren.

Besitzt $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ für irgend eine Stelle $e^{\vartheta i}$ einen bestimmten Wert, und sind (zum mindesten für $\nu \geqq n$) die Terme $a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta$ unter sich, ebenso die Terme $a_\nu \sin\nu\vartheta + \beta_\nu \cos\nu\vartheta$ unter sich gleichbezeichnet (d. h. liegen die Punkte $a_\nu X^\nu$ im Innern oder auf der Begrenzung eines durch irgend zwei vom Nullpunkte ausgehende Strahlen gebildeten rechten Winkels), so ist $\Sigma a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ convergent.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ besteht in den beiden Beziehungen:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = A$$

(d. h. gleich einer bestimmten Zahl) und

$$\lim_{n=\infty} \frac{s'_n}{n} = 0, \text{ wo } s'_n = 1 \cdot a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n.$$

Ist $\lim n \cdot a_n = 0$, so convergirt $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ für jede Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen endlichen Wert besitzt.

Die durch $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < 1$ definirte eindeutige Function von x sei $f(x)$; für die Stellen $X = e^{\vartheta i}$ auf dem Convergenzkreise von $\mathfrak{P}(x)$ sei $f(x)$ durch $f(X) = \lim\limits_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ erklärt, wo ϱ eine reelle positive Zahl kleiner als 1 bedeutet. Für eine solche Stelle X, für welche ein (endlicher oder unendlich grosser) $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ nicht existirt, soll $f(X)$ als undefinirt gelten. Die auf diese Weise für alle Stellen $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme etwaiger Stellen der letztgenannten Art eindeutig definirte Function $f(x)$ soll schlechthin die zur Reihe $\mathfrak{P}(x)$ zugehörige Function und speciell $f(X)$ die zugehörige Randfunction heissen.

Die Uebereinstimmung von $\Sigma a^\nu X^\nu$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(X)$ hängt davon ab, dass die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a^\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_\varrho)} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \qquad (|x| < \varrho),$$

wo C_ϱ einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius ϱ bedeutet, noch richtig bleibt, wenn man diesen Integrationskreis durch den Einheitskreis C_1 ersetzt.

Besitzt die zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige Function $f(x)$ eine in der Umgebung der Convergenzkreisstellen noch im allgemeinen stetige Derivirte, deren Quadrat höchstens für eine reductible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der ersten unendlich wird, so ist $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem Convergenzkreise absolut convergent.

Für die Convergenz der Reihe Σa_ν, wo $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} / \sqrt{\nu}\, m_\nu$, ist notwendig, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$, hinreichend, dass die m_ν monoton zunehmen und $\Sigma \dfrac{1}{\nu\, m_\nu}$ convergirt.

Die Reihe $\Sigma\, a_\nu\, X^\nu$, wo $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\nu}\, m_\nu}$, ist für $|X| = 1$ ausnahmslos convergent, wenn die m_ν monoton in dem Masse zunehmen, dass $\Sigma \dfrac{1}{\nu m_\nu}$ convergirt. Sie convergirt also nur bedingt, wenn andererseits die m_ν so angenommen werden, dass $\Sigma \dfrac{1}{\sqrt{\nu}\, m_\nu}$ divergirt.

Es giebt Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ mit dem Convergenzradius 1, welche für $|x| = 1$ ausnahmslos bedingt convergiren, während $k = 2$ der kleinste Exponent ist, für welchen $\Sigma |a_\nu|^k$ (also $\Sigma a_\nu^k X^\nu$ absolut) convergirt.

Es sei

$$f(\varrho e^{\vartheta i}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\, \varrho^\nu\, e^{\nu \vartheta i} \ \ (\text{für } \ \varrho < 1) = \varphi(\varrho, \vartheta) + i\,\psi(\varrho, \vartheta),$$

wo gesetzt ist:

$$\varphi(\varrho, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)\, \varrho^\nu,$$

$$\psi(\varrho, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta)\, \varrho^\nu.$$

Für die Randwerte $e^{\vartheta i}$ ergiebt sich dann $f(e^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta) + i\,\psi(\vartheta)$, wenn $\varphi(\vartheta) = \lim\limits_{\varrho=1} \varphi(\varrho, \vartheta)$, $\psi(\vartheta) = \lim\limits_{\varrho=1} \psi(\varrho, \vartheta)$ ist.

Es ist

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)\} \cot\frac{\alpha}{2} (1 - \cos n\alpha)\, d\alpha,$$

sobald dieser Grenzwert existirt; d. h. die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)$$

ist convergent oder eigentlich divergent, je nachdem der obige Grenzwert endlich oder unendlich gross ausfällt. Notwendig und hinreichend für die Convergenz ist, dass

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha} (1 - \cos n\alpha)\, d\alpha$$

gleichzeitig mit ε gegen Null convergirt. Besitzen die beiden Bestandteile dieses Ausdrucks, nämlich

$$\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

und

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha} \cos n\alpha\, d\alpha$$

diese Eigenschaft, so wird

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)\} \cot\frac{\alpha}{2}\, d\alpha.$$

Die Reihe $\varphi(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)$ ist eigentlich divergent, wenn $\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)$ für $\alpha < \varepsilon$ constantes Vorzeichen besitzt und für $\lim \alpha = 0$ nicht stärker gegen Null convergirt als $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ bei beliebig grossem k.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Uebergange zur Convergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmässig integrabler Randfunction $f(e^{\vartheta i})$ ist eigentlich divergent an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

Die Summe einer für irgend ein zusammenhängendes Bogenstück ihres Convergenzkreises convergirenden Potenzreihe kann nie Sprünge erleiden; dagegen sind sprunglose Unstetigkeiten nicht ausgeschlossen.

Die Reihe $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ convergirt an jeder Stelle ϑ, für welche der reelle oder imaginäre Teil von $f(e^{\vartheta i})$ stetig ist und ein der Bedingung

$$|\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \leqq \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \qquad (\varrho > 0)$$

genügendes (rechtes und linkes) Stetigkeitsmass besitzt. Wz.

É. Le Roy. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Toulouse Ann. (2) 2, 317-430.

I. Es handelt sich um die analytische Fortsetzung einer durch eine

Taylor'sche Reihe definirten analytischen Function. Wenn eine Potenzreihe, welche einen Convergenzkreis besitzt, eine Function von einer wohl definirten Eigentümlichkeit darstellt und die Möglichkeit giebt, nach und nach alle Werte der Function zu berechnen, so sollen Merkmale gefunden werden, nach denen aus der Reihe selbst die Stetigkeitseigenschaften der Function abgelesen werden können.

II. Um die Werte einer durch ihre Taylor'sche Reihe gegebenen Function für alle Punkte, in welchen sie regulär ist, zu berechnen, werden die folgenden Sätze abgeleitet:

Ist T ein beliebiger endlicher Bereich, dessen Grenze in endlicher Entfernung von der vom Punkte $z=1$ bis $z=\infty$ längs der reellen Axe führenden Geraden bleibt, und bezeichnet t einen reellen Parameter, der kleiner als 1 ist, so convergirt der Ausdruck $\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n$ gleichmässig gegen $\frac{1}{1-z}$, wenn t gegen 1 convergirt und z in T bleibt. — Ist eine in der Umgebung des Ursprungs holomorphe Function $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ gegeben, so convergirt der Ausdruck $\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} a_n z^n$ gleichmässig gegen $f(z)$, wenn t durch reelle Werte, welche kleiner als 1 sind, gegen 1 convergirt und z in T bleibt.

Die Function $f(z)$ kann innerhalb T mit beliebiger Annäherung durch ein Polynom dargestellt werden.

Die Reihe 1) $\sum_0^\infty a_n$ hat einen endlichen Modul, wenn die associirte Reihe 2) $\sum_0^\infty a_n z^n$ einen begrenzten Convergenzkreis hat. Dann ist die Hülfsreihe 3) $\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} a_n \; (0<t<1)$ convergent. Ist L der Wert, gegen den diese Hülfsreihe convergirt, so heisst die Reihe 1) summirbar und L ihre Summe.

Wenn die Grössen a_n von einer Veränderlichen u abhängen, heisst 1) gleichmässig summirbar in einem Bereiche T, wenn die Reihe 3) gleichmässig gegen eine Grenze convergirt, sobald t gegen 1 convergirt und u in T sich befindet.

Eine Potenzreihe von endlichem Modul ist summirbar im natürlichen Existenzbereich der durch sie in der Umgebung des Ursprungs definirten Function $f(z)$.

III. Die analytische Fortsetzung einer Taylor'schen Reihe wird in der Weise hergestellt, dass aus der gegebenen Reihe ein anderer Ausdruck (ein bestimmtes Integral) abgeleitet wird, welches in der grösstmöglichen Ausdehnung convergent ist und in der Umgebung des Ursprungs dieselben Werte annimmt wie die ursprüngliche Reihe.

Es sei $f(z)$ die durch die Reihe $\sum_0^\infty a_n z^n$ mit dem Convergenzradius 1

definirte Function; gelingt es, eine Function $\varphi(x)$ zu bestimmen, so dass für alle positiven ganzzahligen Werte von n $\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx$ ist, so ist die analytische Fortsetzung $f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1-zx}\, dx$.

Oder man ordne der gegebenen Taylor'schen Reihe das Integral

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, F(zx)\, dx$$

zu, wo $F(t)$ eine analytische, im Nullpunkte holomorphe Function von t bedeutet, deren Singularitäten $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_p$ sind. Ist $F(t)$ nicht eindeutig, so wird es eindeutig gemacht durch gerade, von den $t_0, \ldots, t_p$ ins Unendliche gehende Unstetigkeitslinien, deren Verlängerungen durch den Nullpunkt gehen. Das Integral ist in jedem Punkte, welcher nicht auf diesen Unstetigkeitslinien liegt, holomorph. $\varphi(x)$ sei eine analytische Function mit den isolirten singulären Punkten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p$ (ist $\varphi(x)$ nicht eindeutig, so wird es in derselben Weise eindeutig gemacht); dann ist $f(z)$ in jedem Punkte mit Ausnahme der Punkte t_p und $\frac{t_p}{x_p}$ holomorph. Aber die letzteren Punkte und der Nullpunkt sind für den Hauptzweig von $f(z)$ regulär und nur für die anderen Zweige singulär. Der Punkt ∞ ist im allgemeinen für alle Zweige ein singulärer Punkt.

IV. Ist $\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^p}$, wo der reelle Teil von p positiv ist, so ergiebt sich auf Grund der bekannten Formel

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1} x^{n-1}\, dx$$

die in der ganzen Ebene geltende Darstellung

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{dx}{1-zx}.$$

$\varphi(z)$ ist nicht eindeutig; ist $[\varphi(z)]$ der Hauptwert, d. h. derjenige, welcher in der Umgebung des Nullpunktes durch eine Potenzreihe dargestellt wird, und ist L der Zweig des Logarithmus, welcher sich für reelle und positive Werte auf den arithmetischen Wert reducirt, dann ist der allgemeine Ausdruck von $\varphi(z)$ gleich

$$[\varphi(z)] + \frac{2k\pi i}{\Gamma(p)}(Lz + 2h\pi i)^{p-1},$$

wenn man einen k-maligen Umlauf um den Punkt $z=1$ und einen h-maligen um den Punkt $z=0$ zurücklegt.

Es werden einige einfache Fälle behandelt, in denen α_n eine analytische Function von n ist.

Es sei $\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{n^p}$. Die Reihe ist convergent, wenn n eine gewisse Grenze überschreitet; es sei $|\lambda_p| < \lambda^p$, wo λ eine passend gewählte positive Constante bedeutet. Dann ist

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^{n-1}\, dx + \lambda_0, \quad \varphi(x) = \sum_1^\infty \frac{\lambda_p \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

und

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \sum_0^{n_0} \alpha_n z^n + z \int_0^1 \varphi(x) \frac{{}^{n_0} x^{n_0}}{1 - z^x}\, dx.$$

$f(z)$ ist eine nicht eindeutige, in jedem Punkte der Ebene mit Ausnahme von $z = 1$ und $z = \infty$ holomorphe Function, deren Eigenschaften aus dem vorstehenden Ausdrucke abgeleitet werden können.

Auch die Fälle, dass α_x gleich $\Sigma\Sigma \frac{\lambda_{pq}}{(n + a_p)^{\gamma_q}}$ oder $\Sigma \frac{\lambda_p}{n^2 + \mu_p^2}$ oder gleich der logarithmischen Ableitung einer ganzen Function endlichen Geschlechts ist, lassen sich behandeln.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Taylor'sche Reihe $\Sigma \alpha_n z^n$ eine in der ganzen Ebene eindeutige Function darstellt, welche nur eine begrenzte Zahl von singulären Punkten $\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_p}$ besitzt, besteht darin, dass $\alpha_n = a_n + \sum_0^\infty b_{ni} \lambda_i^n$ gesetzt werden kann und die Grössen $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, $|\Delta^n b_{0i}|^{\frac{1}{n}}$ für ein unendlich grosses n gegen Null convergiren.

Ist $\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p$, wo $\sum_0^\infty \lambda_p a^p$ eine ganze Function von a bedeutet, so definirt $\Sigma \alpha_n z^n$ eine eindeutige Function $f(z)$, welche im Endlichen nur den singulären Punkt $z = 1$ hat, im Unendlichen aber regulär ist. Beispiele: $\alpha_n = \frac{1}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) J_0 (2i\sqrt{n})$, wo J_0 eine Bessel'sche und g eine holomorphe Function bezeichnet und $\alpha_n = e^{\sqrt[3]{n}}$.

Es sei $\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p$; die Reihe $\sum_0^\infty \lambda_p a^p$ habe einen bestimmten Convergenzkreis, und a sei so gewählt, dass

$$\varphi(\Theta) = \tfrac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_p a^p \cos p\Theta$$

convergent ist. Setzt man dann:

$$e^{\frac{a}{n}\cos\Theta}\cos\left(\frac{n}{a}\sin\Theta\right)=\sum_0^\infty\frac{1}{p!}\frac{n^p}{a^p}\cos p\,\Theta,$$

so wird

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(\Theta)\,e^{\frac{n}{a}\cos\Theta}\cos\left(\frac{n}{a}\sin\Theta\right)d\Theta,$$

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(\Theta)\frac{1-ze^{\frac{\cos\Theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\Theta}{a}\right)}{1-2ze^{\frac{\cos\Theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\Theta}{a}\right)+z^2e^{\frac{2\cos\Theta}{a}}}\,d\Theta,$$

und $f(z)$ ist eindeutig und holomorph in demjenigen Teile der Ebene, welcher auf derselben Seite von einer gewissen Curve liegt wie der Nullpunkt.

Ist $a_n=\sum\limits_0^\infty\lambda_p\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ eine analytische Function, die für alle Werte von n, deren reeller Teil grösser als $-\frac{1}{2}$ ist, holomorph ist, und ist $\sum\limits_0^\infty\lambda_p$ entweder absolut convergent oder wenigstens summirbar im Borel'schen Sinne, so ist die analytische Fortsetzung der durch $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ definirten Function von der Form

$$f(z)=a_0+\frac{\lambda_0 z}{1-z}+\int_0^\infty e^{-x}\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}}z^n\sum_0^\infty\frac{\lambda_{p+1}\,x^p}{p!}\,dx;$$

$f(z)$ ist demnach eine analytische Function, welche in der ganzen Ebene holomorph ist; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, die grösser als 1 sind.

Die allgemeine Methode ist folgende: Es sei die Reihe $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ in der Umgebung des Nullpunktes convergent, $a(t)=\sum\limits_0^\infty\lambda_p t^p$ eine für kleine Werte von t holomorphe Function, deren singuläre Punkte sämtlich auf der linken Seite der imaginären Axe der Ebene t liegen. Es wird $a_n=a(n)$ gesetzt und die auf der Borel'schen Methode der Summation der divergenten Reihen beruhende Formel

$$a_n=\int_0^\infty e^{-a}G(an)\,da\quad\text{mit}\quad G(an)=\sum_0^\infty\frac{\lambda_p\,a^p\,n^p}{p!}$$

genommen, welche für alle Werte von n, deren reeller Teil grösser als -1 ist, in einem Bereiche gilt, welcher die positive reelle Axe der Ebene n enthält; a ist ein positiver Parameter. Setzt man

$$\varphi(z, a) = \sum_0^\infty G(an) z^n,$$

so wird

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a} \varphi(a, z)\, da, \quad G(an) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{1}{x} \alpha\left(\frac{1}{x}\right) e^{nax}\, dx,$$

wo C eine geschlossene Curve bedeutet, in deren Innerem der Nullpunkt und die singulären Punkte von $\alpha\left(\frac{1}{x}\right)$ liegen; es wird

$$\varphi(z, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{1}{x} \alpha\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1 - z e^{ax}}.$$

Die Unstetigkeitslinie ergiebt sich aus der Curve C durch die Formel $z = e^{-ax}$, und es muss der Punkt z auf derselben Seite dieser Unstetigkeitslinie liegen wie der Nullpunkt. (Der Fall, dass $t = -1$ die einzige Singularität von $\alpha(t)$ ist, wird besonders behandelt.) Es ergiebt sich der folgende Satz:

Die Function $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ ist holomorph in der ganzen Ebene; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, welche grösser als 1 sind, falls für $n = \varrho e^{i\omega}$ der allgemeine Coefficient α_n eine analytische und für $\varrho > \varrho_0$ und $|\omega| < \omega_0$ holomorphe Function von n ist (ϱ_0 und ω_0 sind zwei beliebige positive Zahlen), und falls die Grösse $\frac{L|\alpha_n|}{\varrho}$ zur oberen Grenze 0 hat, wenn ϱ unendlich wird, während $|\omega| < \omega_0$ bleibt.

Ist das Verhältnis $\alpha_{n+1} : \alpha^n$ in eine Reihe $1 + \sum\limits_1^\infty (\lambda_p : n^p)$ entwickelbar, welche für hinreichend grosse Werte des Moduls von n convergirt, so ist die durch die Reihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ definirte analytische Function holomorph in der ganzen Ebene; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, welche grösser als 1 sind.

V. In derselben Weise wie in IV lassen sich andere Reihen behandeln, z. B. $\sum\limits_0^\infty z^n \Delta^n \alpha_0$, wo $\Delta^n \alpha_0 = \int_0^1 \varphi(x)(x-1)^n dx$ ist; $\sum\limits_0^\infty X_n[(\alpha)] z^n$, wo $X_n[(\alpha)]$ das Resultat der Substitution von α_p für x^p in das Legendre'sche Polynom $X_n(x)$ bedeutet; $\sum\limits_0^\infty \beta_n z^n$, wo $\beta_n = \sum\limits_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} \alpha_n^p$ ist, λ_p eine Constante und α_n^p die $p$te Ableitung von α_n nach n bedeutet; $\sum\limits_0^\infty P(a_n, b_n, \ldots, l_n) z^n$, wo P ein Polynom, $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, $\sum\limits_0^\infty b_n z^n, \ldots, \sum\limits_0^\infty l_n z^n$ Reihen

bedeuten, welche nach der in IV gegebenen Methode behandelt werden können.

VI. Auf Grund der Eigenschaften der durch die Gleichungen

$$D_n = \frac{d^n(x\ e^{-x})}{dx^n} = (-1)^n e^{-x} P_n(x),$$

$$P_n(x) = x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3} x^{n-3} + \cdots + (-1)^n n!$$

definirten Function $P_n(x)$, namentlich der Darstellung

$$D_n = \int_0^\infty e^{-y} y^n J_0(2\sqrt{xy})\, dy = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^p}{(p!)^2} \Gamma(n+p+1),$$

wo $J_0(2\sqrt{t}) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p t^p}{(p!)^2}$ ist, wird das Stieltjes'sche Problem der Momente: „Wenn n Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gegeben sind, so soll eine im Intervall $(0, +\infty)$ integrirbare Function $\varphi(x)$ bestimmt werden, so dass $\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n\, dx$ ist“, formell gelöst in der Form:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\alpha_n}{(n!)^2} y^n\, dy.$$

Die Lösung wird discutirt, und es ergiebt sich:

Das Problem der Momente ist durch die in IV entwickelte Methode gelöst für die Zahlen 1) $\alpha_n = n!\, G(n)$; 2) $\alpha_n = n!\, G(n) \int_0^1 f(t) t^n dt$, wo G_n eine ganze Function bedeutet, deren Ordnung kleiner als 1 ist; 3) $\alpha = n!\, a_n$, wo a_n der allgemeine Coefficient einer Taylor'schen Entwickelung ist, welche nach der in IV gegebenen Methode behandelt werden kann.

VII. Unter den Anwendungen ist hervorzuheben die Feststellung, inwiefern $\sum_0^\infty \alpha_n \cos nz$, wo $\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx$ ist, eine analytische Function ist.

VIII. Für die divergenten Reihen ordnet der Verf. der divergenten numerischen Reihe $\sum_0^\infty a_n$ die Potenzreihe $\sum_0^\infty a_n z^n$ zu. Wenn dann die hierdurch definirte Function $f(z)$ in der ganzen Ebene (mit Ausnahme der vereinzelt liegenden singulären Punkte) holomorph ist, so nennt er die numerische Reihe summirbar und $f(1)$ ihre Summe. Ist $\sum_0^\infty (a_n - a_{n-1})$ summirbar, so heisst die Summe die verallgemeinerte Grenze von a_n.

Die Summe einer summirbaren numerischen Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n$ ist der Grenzwert, welchen der Ausdruck $\sum\limits_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} a_n$ annimmt, wenn t durch reelle Werte bis 1 wächst.

Ist a_n eine analytische Function einer complexen Veränderlichen u, die holomorph ist, wenn n beliebig ist und u in einem Bereiche T sich befindet, so convergirt dieser Ausdruck gleichmässig gegen eine in T holomorphe analytische Function von u.

Beispiel: $\sum\limits_0^\infty a_n e^{inu}$.

Ist die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ nur für $z = 0$ convergent, und kann a_n auf die Form $a_n \int\limits_0^\infty \varphi(x) x^n dx$ gebracht werden, wo $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ einen endlichen Convergenzradius hat und eine Function $F(z)$ darstellt, für welche der Convergenzkreis keine Unstetigkeitslinie ist, so ist die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ summirbar und hat die Function $f(z) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) F(zx) dx$ zur Summe; $f(z)$ ist eine analytische und in dem „Regularitäts-Winkel" holomorphe Function.

Eine Potenzreihe $p$ter Ordnung wird erklärt als eine Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, für welche $a_n = \Gamma(pn+1) a_n$ ist, wenn a_n den allgemeinen Coefficienten einer Potenzreihe bedeutet, deren Convergenzradius weder 0 noch ∞ ist; für ein positives p ist eine solche Reihe divergent; sie heisst summirbar in einem Winkel α (dessen Scheitel der Nullpunkt ist), wenn ihr eine im Innern des Winkels α holomorphe Function zugeordnet werden kann. Für sie gelten die Sätze:

Die summirbaren divergenten Reihen können wie convergente Reihen behandelt werden.

Wenn eine summirbare divergente Reihe formell einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist dies hinreichend, um ein wirkliches Integral zu definiren.

Man kann zwei in demselben Winkel summirbare Reihen ebenso wie zwei convergente Reihen mit einander multipliciren.

Die summirbaren Reihen gehören zur Kategorie der Poincaré'schen asymptotischen Reihen. Wz.

Éd. Le Roy. Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. Darboux Bull. (2) **24,** 245-268.

1. Es sei $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$, z eine reelle Veränderliche, die Coefficienten α_n positiv.

Wenn diese Reihe in jedem Intervall convergirt, so nimmt sie ohne Ende zu, wenn z, durch positive Werte gehend, unendlich wird.

Wenn diese Reihe den endlichen Convergenzbereich $(-1, +1)$ hat und $\sum_0^\infty \alpha_n$ divergirt, so wird $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ unendlich zunehmen, wenn z gegen 1 convergirt.

2. Es sei $\alpha(x)$ eine Function, für welche $\alpha_n = \alpha(n)$ ist, $\beta(x)$ eine Function von der Art, dass das Verhältnis $\beta'(x) : \alpha(x)$ für ein unendlich wachsendes x gegen 1 convergirt. Dann ist der asymptotische Wert von $f(z)$ für einen der Eins benachbarten Wert von z, wenn C eine Constante bedeutet, gleich $C\beta\left(\frac{1}{1-z}\right)$, wenn die positiven Coefficienten α_n für ein ohne Ende wachsendes n bis 0 abnehmen.

Ist $\alpha_n = e^{-\varphi(n)}$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0$, so besteht die asymptotische Gleichung: $f(z) \sim J = \int_0^\infty e^{-\varphi(x) - ax} dx$.

3. Ist $\alpha_n = e^{\varphi(n)}$, $\varphi(x)$ stetig, positiv und wachsend für $x > 0$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0$, so ist $f(z) \sim J = \int_0^\infty e^{-\varphi(x) - ax} dx$.

Um die Ordnung, von welcher J unendlich wird, zu bestimmen, wird $\alpha_n = n^p e^{-\varphi(n)}$ gesetzt; dann zeigt sich, dass

$$f(z) \sim K = \int_0^{\frac{1}{1-z}} e^{-\varphi(x)} x^p \, dx$$

ist. Ist z. B. $\alpha_n = \frac{n^p}{(Ln)^q}$, $p > 0$, q beliebig, so ist

$$f(z) \sim \frac{C}{(1-z)^{p+1}\left[L\frac{1}{1-z}\right]^q}.$$

4. Der Fall: $x^2\varphi''(x) = -\psi(x)$, $\psi(x)$ sei positiv und ohne Ende wachsend mit x. Ist $\alpha_n = e^{n^p}$ $(0 < p < 1)$, so ist für $z = \frac{1}{2}$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1-z}\sqrt{\frac{\pi}{1-z}}\, e^{\frac{1}{4(1-z)}}.$$

5. Es sei $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$, $\alpha_n = e^{-\varphi(n)}$; $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ seien

stetig und positiv für $x > 0$; $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ wachsen bis ins Unendliche, $\varphi''(x)$ nehme bis 0 ab, und es sei $x^2\varphi''(x) = \psi(x)$, wo $\psi(x)$ positiv ist und ohne Ende mit x wächst; $\frac{\varphi(x)}{x}$ werde mit x unendlich. Wird dann gesetzt $z = e^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, so wird, wenn α unendlich wird,

$$f(z) \backsim J = \int_0^{\infty} e^{\alpha x - \varphi(x)}\, dx.$$

Als Beispiel wird $a_n = \frac{1}{(n!)^p}$ behandelt.

6. Aehnlich ist der Fall zu behandeln, in welchem $\varphi''(x)$ ohne Ende mit x wächst, während die anderen Hypothesen dieselben bleiben.

Wz.

Éd. Le Roy. Sur les séries divergentes. C. R. **130**, 1293-1296.

Éd. Le Roy. Sur les séries divergentes. Rectification à une Note précédente. C. R. **130**, 1535-1536.

Stellt man eine im Intervall $(0, 2\pi)$ endliche und stetige Function $\varphi(x)$ durch die trigonometrische Reihe $\sum_0^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ dar, so kann diese Reihe divergent werden; dann wird der Ausdruck

$$\sum_0^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)e^{-n^2 t} \qquad (t > 0),$$

welcher für $t = 0$ gegen $\varphi(x)$ convergirt, als Summe der divergenten Reihe bezeichnet.

Ist $J(z, t) = \sum_0^{\infty} z^n e^{-n^2 t}$ $(t > 0)$, so ist

$$J(z, t) + J\left(\frac{1}{z}, t\right) - 1 = \vartheta_3\left(\frac{Lz}{2i\pi}\middle|\frac{ti}{\pi}\right) = \frac{\pi}{t} e^{\frac{(Lz)^2}{4t}}\, \vartheta_3\left(\frac{Lz}{2t}\middle|\frac{\pi i}{t}\right);$$

für $t = 0$ convergirt $J(z, t)$ gleichmässig gegen $\frac{1}{1-z}$, wenn z sich in einem Bereiche befindet, welcher durch die Curve $\varrho = e^{\omega}$ $(z = \varrho e^{i\omega})$ und die zu ihr in Bezug auf die reelle Axe der z-Ebene symmetrisch gelegene Curve begrenzt wird (dieser Bereich enthält den Einheitskreis).

Wenn die Reihe $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ in der Umgebung des Nullpunktes eine holomorphe Function $f(z)$ definirt, so convergirt der Ausdruck

$$\sum_0^{\infty} a_n z^n e^{-n^2 t}$$

auf jedem Bogen des Convergenzkreises, wo $f(z)$ regulär ist (und etwas darüber hinaus), gegen $f(z)$, wenn t gegen Null convergirt.

Man kann jedoch nicht auf Grund dieser Betrachtungen, wie in der ersten Note behauptet wurde, die analytische Fortsetzung von $f(z)$ und den Mittag-Leffler'schen Satz über die Entwickelung von $f(z)$ in eine Reihe von Polynomen erhalten, wohl aber die singulären Punkte von $f(z)$ auf dem Convergenzkreis bestimmen. Wz.

E. Lasker. Ueber Reihen auf der Convergenzgrenze. Lond. R. S. Proc. **66**, 337-339.

Kurze Besprechung einer längeren Arbeit über das Verhalten von Reihen auf der Begrenzungscurve des Convergenzgebietes, insbesondere in den Stellen, in denen der Wert der Reihe in einem Punkte der Curve mit dem Grenzwerte für denselben Punkt nicht identisch ist. Einige hierauf bezügliche Sätze sind angedeutet. Br.

E. B. van Vleck. On linear criteria for the determination of the radius of convergence of a power series. American M. S. Trans. **1**, 293-309.

Verf. beweist folgenden Satz: „Es sei eine Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

gegeben, in welcher, von einem bestimmten Gliede an, immer $p+1$ auf einander folgende Coefficienten durch eine lineare Relation

$$A_n = (b_1 + \varepsilon_1^{(n)}) A_{n-1} + (b_2 + \varepsilon_2^{(n)}) A_{n-2} + \cdots + (b_p + \varepsilon_p^{(n)}) A_{n-p}$$

verbunden sind. Wenn für einen willkürlich gewählten positiven Wert ε eine ganze Zahl m derart gefunden werden kann, dass für $n \geqq m$ jedes $|\varepsilon_i^{(n)}|$ kleiner als ε ist, so convergirt die Reihe innerhalb eines Kreises, dessen Centrum der Anfangspunkt und dessen Radius der Abstand desselben von der nächsten Wurzel des Polynoms $1 - b_1 x - b_2 x^2 - \cdots - b_p x^p$ ist.“ Für $p = 1$ resultirt das Cauchy'sche Convergenzkriterium. Specielle Fälle der oben angegebenen Reihen hat bereits Hadamard betrachtet (Journ. de Math. (4) **8**, 119ff.; F. d. M. **24**, 359, 1892), nämlich solche mit nur polaren Singularitäten auf dem Convergenzkreise. — Der obige Satz wird vom Verf. nach zwei Richtungen hin erweitert, einmal auf den Fall, dass p mit n ins Unendliche wächst (also z. B. $p = n$ ist) und dann auf Potenzreihen mit mehreren (speciell 2) Variabeln. Wbg.

J. C. Kluyver. De formules van Borel over divergente reeksen. Amst. Ak. Versl. **8**, 331-337.

C. Burali-Forti. Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques. Zeitschr. f. Math. **45,** 52-54.

Durch Zindler's Recension seines Buches „Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann" angeregt, giebt Verf. den Beweis der Taylor'schen Formel in vollständiger Form.

Wbg.

É. Borel. Sur le prolongement analytique de la série de Taylor. S. M. F. Bull. **28,** 200.

Der Verf. giebt ein einfaches Beispiel zu dem in den Ann. de l'Éc. Norm. (3) **16,** 65 (F. d. M. **30,** 230, 1899) mitgeteilten Beweise, nach welchem sich aus einer Reihenentwickelung von $1/(1-z)$, die in einem Bereiche convergirt, der grösser als der Einheitskreis ist, eine analoge Entwickelung für eine beliebige Function gewinnen lässt. Jhk.

J. N. Hatzidakis. Démonstration simplifiée de la formule de Taylor. Ens. math. **2,** 447-449.

Es wird $f(x+\varepsilon)-f(x)-\varepsilon f'(x)\equiv \Gamma$ gesetzt und daraus die Formel

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=\frac{\varepsilon}{1}f'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2}f''(x+\varepsilon_2)$$

$(0<\varepsilon_1<\varepsilon;\ 0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$ hergeleitet.

Sodann wird gesetzt:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)-\frac{\varepsilon}{1!}f'(x)-\frac{\varepsilon^2}{2!}f''(x)-\frac{\varepsilon^3}{3!}f'''(x)-\cdots$$
$$-\frac{\varepsilon^r}{r!}f^{(r)}(x)\equiv\Gamma;$$

von der Function

$$(1)\qquad f(x+\omega)-f(x)-\frac{\omega}{1!}f'(x)-\frac{\omega^2}{2!}f''(x)-\cdots$$
$$-\frac{\omega^r}{r!}f^{(r)}(x)-\Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}}$$

werden die Ableitungen bis zur $(r+1)$-ten gebildet:

$$f'(z+\omega)-f'(x)-\frac{\omega}{1!}f''(x)-\frac{\omega^2}{2!}f'''(x)-\cdots-(r+1)\,\omega^r\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{r+1}(x+\omega)-f^{r+1}(x)-1\cdot 2\cdots r(r+1)\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}};$$

alle diese Ableitungen, mit Ausnahme der letzten, verschwinden für $\omega=0$, und da die Function (1) für $\omega=0$ und $\omega=\varepsilon$ verschwindet, so ver-

schwindet ihre erste Ableitung für $\omega=\varepsilon_1$ $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; letztere verschwindet auch für $\omega=0$, daher verschwindet ihre Ableitung, d. h. die zweite Ableitung von (1) für $\omega+\varepsilon_2$ $(0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$. Diese verschwindet für $\omega=0$, also verschwindet ihre Ableitung (d. h. die dritte Ableitung von (1)) für $\omega=\varepsilon_3$ $(0<\varepsilon_3<\varepsilon_2)$, u. s. w. Die letzte, d. i. die $(r+1)$-te Ableitung verschwindet für $\omega=\varepsilon_{r+1}$ $(0<\varepsilon_{1+r}<\varepsilon_r<\cdots<\varepsilon)$; demnach ist für $(0<\varrho<\varepsilon)$

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=\frac{\varepsilon}{1!}f'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}f''(x)+\frac{\varepsilon^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$
$$+\frac{\varepsilon^r}{r!}f^{(r)}(x)+\frac{\varepsilon^{r+1}}{(r+1)!}f^{+1}(x+\varrho).$$

Wz.

S. A. Corey. The development of functions. Annals of Math. (2) 1, 77-80.

Es handelt sich um Entwickelungen, die schneller convergiren, als die Taylor'sche und MacLaurin'sche Reihe, z. B.

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{2}[f'(a)+f'(a+x)]+\frac{x^2}{2^2.\,2!}[f''(a)-f''(a+x)]$$
$$+\frac{x^3}{2^3.\,3!}[f'''(a)+f'''(a+x)]+\frac{x^4}{2^4.\,4!}[f^{\mathrm{IV}}(a)-f^{\mathrm{IV}}(a+x)]+\cdots,$$

$$f(a+2x)=f(a)+2\left[\frac{x}{1}f'(a+x)+\frac{x^3}{3!}f'''(a+x)\right.$$
$$\left.+\frac{x^5}{5!}f^{\mathrm{V}}(a+x)+\cdots\right].$$

Wz.

P. A. Nekrassow. Zur Frage über die angenäherte Bestimmung eines entfernten Gliedes der Lagrange'schen Reihe. Mosk. Math. Samml. 21, 439-449. (Russisch.)

Im § 38 der Abhandlung „Annäherungsrechnung der Functionen sehr grosser Zahlen" wird die Frage über die angenäherte Berechnung des m-ten Gliedes der Lagrange'schen Reihe für die Function $G'(x+z)\frac{dz}{dt}$ der Wurzel z der Gleichung $z=t\varphi(x+z)$ für sehr grosse Werte von m behandelt. Die Lösung unterliegt einer Ausnahme, die häufig vorkommen kann in den Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, und die in der Note erörtert wird. Si.

P. G. Lejeune Dirichlet. Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen.

P. L. Seidel. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen. Herausgegeben von H. Liebmann. Leipzig: W. Engelmann. 58 S. 12mo. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften No. 116.)

Die Dirichlet'sche Arbeit ist Dove's Repertorium der Physik Bd. I (1837), die Seidel'sche den Abhandlungen der Math. Physik. Klasse der Kgl. Bayr. Akad. V (1847) entnommen. Die Herausgabe der Arbeiten in der Ostwald'schen Sammlung ist mit Dank anzuerkennen. Wz.

E. Hossenfelder. Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Pr. (No. 40) Gymn. Strassburg (Westpr.) 22 S. 4°.

Aus der ursprünglichen trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} A_h$, wo $A_h = a_h \cos hx + b_h \sin hx$ ist, entsteht durch zweimalige Integration

$$F(x) = \frac{A_0 x^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{A_h}{h^2};$$

dann gilt für den zweiten mittleren Differentialquotienten von $F(x)$

$$\frac{F(x+2\varepsilon) - 2F(x) + F(x-2\varepsilon)}{4\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_h \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2$$

der Satz: Für jeden Wert x, für welchen die ursprüngliche Reihe convergirt, convergirt auch $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ und zwar nach demselben Werte.

Wenn die Reihe $f(x)$ zwischen den endlichen Unbestimmtheitsgrenzen $O(x)$ und $U(x)$ schwankt, so sind die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

enthalten zwischen

$$\frac{O(x)+U(x)}{2} + \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) \frac{O(x)-U(x)}{2}$$

und

$$\frac{O(x)+U(x)}{2} - \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) \frac{O(x)-U(x)}{2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lim (na_n)$ und $\lim (nb_n)$ für unendliche n endlich bleiben, wird $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ gleichzeitig mit der Summe der ursprünglichen trigonometrischen Reihe $+\infty$, bezw. $-\infty$.

Wenn na_n und nb_n mit wachsendem n unendlich klein werden, so schwankt $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ mit der ursprünglichen Reihensumme zwischen denselben Unbestimmtheitsgrenzen O und U, falls beide endlich sind.

§ 2. Für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ sei eine von dem Parameter q abhängende Function $f(x, q)$ gegeben.

Wenn dann $f(x, q)$ für jedes in Betracht kommende q eine stetige Function von x im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist, und wenn dieselbe für $q = +\infty$ gleichmässig convergirt für ein System von Punkten, welche überall dicht über das ganze Intervall verteilt sind, so convergirt sie für alle $a \leqq x \leqq b$ gleichmässig.

§ 3. Weiss man von einer für $a \leqq x \leqq b$ stetigen Function $\Phi(x)$, dass ihr zweiter mittlerer Differentialquotient eine endliche Function $\nu(x)$ vom Integral Null ist, so ist für dasselbe Intervall $\Phi(x) = c_0 + c_1 x$, d. h. der betreffende Differentialquotient ist thatsächlich allenthalben gleich Null.

Ist der vorwärts (rückwärts) gebildete erste Differentialquotient einer stetigen Function $\nu(x)$ vom Integral Null, so ist in demselben Intervall die gegebene stetige Function constant, der Differentialquotient also durchweg Null.

Ist für eine stetige Function $f(x)$, nach Ausschluss von Punkten durch Intervalle von endlicher Anzahl mit der Gesamtlänge ε, an jeder Stelle x ein und derselbe Wert von $\varDelta x$ ausreichend, um die Ungleichung $\varDelta f(x)/\varDelta x < \delta$ zu erfüllen, wobei δ schliesslich unbegrenzt klein wird, ist ferner $\lim \varDelta f(x)/\varDelta x$ durchaus endlich, und convergirt ε mit $\varDelta x$ nach Null, so ist $f(x)$ eine Constante.

§ 4. Wenn die Fourier'sche Reihe (gebildet von einer durchweg stetigen Function) convergirt, so convergirt sie nach dem Functionswert. Convergirt sie nicht, so schwankt sie um den Functionswert herum.

Wz.

M. Lerch. Remarque sur la série de Fourier. Darboux Bull. (2) **24**, 102-112.

Es sei $f(z)$ eine im Intervall $(0 \cdots 1)$ endliche und integrirbare Function, in gewissen Punkten x sei diese Function stetig, so dass die beiden Functionen $[f(x+t) - f(x)] : t$ und $[f(x-t) - f(x)] : t$ vom Werte $t = 0$ aus integrirbar sind; setzt man dann

$$c_\nu = \int_0^1 f(z) e^{-2\nu z\pi i} dz,$$

so convergirt die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i} \qquad (0 < x < 1),$$

welche diesen Werten von x entspricht, und hat $f(x)$ zur Summe, während die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}$, welche nur die Hälfte der Glieder enthält, den Ausdruck

$$\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}f(x) - \frac{i}{2}\int_0^1 [f(z)-f(x)] \cot(z-x)\pi dz$$

zum Werte hat. Wz.

M. Lerch. Ein Nachtrag zur Theorie der Fourier'schen Reihen. Rozpravy **9**, No. 7, 15 S. (Böhmisch.)

Vergl. das vorangehende Referat.

C. Runge. Ueber die Vergleichung empirischer Formeln. Zeitschr. f. Math. **45**, 78-85.

Um die Formel $\varepsilon = a\sigma^b$, wo ε die elastische Drehung, σ die Kraft darstellt und a und b positive Constanten bedeuten, mit der Formel $\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$ in dem Intervall von $\sigma = 0$ bis $\sigma = s$ zu vergleichen, betrachte man a und b als gegebene Constanten und bestimme die Constanten α und β so, dass das Integral $\frac{1}{s}\int_0^s (\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b) d\sigma$ möglichst klein wird. Die Quadratwurzel aus dem Minimalwert wird der mittlere Fehler m der Formel $\alpha\sigma + \beta\sigma^2$ bei der Darstellung von $a\sigma^b$ in dem Intervall $\sigma = 0$ bis s genannt. Es ist

$$m = \frac{(b-1)(2-b)}{(b+2)(b+3)\sqrt{2b-1}} a s^b.$$

In ähnlicher Weise wird $\varepsilon = a\sigma/1 - b\sigma$ mit $\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$ im Intervall $\sigma = 0$ bis s verglichen. Es ergiebt sich:

$$m = as\frac{b^2 s^2}{3\cdot 5\sqrt{7}}\left(1 + \frac{3\cdot 5}{8} bs + \cdots\right).$$

Die beiden Vergleichungen hängen mit den Kugelfunctionen zusammen. Wz.

J. D. Everett. On the algebra of difference-tables. Quart. J. **31**, 357-376.

Setzt man $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, $\delta f(x) = f(x) - f(x-h)$, so ist $\Delta\delta = \Delta - \delta$, daher $\Delta = \Delta/\delta - 1$, $\delta = (1-\delta)/\Delta$ und $1 = \delta^{-1} - \Delta^{-1}$, $\Delta/\delta = 1 + \Delta$, $\delta/\Delta = 1 - \delta$; nach dem binomischen Satze werden $(\Delta/\delta)^n$ und $(\delta/\Delta)^n$ entwickelt, ebenso Δ^n und δ^n. Ferner ist $\Delta\delta = \Delta/\delta + \delta/\Delta - 2$ und daher

$$(\Delta\delta)^n = \left\{\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^n + \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^n\right\} - 2n\left\{\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{n-1} + \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{n-1}\right\}$$
$$+ \binom{2n}{2}\left\{\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{n-2} + \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{n-2}\right\} - \cdots + (-1)^n\binom{2n}{n}.$$

Setzt man $\varphi_m = \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^m + \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^m - 2,\ F_m = \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^m - \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^m$, so ist

$$\varphi_m = n(\Delta - \delta) + \binom{n}{2}(\Delta^2 + \delta^2) + \binom{n}{3}(\Delta^3 - \delta^3) + \cdots,$$

$$F_m = n(\Delta + \delta) + \binom{n}{2}(\Delta^2 - \delta^2) + \binom{n}{3}(\Delta^3 + \delta^3) + \cdots.$$

Setzt man H/h für n, so ist $(\Delta/\delta)^n - 1$ gleich

$$H\frac{\Delta}{h} + \frac{H(H-h)}{2}\frac{\Delta^2}{h^2} + \frac{H(H-h)(H-2h)}{3!}\frac{\Delta^3}{h^3} + \cdots$$

und gleich

$$H\frac{\delta}{h} + \frac{H(H+h)}{2}\frac{\delta^2}{h^2} + \frac{H(H+h)(H+2h)}{3!}\frac{\delta^3}{h^3} + \cdots,$$

$$h\frac{\Delta^n\delta^n - 1}{nh} = \Delta + \frac{n-1}{2}\Delta^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 + \cdots$$

$$= \delta + \frac{n+1}{2}\delta^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}\delta^3 + \cdots,$$

$$h\frac{d}{dx} = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots = \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots,$$

$$h^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \cdots = \delta^2 + \delta^3 + \frac{11}{12}\delta^4 + \cdots.$$

Angenähert ist

$$h\frac{d}{dx} = \frac{1}{2}(\Delta + \delta) - \frac{1}{10}(\Delta^2 - \delta^2) + \frac{1}{60}(\Delta^3 + \delta^3)$$

und

$$h^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{37}{30}(\Delta - \delta) - \frac{7}{60}(\Delta^2 + \delta^2) + \frac{1}{90}(\Delta^3 - \delta^3).$$

Es werden jetzt $\Delta\delta, \Delta^2\delta^2, \Delta^3\delta^3, \ldots, \frac{1}{2}(\Delta + \delta), \frac{1}{2}(\Delta^2\delta + \Delta\delta^2)$, $\frac{1}{2}(\Delta^3\delta^2 + \Delta^2\delta^3) \cdots$ als Centraldifferenzen bezeichnet und $h\frac{d}{dx}$ und $h^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ durch diese ausgedrückt.

Setzt man $\frac{d}{dx} = D$, so gilt die symbolische Gleichung $\Delta = e^{hD} - 1$; ähnlich ist $\delta = 1 - e^{-hD}$, daher

$$\Delta\delta = \Delta - \delta = e^{hD} + e^{-hD} - 2 = h^2D^2 + \frac{h^4D^4}{3\cdot 4} + \frac{h^6D^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots,$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD} = hD + \frac{h^3D^3}{4\cdot 6} + \frac{h^5D^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \cdots.$$

Zum Schlusse werden die Formeln aufgestellt, um zwischen u_0 und u_1 einen mittleren Wert einzuschalten. Wz.

W. F. SHEPPARD. **Central-difference formulae.** London M. S. Proc. **31**, 449-488 (1899).

I. Entwickelung der hyperbolischen Functionen $\sinh^n \varphi$ nach Potenzen von φ, $\cosh n\varphi$, und $\sinh n\varphi, \varphi^m$ nach Potenzen von $\sinh\varphi$, und dergleichen.

II. „Centraldifferenz“-Formeln. Es sei $u = f(x)$, $u_0 = f(x_0)$, $x_n = x_0 + nh$ für $u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; die Operatoren δ und μ werden definirt:

$$\delta f(x) = f(x + \tfrac{1}{2}h) - f(x - \tfrac{1}{2}h),$$
$$\mu f(x) = \tfrac{1}{2}\{f(x + \tfrac{1}{2}h) + f(x - \tfrac{1}{2}h)\};$$
$$\delta^2 f(x) = \delta\delta f(x);\ \delta^3 f(x) = \delta\delta^2 f(x); \cdots;$$
$$\mu^2 f(x) = \mu\mu f(x);\ \mu^3 f(x) = \mu\mu^2 f(x), \cdots;$$

dann ist

$$\delta^n f(x) = f(x + \tfrac{1}{2}nh) - nf(x + \tfrac{1}{2}nh - h) + \cdots + (-1)^n f(x - \tfrac{1}{2}nh),$$
$$\mu^n f(x) = \{f(x + \tfrac{1}{2}nh) + nf(x + \tfrac{1}{2}nh - h) + \cdots; + f(x - \tfrac{1}{2}nh)\}/2^n,$$
$$\delta^n u_r = \delta^n f(x + rh);\ \mu\delta^n u_r = \tfrac{1}{2}(\delta^n u_{r+\frac{1}{2}} + \delta^n u_{r-\frac{1}{2}}).$$

In der Tabelle:

x	u	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{-1}	u_{-1}	$(\mu\delta u_{-1})$	$\delta^2 u_{-1}$	$(\mu\delta^3 u_{-1})$	$\cdots$
		$\delta u_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 u_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	u_0	$(\mu\delta u_0)$	$\delta^2 u_0$	$(\mu\delta^3 u_0)$	$\cdots$
		$\delta u_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 u_{\frac{1}{2}}$	
x_1	u_1	$(\mu\delta u_1)$	$\delta^2 u_1$	$(\mu\delta^3 u_1)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

heissen die einem Werte von u in einer Horizontalreihe folgenden Werte seine „Centraldifferenzen“.

Es ist:

$$\mu\{\varphi(x) + \psi(x)\} = \mu\varphi(x) + \mu\psi(x);\ \mu\delta f(x) = \delta\mu f(x).$$

μ_n, δ_n werden erklärt: $\mu_n f(x) = \frac{1}{2}\{f(x + \frac{1}{2}nh) + f(x - \frac{1}{2}nh)\}$, $\delta_n f(x) = f(x + \frac{1}{2}nh) - f(x - \frac{1}{2}nh)$, wo n positiv oder negativ ist; dann ist $\mu_{-1} = \mu$, $\delta_{-1} = \delta$, dagegen $\mu^{-1} = (1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$;

$$u_{\frac{1}{2}} = \mu \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{-\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} = \left(\mu - \frac{1}{8}\mu\delta^2 + \frac{3}{128}\mu\delta^4 - \frac{5}{1024}\mu\delta^6 + \frac{35}{32768}\mu\delta^8 - \cdots\right) u_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_1 + u_0) - \frac{1}{16}(\delta^2 u_1 + \delta^2 u_0)$$
$$+ \frac{3}{256}(\delta^4 u_1 + \delta^4 u_0) - \frac{5}{2048}(\delta^6 u_1 + \delta^6 u_0) + \frac{35}{65536}(\delta^8 u_1 + \delta^8 u_0) \cdots .$$

Ist $Df(x) = f'(x)$, $Du = u'$, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$f(x + \tfrac{1}{2}h) = f(x) + \tfrac{1}{2}hf'(x) + \tfrac{1}{2!}(\tfrac{1}{2}h)^2 f''(x) + \cdots = e^{\frac{1}{2}hD} f(x);$$
$$f(x - \tfrac{1}{2}h) = e^{-\frac{1}{2}hD} f(x),$$
$$\mu f(x) = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}hD} + e^{-\frac{1}{2}hD}) f(x) \text{ oder } \mu = \cosh \tfrac{1}{2}hD,$$
$$\delta f(x) = (e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD}) f(x), \text{ oder } \delta f(x) = \tfrac{1}{2}\sinh \tfrac{1}{2}hD;$$

die Formeln $\delta^n = (2\sinh \frac{1}{2}hD)^n$, $\mu\delta^{n-1} = (2\sinh \frac{1}{2}hD)^{n-1}\cosh \frac{1}{2}hD$ werden für

$$\mu\delta u_0, \delta^2 u_0, \mu\delta^3 u_0, \delta^4 u_0, \mu\delta^5 u_0, \delta^6 u_0, \ldots,$$
$$\mu u_{\frac{1}{2}}, \delta u_{\frac{1}{2}}, \mu\delta^2 u_{\frac{1}{2}}, \delta^3 u_{\frac{1}{2}}, \mu\delta^4 u_{\frac{1}{2}}, \delta^5 u_{\frac{1}{2}}, \ldots$$

specialisirt, ähnliche Formeln für

$$hDu_0, h^2D^2u_0, h^3D^3u_0, \ldots, u_{\frac{1}{2}}, hDu_{\frac{1}{2}}, h^2D_2u_{\frac{1}{2}}, \ldots .$$

Nimmt man die Intervalle gleich nh statt h und bezeichnet die neuen Werte von μ und δ durch μ_n und δ_n, so dass $\mu_n = \cosh \frac{1}{2}nhD$, $\delta_n = 2\sinh \frac{1}{2}nhD$ wird, so wird $\mu_{-n} = \mu_n$, $\mu_{m\pm n} = \mu_m \mu_n \pm \frac{1}{4}\delta_m\delta_n$, $\delta_{m\pm n} = \mu_n\delta_m \pm \mu_m\delta_n$ und

$$\delta_n^m = n^m \{{}_mB_m\delta^m + {}_mB_{m+2}\delta^{m+2}/(2m+2)(2m+4) + {}_mB_{m+4}\delta^{m+1}/(2m+2)\cdots(2m+8) + \cdots\},$$
$$\mu_n\delta_n^{m-1} = n^{m-1}\{{}_mB_m\mu\delta^{m-1} + {}_mB_{m+2}\mu\delta^{m+1}/2m(2m+2) + {}_mB_{m+4}\mu\delta^{m+3}/2m\cdots(2m+6) + \cdots\},$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen ${}_mB_m = 1$ und

$${}_mB_{m+2r+2} = \{m^2n^2 - (m+2r)^2\}\,{}_mB_{m+2r} + {}_{m-2}B_{m+2r}$$

bestimmt sind.

Schliesslich werden die Interpolationsformeln

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1!}\mu\delta u_0 + \frac{n^2}{2!}\delta^2 u_0 + \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 u_0 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{4!}\delta^4 u_0 + \cdots,$$

$$u_{\frac{1}{2}+n} = \mu u_{\frac{1}{2}} + \frac{2n}{2\cdot 1!}\delta u_{\frac{1}{2}} + \frac{4n^2-1^2}{2^2.2!}\mu\delta^2 u_{\frac{1}{2}} + \frac{2n(4n^2-1^2)}{2^3.3!}\delta^3 u_{\frac{1}{2}} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2^4.4!}\mu\delta^4 u_{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

$$u_n = \left\{1 + \binom{n}{2}\delta^2 + \binom{n+1}{4}\delta^4 + \cdots\right\} u_0$$
$$+ \left\{\binom{n}{1}\delta + \binom{n+1}{3}\delta^3 + \binom{n+2}{5}\delta^5 + \cdots\right\} u_{\frac{1}{2}},$$

$$u_{-n} = \left\{1 + \binom{n}{2}\delta^2 + \binom{n+1}{4}\delta^4 + \cdots\right\} u_0$$
$$- \left\{\binom{n}{1}\delta + \binom{n+1}{3}\delta^3 + \binom{n+2}{5}\delta^5 + \cdots\right\} u_{-\frac{1}{2}}$$

abgeleitet.

III. „Centralsummen"-Formeln. $\sigma f(x)$ wird definirt durch die Functionalgleichung: $\delta\sigma f(x) = \sigma f(x + \frac{1}{2}h) - \sigma f(x - \frac{1}{2}h) = f(x)$. Sie involvirt eine willkürliche Constante; wird diese passend gewählt, so ist

$$\sigma\{\varphi(x) + \psi(x)\} = \sigma\varphi(x) + \sigma\psi(x); \quad \delta\sigma u = u \; (u = f(x))$$
$$\mu\sigma u = \sigma\mu u; \quad \sigma = \delta^{-1}.$$

Auch hier wird gesetzt: $\sigma^n u = \sigma\, \sigma^{n-1} u$, so dass $\sigma^n u$ n willkürliche Constanten enthält.

Die Operatoren μ, δ, σ und D ($Df(x) = f'(x)$, $Du = u'$) können nach den Gesetzen der Algebra mit einander verbunden werden.

Es ist

$$u_1 - u_0 = \delta u_{\frac{1}{2}} = 2 \sinh \frac{1}{2} hDu_{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{24}h^2D^2 + \frac{1}{1920}h^4D^4 + \frac{1}{322560}h^6D^6 + \cdots\right) hDu_{\frac{1}{2}}$$

$$u_1 - u_0 = \mu\delta/\mu u_{\frac{1}{2}} = \mu\, 2 \tanh \frac{1}{2} hDu_{\frac{1}{2}}$$
$$= \mu\left(1 - \frac{1}{12}h^2D^2 + \frac{1}{120}h^4D^4 - \frac{17}{20160}h^6D^6 + \cdots\right) hDu_{\frac{1}{2}}.$$

Für $u = \int_0^x v\,dx$ ergeben sich die Formeln:

$$\int_0^x v\,dx = \left(1 + \frac{1}{24}h^2D^2 + \frac{1}{1920}h^4D^4 + \cdots\right) hv_{\frac{1}{2}}$$
$$= \mu\left(1 - \frac{1}{12}h^2D^2 + \frac{1}{120}h^4D^4 - \cdots\right) hv_{\frac{1}{2}},$$

$$\int_{x_0}^{x_n} v\,dx = h\sigma(v_n - v_0) + h(\delta X_n - \delta X_0)$$
$$= h\mu\sigma(v_n - v_0) + h(\delta X_n' - \delta X_0'),$$

wo

$$X = \left(\frac{1}{24} - \frac{17}{5760}h^2D^2 + \frac{43}{322560}h^4D^4 - \cdots\right) hv,$$

$$X' = \left(-\frac{1}{12} + \frac{7}{1440} h^2 D^2 - \frac{31}{161280} h^4 D^4 + \cdots\right) hv$$

ist.

$$u_n = \int^{x_n} v\,dx = \left(\sigma + \frac{1}{24}\delta - \frac{17}{5760}\delta^3 + \frac{367}{967680}\delta^5 - \cdots\right) hv_n,$$

$$u_n = \int^{x_n}, v\,dx = \mu\left(\sigma - \frac{1}{12}\delta + \frac{11}{720}\delta^3 - \frac{191}{60480}\delta^5 + \cdots\right) hv_n.$$

Wz.

W. F. Sheppard. **A method for extending the accuracy of certain mathematical tables.** London M. S. Proc. **31**, 423-448 (1899).

Eine Tafel (working-table) enthalte die bis auf 7 Decimalstellen berechneten Werte einer Function u von x für Werte von x von 0,00 bis 0,50, deren Intervalle gleich 0,01 sind; eine andere (checking table) enthalte die bis auf 11 Stellen berechneten Werte derselben Function für Werte, deren Intervalle grösser, nämlich 0,1 sind. Es soll eine neue Tafel hergestellt werden, welche soviel wie möglich die Vorzüge beider vereinigt, die grössere Genauigkeit der zweiten mit den kleineren Intervallen der ersten. Dabei dient die working-table als Basis zur Berechnung der ersten und zweiten Differenzen für die neue Tafel; die Werte dieser werden gefunden durch successive Addition der gefundenen Differenzen und controllirt mittels der checking-table.

Ist $u = f(x) = e^x$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\sin\frac{1}{2}\pi x$, so wird jeder Wert aus einem oder zwei vorhergehenden Werten berechnet. Das ist nicht immer möglich. Aber es giebt immer eine andere Formel für die Berechnung, wenn (vorausgesetzt, dass das Intervall h klein genug ist) der Differentialquotient der Function durch die Function oder durch die Function und das Argument ausgedrückt werden kann. Es sei $u = f(x)$ und $v = \frac{du}{dx} = \varphi(x, u)$, wo $\varphi(x, u)$ eine Function bedeutet, deren Wert für einen gegebenen Wert von x berechnet werden kann, wenn u für diesen Wert bekannt ist. Setzt man $u_0 = f(x_0)$, $u_{\pm n} = f(x_0 \pm nh)$, wo x_0 ein in der Tafel vorkommender Wert ist, so ist

$$u_1 = f(x_0 + h) = u_0 + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots,$$

$$hv_0 = hf'(x_0),\ hv_{-1} = hf'(x_0 - h) = hf'(x_0) - h^2 f''(x_0) + \frac{h^3}{2!} f'''(x_0) - \cdots,$$

$$hv_{-2} = hf'(x_0) - 2h^2 f''(x_0) + \frac{4h^3}{2!} f'''(x_0) - \cdots,$$

daher

$$\Delta hv_{-1} = h^2 f''(x_0) - \tfrac{1}{2} h^3 f'''(x_0) + \tfrac{1}{6} h^4 f^{IV}(x_0) - \cdots,$$
$$\Delta^2 hv_{-2} = h^3 f'''(x_0) - h^4 f^{IV}(x_0) + \cdots, \quad \Delta^3 hv_{-3} = h^4 f^{IV}(x_0) - \cdots;$$

demnach

$$u_1 = u_0 + hv_0 + \frac{1}{2}\Delta hv_{-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 hv_{-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 hv_{-4} + \frac{95}{288}\Delta^5 hv_{-5} + \cdots.$$

hv_0, Δhv_{-1}, $\Delta hv_{-2}, \ldots$ sind bekannt, wenn $u_0, u_{-1}, u_{-2}, \ldots$ bekannt sind; demnach kann jeder Wert von u aus dem ihm vorhergehenden Werte nach dieser Formel berechnet werden.

II. Für seine Methode der Centraldifferenzen führt Verf. drei Operatoren δ, σ und μ ein durch die Formeln:

$$\delta f(x) = f(x + \tfrac{1}{2}h) - f(x - \tfrac{1}{2}h), \quad \mu f(x) = \tfrac{1}{2}\{f(x + \tfrac{1}{2}h) + f(x - \tfrac{1}{2}h)\},$$
$$\delta\sigma f(x) = f(x);$$

dann ergiebt sich

$$\sigma u_{-\frac{1}{2}} = \cdots + u_{-2} + u_{-1}, \quad \sigma u_{\frac{1}{2}} = \cdots u_{-2} + u_{-1} + u_0,$$
$$\sigma u_{\frac{3}{2}} = \cdots + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu\sigma u_{-1} = \cdots + u_{-2} + \tfrac{1}{2}u_{-1}, \quad \mu\sigma u_0 = \cdots + u_{-2} + u_{-1} + \tfrac{1}{2}u_0),$$
$$\mu\sigma u_1 = \cdots + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + \tfrac{1}{2}u_1.$$

Die Operation σ involvirt die Einführung einer willkürlichen Constante; ist diese passend gewählt, so ist

$$\sigma\delta u_0 = u_0, \quad \sigma\delta^2 u_{\frac{1}{2}} = \delta u_{\frac{1}{2}}, \quad \sigma\delta^3 u_0 = \delta^2 u_0, \ldots,$$

daher $\sigma = \delta^{-1}$. Für u ergeben sich die Formeln:

$$(1)\quad u = \mu\left(\sigma - \frac{1}{2}\delta + \frac{11}{720}\delta^3 - \frac{191}{60480}\delta^5 + \frac{2497}{3628800}\delta^7 - \cdots\right) hv,$$

$$(2)\quad u = \left(\sigma + \frac{1}{24}\delta - \frac{17}{5760}\delta^3 + \frac{367}{967680}\delta^5 - \frac{27859}{464486400}\delta^7 - \cdots\right) hv.$$

Man berechnet hv_0, $hv_1, \ldots$ oder $hv_{\frac{1}{2}}$, $hv_{\frac{3}{2}}, \ldots$ und ihre Differenzen, dann $\sigma hv_{\frac{1}{2}}$ oder σhv_0 mittels des durch die checking-table gegebenen Wertes von u_0 nach der Formel

$$\sigma hv_{\frac{1}{2}} = u_0 + \frac{1}{2}hv_0 + \frac{1}{2}\mu\delta hv_0 - \frac{11}{720}\mu\delta^3 hv_0 + \cdots$$

oder

$$\sigma hv_0 = u_0 - \frac{1}{24}\delta hv_0 + \frac{17}{5760}\delta^3 hv_0 - \cdots,$$

in ähnlicher Weise $\sigma hv_{n+\frac{1}{2}}$, $\sigma hv_{2n+\frac{1}{2}}, \ldots$ oder σhv_n, $\sigma hv_{2n}, \ldots$

Wenn die Bedingungen

$$\sigma h v_{n+\frac{1}{2}} - \sigma h v_{\frac{1}{2}} = h v_1 + h v_2 + \cdots + h v_n,$$
$$\sigma h v_{2n+\frac{1}{2}} - \sigma h v_{n+\frac{1}{2}} = h v_{n+1} + h v_{n+2} + \cdots + h v_{2n}$$

oder

$$\sigma h v_n - \sigma h v_0 = h v_{\frac{1}{2}} + h v_{\frac{3}{2}} + \cdots + h v_{n-\frac{1}{2}},$$
$$\sigma h v_{2n} - \sigma h v_n = h v_{n+\frac{1}{2}} + h v_{\frac{3}{2}} + \cdots + h v_{2n-\frac{1}{2}}$$

erfüllt sind, so wird $\sigma h v$ und dann u nach einer der obigen Formeln berechnet.

III. Bezeichnet Du die Ableitung von u, so ergiebt sich

$$u = \left(\sigma^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{240}\delta^2 + \frac{31}{60480}\delta^4 - \frac{289}{3628800}\delta^6 + \cdots\right) h^2 D^2 u;$$

mit dieser Formel kann die Tabelle von u weiter ausgedehnt werden, wenn u einer Gleichung von der Form

$$d^2 u/dx^2 = \psi(x, u)$$

genügt.

Man hat zunächst die Tafel der Werte von $h^2 w = h^2 d^2 u/dx^2$ nach dieser Gleichung unter Benutzung der aus der working-table bekannten Werte von u, dann die Tafel der Werte von $\sigma h^2 w$, $\sigma^2 h^2 w$ und dann u nach der Formel

$$u = \left(\sigma^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{240}\delta^2 + \frac{31}{60480}\delta^4 - \frac{289}{3628800}\delta^6 + \cdots\right) h^2 w$$

zu berechnen. Wz.

J. W. L. Glaisher. General summation-formulae in finite differences. Quart. J. **29**, 303-328 (1898).

In der symbolischen Euler'schen Formel

$$\Sigma \varphi(x) = \int \varphi(x + V)\, dx + C$$

ist V_n für V^n zu setzen,

$$V_1 = -\tfrac{1}{2},\ V_{2n+1} = 0\ (n > 0),\ V_{2n} = (-1)^{n-1} B_n;$$

B_n ist die n-te Bernoulli'sche Zahl. Dieser Summe werden die beiden Formen gegeben

$$C + \int \varphi(x)\, dx + V^1 \varphi(x) + \frac{V^2}{2!}\varphi'(x) + \frac{V^3}{3!}\varphi''(x) + \cdots,$$

$$C + x\varphi(V) + \frac{x^2}{2!}\varphi'(V) + \frac{x^3}{3!}\varphi''(V) + \cdots,$$

und es wird eine Anzahl specieller Formeln hergeleitet, indem x durch $x - \frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{3}$, $x - \frac{1}{4}$, … ersetzt wird.

In der Formel $\Sigma(-1)^x \varphi(x) = (-1)^{x-1} \int \varphi(x + e)\, dx \cdot U_0 + C$ bedeutet e einen Operator: $e^n U_0 = U_n$ und $U_0 = 0$, $U_1 = \frac{1}{2}$, für $n > 0$

$U_{2n} = (-1)^n (2^{2n} - 1) B_n, U_{2n+1} = 0$. Dann werden für $\Sigma (-1)^x \varphi(x)$ verschiedene Entwickelungen gegeben nach $x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{4}, \ldots$.

Bezeichnet

$$\Sigma_2 \varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(a+2) + \cdots + \varphi(x-4) + \varphi(x-2),$$
$$\Sigma_4 \varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(a+4) + \cdots \qquad + \varphi(x-4),$$

so ist

$$\Sigma_2 \varphi(x) = C + \frac{1}{2} \int \varphi(x-1)\, dx - \frac{(2-1) B_1}{2!} \varphi'(x-1)$$
$$+ \frac{(2^3 - 1) B_2}{4!} \varphi'''(x-1) + \frac{(2^5 - 1) B_3}{6!} \varphi^{V}(x-1) + \cdots$$
$$= C + \frac{1}{2} \int \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{2 B_1}{2!} \varphi'(x) - \frac{2^3 B_2}{4!} \varphi'''(x) + \cdots.$$

Entsprechende Formeln gelten für

$$\Sigma_4 \varphi(x), \ \Sigma_2 (-1)^{\frac{1}{2}x} \varphi(x), \ \Sigma_4 (-1)^x \varphi(x).$$

Die gefundenen Resultate sind enthalten in den allgemeineren

$$\Sigma \varphi(x) = \int \varphi(x - a + e)\, dx\, V_0(a) + C,$$

und

$$\Sigma (-1)^x \varphi(x) = (-1)^{x-1} \int \varphi(x - a + e)\, dx \cdot U_0(a) + C,$$

worin a constant und $e^n U_0(a) = U_n(a)$, $e^n V(a) = V_n(a)$,

$$V_n(x) = x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} B_1 x^{n-2}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} B_2 x^{n-4} + \cdots,$$
$$U_n(x) = \frac{1}{2} n x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!} (2^2 - 1) B_1 x^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} (2^4 - 1) B_2 x^{n-5} - \cdots$$

ist.

Für $\Sigma \varphi(x)$ gelten die Entwickelungen

$$C + \left\{(x-a)\varphi(e) + \frac{(x-a)^2}{2!} \varphi'(e) + \frac{(x-a)^3}{3!} \varphi''(e) + \cdots\right\}$$

und

$$C + (x-a)\varphi(V(a)) + \frac{(x-a)^2}{2!} \varphi'(V(a)) + \frac{(x-a)^3}{3!} \varphi''(V(a)) + \cdots,$$

worin $V^n(a)$ durch $V_n(a)$ zu ersetzen ist; ähnliche Formeln gelten für $\Sigma(-1)^x \varphi(x)$; dabei genügen die V und U den symbolischen Gleichungen

$$\varphi(e) V_0(x) = \varphi(e - a) V_0(x + a),$$
$$\varphi(e) U_0(x) = \varphi(e - a) U_0(x + a).$$

Wz.

N. Bougaïev. Sur la série analogue à la série de Lagrange. C. R. **131**, 793-794.

Ist z eine Grösse, welche der Gleichung

$$\varphi(a,x)+\psi(z,x)=0$$

genügt, ferner

$$S_n=\int_a^z[\varphi(a,x)+\psi(u,x)]^n f'(u)du$$

und

$$\varphi'=\frac{\partial\varphi}{\partial a},\ F=\varphi(a,x)+\psi(a,x),$$

so stellt Verf. folgende Entwickelung auf:

$$S_0=f(z)-f(a)=\frac{1}{\varphi'}Ff'+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'}F^2f'\right)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{da}\left[\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{da}\frac{(F^3f')}{\varphi'}\right]+\cdots.$$

Sr.

S. Pincherle. Sopra un problema d'interpolazione. Palermo Rend. **14**, 142-144.

I. Entwickelt man die Function

$$\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

in welcher $|b_n|<h\eta^n$, h und η positiv sind und $\eta<1$ ist, in die Potenzreihe $\sigma(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\cdots$, so sind die k_n mit den b_n durch Gleichungen von der Form

$$k_n=p_{n,n}b_n+p_{n,n+1}b_{n+1}+p_{n,n+2}b_{n+2}+\cdots$$

verbunden, in welchen die $p_{n,\nu}$ von den b_n unabhängig sind. Setzt man $b_n=z^n$ ($|z|<1$), so ergiebt sich: k_n ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $(1+z)^x$ nach Potenzen von x;

$$k_n=\frac{1}{n!}\log^n(1+z),$$

und $p_{n,\nu}$ ist der Coefficient von z^ν in der Entwickelung von $\log^n(1+z)$ in eine Potenzreihe von z.

II. Es sei, wenn n eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, eine transcendente ganze Function $\sigma(x)$ zu bestimmen, welche für $x=n$ den bestimmten Wert a_n annimmt, dann sind aus den unendlich vielen Gleichungen: $k_0+k_1n+k_2n^2+\cdots=a_n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) die Grössen k_n zu bestimmen, und es ist

$$\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n a_0\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

wo $\Delta^n a_0 = a_n - n a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0$ ist. Unter der Voraussetzung $|\Delta^n a_0| < h\eta^n, \eta < 1$ ergiebt sich dann:

Die Zahlen k_n, welche die Gleichungen

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \cdots = a_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

befriedigen, sind die absolut convergenten Reihen

$$k_n = p_{n,n} \Delta^n a_0 + p_{n,n+1} \Delta^{n+1} a_0 + p_{n,n+2} \Delta^{n+2} a_0 + \cdots,$$

worin $p_{\nu,n}$ der Coefficient von z^ν in der Entwickelung von $\log^n(1+z)$ in eine Potenzreihe von z ist. Wz.

W. Veltmann. Nachtrag zu meiner Herleitung der Interpolationsformeln. Zeitschr. f. Math. **45**, 337.

Wird $(x_m - x_0)(x_m - x_1) \cdots (x_m - x_g) = P_{mg}$ gesetzt, so ergiebt sich durch Auflösung der für $r_1, r_2, \ldots$ aufgestellten Gleichungen (vergl. F. d. M. **30**, 241, 1899) mit Determinanten

$$r_\nu = \frac{\delta_\nu y_\nu + \delta_{\nu-1} y_{\nu-1} + \cdots + \delta_1 y_1 + \delta_0 y_0}{1 \cdot P_{10} P_{21} \cdots P_{\nu-1\,\nu-2} P_{\nu\nu-1}}.$$

Hierin ist $\delta_\nu = 1 \cdot P_{10} P_{21} \ldots P_{\nu-1\,\nu-2}$; demnach ergiebt sich auch hier, dass der Teil mit y_ν gleich $y_\nu/(x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})$ ist. Wz.

Wl. Lewicky. Einige Bemerkungen zur Lagrange'schen Interpolationsformel. Lemberg math.-naturw. Section **4**, No. 2, 8 S.

O. Lübeck. Algebraische Analysis. Unterweisungen und Beispiele. Strelitz: Hittenkofer. 30 S. 8°.

Kapitel 2.

Besondere Reihen.

H. Wernecke. Arithmetische Reihen. Pr. (73), Friedr. Gymnas. Frankfurt a. O. 35 S. 4°.

Eine arithmetische Reihe heisst von der p-ten Ordnung, wenn ihr allgemeines (k-tes) Glied die Form $a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_p k^p$ hat, a_p heisst der Hauptfactor.

Zusammensetzung zweier oder mehrerer Reihen durch Addition, Subtraction oder Multiplication gleichstelliger Glieder, Division,

Setzt man 2, 3, ⋯ Reihen der natürlichen Zahlen, deren jede gegen die vorhergehende um 1 verschoben ist, durch Multiplication zusammen, so ergeben sich factorielle Reihen 2-ter, 3-ter, ⋯ Ordnung. — Sätze über ihre Summirung.

Haben zwei arithmetische Reihen gleicher Ordnung den Hauptfactor gleich, so stimmen die Glieder ihrer p-ten Differenzenreihe überein; sie sind gleich $(-1)^p a_p p!$

Anwendung auf Determinanten, z. B.: Lassen sich in einer Determinante von n^2 Gliedern $(p+1)$ Verticalreihen so anordnen, dass die in eine Horizontalreihe fallenden Glieder jener Reihen jedesmal eine arithmetische Reihe $(p-1)$-ter oder niedrigerer Ordnung bilden, so ist die Determinante gleich Null.

Die Summe von n auf einander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe dritter und ganz beliebiger Ordnung ist gleich dem Endgliede derjenigen Reihe nächst höherer Ordnung, deren erste Differenzenreihe jene n Glieder bilden. Wz.

H. Ruff. Zwei Zahlenreihen und deren Interpolation. Hoppe Arch. (2) 17, 426-441.

I. Die Glieder der arithmetisch-geometrischen Reihe $R(a_1, d, q)$ werden aus dem Anfangsgliede a_1, der Differenz d und dem Quotienten q nach der Formel $a_n = (a_{n-1}+d)q$ gebildet; es ist

$$(1) \qquad a_n = a_1 q^{n-1} + dq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

und

$$(2) \qquad S_n = \frac{a_1 B + Adq}{(q-1)^2},$$

wenn S_n die Summe der n Glieder der Reihe bedeutet und $A = q^n - 1 - n(q-1)$, $B = (q^n-1)(q-1)$ gesetzt wird.

Sollen zwischen a_k und a_{k+1} r Glieder eingeschaltet werden, so dass diese mit a_k und a_{k+1} in arithmetisch-geometrischer Progression stehen, so ist, wenn d, q die Bildungsgrössen der ursprünglichen Reihe, δ, x die entsprechenden Bildungsgrössen der interpolirten Reihe bedeuten:

$$a_{k+1} = a_k\, x^{r+1} + \delta x \frac{x^{r+1}-1}{x-1}.$$

Ist nun ausser a, d, q noch x gegeben, so ist

$$\delta = [dq + a_k\,(q - x^{r+1})]\,\frac{x-1}{x(x^{r+1}-1)};$$

ist $x = \sqrt[r+1]{q}$, so wird $\delta = dqm$.

II. Die Glieder der geometrisch-arithmetischen Reihe $R(a_1, q, d_1)$ werden aus dem Anfangsgliede a_1, dem Quotienten q und der Differenz d_1 nach der Formel $a_n = a_{n-1}\,q + d_1$ gebildet $(n = 2, 3, 4, \cdots)$; es ist

(3) $$a_n = a_1 q^{n-1} + d_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1},$$

(4) $$S_n = \frac{a_1 B + A d_1}{(q-1)^2}.$$

Sollen zwischen a_k und a_{k+1} wieder r Glieder eingeschaltet werden, welche mit a_k und a_{k+1} in geometrisch-arithmetischer Progression stehen, so ist

$$a_{k+1} = a_k x^{r+1} + \delta \frac{x^{r+1} - 1}{x - 1}$$

und

$$\delta = m x [a_k(q - x^{r+1}) + d_1],$$

für $x = \sqrt[r+1]{q}$ ergiebt sich $\delta = d_1 m x$.

III. Für $d_1 = dq$ stimmen (1), (2) mit (3), (4) überein: Jede arithmetisch-geometrische Reihe mit den Bildungsgrössen a_1, d, q ist zugleich eine geometrisch-arithmetische Reihe mit den Bildungsgrössen $a_1, q, d_1 = dq$.

Eine arithmetisch-geometrische Reihe ist einer geometrisch-arithmetischen congruent (d. h. die gleichstelligen Glieder beider Reihen sind gleich), wenn α) die Anfangsglieder, β) die Quotienten der beiden Reihen einander gleich sind, und wenn γ) die Differenz der arithmetisch-geometrischen Reihe dem q-ten Theile der Differenz der geometrisch-arithmetischen Reihe gleich ist.

Zwei Reihen $a_1, \cdots, a_n$ und $b_1, \cdots, b_n$ heissen „einander invers", wenn $a_{1+\lambda} = b_{n-\lambda}$ ist $(\lambda = 0, 1, \cdots, n)$.

Eine arithmetisch-geometrische und eine geometrisch-arithmetische Reihe sind einander invers, wenn α) das erste Glied der einen gleich dem ersten Gliede der andern, β) der Quotient der einen gleich dem reciproken Werte der andern, γ) die Differenz der einen gleich dem negativen Werte der Differenz der andern ist. Wz.

E. Busche. Eine Bemerkung über Binomialcoefficienten. Hamb. Mitt. **3**, 379-382 (1899).

Beweis des Satzes: „Der Binomialcoefficient $\binom{n}{k}$ ist für $k > 1$ gleich dem symbolischen Ausdruck

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\frac{(n-s_1)(n-s_1-1)(n-s_1-2)\cdots(n-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\right\}_n,$$

wo nach Ausführung der Multiplication im Zähler jede Potenz s_1^i durch $s_i = \Sigma x^i \, (x = 1, 2, \cdots, n)$ zu ersetzen und jedes von s_1 freie Glied mit n zu multipliciren ist." Für $k < 0, k = 0$ und $k = 1$ wird der symbolische Ausdruck bezw. gleich $0, 1, n$ gesetzt.

Der Beweis zeigt zunächst, dass

$$\left\{ {n \atop k-1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n+1 \atop k} \right\}$$

ist; hieraus ergiebt sich dann

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \binom{n}{k}.$$

Der Satz giebt zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der Binomialcoefficienten Veranlassung. Lp.

V. JUNG. **Ueber den polynomischen und den binomischen Lehrsatz und über einige Identitäten, die auf ihnen beruhen.** Časopis **29**, 59-68. (Böhmisch.)

Der Verf. liefert einen directen Beweis des polynomischen Lehrsatzes und gelangt mit Hülfe der Regel von der Multiplication der Exponentialfunctionen zu einigen Identitäten. Sda.

LÉMERAY. **Sur certains nombres combinatoires.** Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 99-102.

Die etwas unfertige Note beschäftigt sich mit den Eigenschaften gewisser Zahlen, die durch ein recurrentes Bildungsgesetz definirt werden. Lp.

L. SAALSCHÜTZ. **Note zum Artikel „Erweiterungen des Factoriellensatzes“.** Zeitschr. f. Math. **45**, 333-336.

Unter Benutzung einer Bemerkung von Heymann lässt sich die vom Verf. früher abgeleitete Formel (7) auch folgendermassen begründen.

I. Es ist

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(\mu)\varphi_{n-k}(\nu) = \varphi_n(\mu+\nu),$$

wo gesetzt ist

$$(2)\qquad \varphi_k(\mu) = \mu \prod_{r=1}^{k-1} (\mu + r + k\gamma) : k!,\ \varphi_0(\mu) = 1,\ \varphi_1(\mu) = \mu.$$

Setzt man

$$(3)\qquad \Phi(x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\mu) x^k,$$

so ist

$$(4)\qquad \Phi(x,\mu)\,\Phi(x,\nu) = \Phi(x,\mu+\nu),$$

und wenn

$$(5)\qquad \Phi(x,\mu) = y^{\mu},$$

so ist

$$f_k(\mu) = \prod_{r=0}^{k-1} (\mu + r + k\gamma) : k!\,,\ f_0(\mu) = 1.$$

Es sei

$$F(x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu) x^k,$$

dann ist

$$f_k(\mu) = \frac{(k+1)\varphi_{k+1}(\mu - \gamma - 1)}{\mu - \gamma - 1}$$

und

$$F(x,\mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{d\Phi(x, \mu - \gamma - 1)}{dx},$$

$$F(x,\mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{dy^{\mu-\gamma-1}}{dx},$$

daher

(7) $$F(x,\mu)\Phi(x,\nu) = F(x, \mu + \nu).$$

II. $$\varphi_k(1+\gamma) = \varphi_{k+1}(1);$$

$$y^{\gamma+1} = \Phi(x, \gamma + 1) = 1 + \varphi_2(1)x + \varphi_3(1)x^2 + \varphi_4(1)x^3 + \cdots,$$

(10) $$y = \Phi(x,1) = 1 + x + \varphi_2(1)x^2 + \varphi_3(1)x^3 \cdots,$$

(11) $$y - xy^{1+\gamma} - 1 = 0.$$

Diejenige Wurzel dieser Gleichung, für welche $\lim\limits_{x=0} \frac{y-1}{x} = 1$ ist, wird durch (10) dargestellt, beliebige Potenzen derselben durch (3) und (5).

So oft sich (11) algebraisch lösen lässt, lässt sich $y = \Phi(x,1)$ und (12) $F(x,0) = 1/\gamma + 1 - \gamma\Phi(x,1)$ in geschlossenem Ausdruck darstellen; dies ist für $\gamma = 1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2; 2, 3, -4, -3; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}$ der Fall.

Die Convergenzbedingungen lassen sich in $\frac{|1+\gamma|^{1+\gamma}}{|\gamma|^{\gamma}} . x \overline{\gtrless} 1$ zusammenfassen; der Grenzwert 1 darf erreicht werden für $\gamma \geqq 0$, wenn x negativ, für $\gamma < -1$, wenn x positiv, für $0 > \gamma > -1$, wenn $(-1)^s x^n$ negativ ist. Wz.

A. Tagiuri. Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi. Periodico di Mat. (2) 3, 1-12.

A. Tagiuri. Successioni di numeri interi positivi ciascuno dei quali è una funzione lineare dei due precedenti. Ibid. 97-114.

In dem ersten Aufsatze werden Zahlen U_i betrachtet, die durch das recurrente Gesetz $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ verbunden sind. Nimmt man als Anfangsglieder die Zahlen a und b als gegeben an, so ist die Reihe bestimmt. Die für $a = 1, b = 1$ sich ergebende Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8,

13, ⋯ wird als Reihe u_n bezeichnet. Es findet sich leicht $U_n = au_{n-2} + bu_{n-1}$. Aus diesem Gesetze werden zahlreiche Eigenschaften der Zahlen U_n und u_n hergeleitet, ohne dass die bekannte Entstehung der Zahlen u_n als Zähler und Nenner der Kettenbruchentwickelung $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$ benutzt wird.

Der zweite Aufsatz dehnt die Betrachtung auf die Zahlen V_i aus, die dem Recursionsgesetze gehorchen $V_n = h V_{n-1} + l V_{n-2}$. Als Reihe v_i wird hier diejenige definirt, welche mit $v_1 = 1$, $v_2 = h$ beginnt. Die Zahlen V_i hängen mit den Zahlen v_i durch die Gleichung zusammen: $V_{n+s} = v_{s+1} V_n + l v_s V_{n+1}$. — Die aufgefundenen Eigenschaften, die zum Theil zahlentheoretischer Natur sind und quadratische Formen betreffen, können hier nicht einzeln aufgezählt werden. Lp.

A. Lodge. An approximate expression for the value of
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r}.$$
Messenger **30**, 103-107.

Der fragliche Ausdruck lautet:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} = 0{,}57721566490 - \frac{1}{2}\log_e r(r+1) + \frac{1}{6r(r+1) + 1{,}2};$$
die Annäherung ist sehr gross (für $r = 7$ bis zur 7-ten, für $r = 100$ bis zur 10-ten Decimalstelle). Wbg.

A. Aubry. Sobre la fórmula de Wallis. Progreso mat. (2) **2**, 16-22.

Es handelt sich um die Formel von Wallis, die den Wert von π giebt. Der Verf. beschreibt die Methode, durch welche Wallis diese Formel bewiesen hat. Tx. (Lp.)

P. Mansion. Sur une formule combinatoire. Mathesis (2) **10**, 159-160.

P. Mansion. Aire des sinusoïdes et formule de Wallis. Ibid. 183-188.

P. Mansion. Inégalités logarithmiques. Ibid. 223-224.

P. Mansion. Formule de Stirling. Ibid. 265-267.

Entwickelung bekannter Ableitungen der Formeln von Wallis und Stirling ohne Zuhülfenahme der eigentlichen Integralrechnung.

Mn. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. Fundamental theorems relating to the Bernoullian numbers. (Second paper.) Messenger **29**, 129-142.

Verf. berichtigt einen Fehler, der in einer früheren Arbeit mit demselben Titel (Messenger **29**, 49—63) untergelaufen ist: das dort aufgestellte Theorem $\frac{B_n}{n} \equiv (-1)^{tj} \frac{B_{n-tj}}{n-tj}$ (mod. p) gilt nur, wenn p kein „Staudt'scher Factor“ von B_n ist. Ferner benutzt er die Gelegenheit, um die aus dem allgemeinen Theorem für die ersten 5 Primzahlen sich ergebenden Formeln zu entwickeln und das Theorem von Staudt abzuleiten. Wbg.

Fr. Rogel. Question 14194. Ed. Times **72**, 125-126.

Beweis der Formeln:

$$S_r = q + \sum_{k=3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}}{k!} (2\pi m)^{k-1} \sum_{\nu=1,2,\dots}^{q} B_k(\nu)\nu^{r-k},$$

wo $S_r = \Sigma t^r$, t Divisor vom $m \leqq q$, B_k die Bernoulli'sche Function k-ter Ordnung.

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = m + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}}{k.k!} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^k B_k(m+1) B_k(n),$$

wo $E\left(\frac{m}{n}\right)$ die grösste ganze Zahl $\leqq m/n$. Lp.

C. E. Wasteels. Over de Fibonacci-getallen. Vlaamsch natuurk. congr. 1899, 25-27.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. G. Hagen. Synopsis der höheren Mathematik. Dritter Band. Differential- und Integralrechnung. Lieferung 1 u. 2. Berlin: Felix L. Dames. 128 S. gr. 4°.

Nach einer sechsjährigen Pause hat der Verf. den ersten beiden Bänden seiner Synopsis zwei Lieferungen des dritten Bandes folgen lassen. Der Inhalt erhellt aus den folgenden Titeln:

I. Abschnitt. Die Elemente der Differentialrechnung. 1. Hauptstück. Die Anfänge der Infinitesimalrechnung. A) Geschichtliches. B) Die Auffassung des Unendlichkleinen. C) Bezeichnung und Benennung. 2. Hauptstück. Der Differentialquotient. A) Differentialquotienten erster Ordnung. B) Differentialquotienten höherer Ordnung. C) Mittelwerte und Grenzwerte. 3. Hauptstück. Das Differentiiren. A) Entwickelte Functionen. B) Unentwickelte Functionen. 4. Hauptstück. Vertauschung der Veränderlichen.

II. Abschnitt. Die Elemente der Integralrechnung. 1. Hauptstück. Definitionen des bestimmten Integrals. A) Geschichtliche Bemerkungen und Bezeichnungen. B) Grundbegriffe. C) Uneigentliche und singuläre Integrale. D) Unbestimmte Grenzen. E) Wiederholte und mehrfache Integrale. F) Complexe Veränderliche. 2. Hauptstück. Umformungen des bestimmten Integrals. A) Einführung neuer Veränderlichen. B) Differentiation unter dem Integralzeichen. C) Partielle Integration. D) Aenderung der Grenzen. 3. Hauptstück. Das Integriren der einfachsten algebraischen Functionen. A) Die rationalen Functionen. B) Die einfachsten irrationalen Functionen. 4. Hauptstück. Das Integriren der einfachsten transcendenten Functionen. A) Logarithmische Functionen.

B) Exponentialfunctionen. C) Kreisfunctionen. D) Gemischte Functionen. 5. Hauptstück. Näherungsweise Integration. A) Integration durch Reihenentwickelung. B) Mittelwertsätze. C) Quadratur. D) Umkehrung der Quadratur. E) Mechanische Hülfsmittel.

III. Abschnitt. Neuere Rechnungsarten. 1. Hauptstück. Derivation mit allgemeinem Zeiger. 2. Hauptstück. Cauchy's Residuencalcul. 3. Hauptstück. Quotial und Instaural. 4. Hauptstück. Aufzählung verschiedener Methoden kleineren Umfanges. A) Die Exponentialfunctionen höherer Ordnung. B) Cauchy's Indexcalcul. C) Erweiterung der Differenzenrechnung nach Oettinger und McClintock. D) Die logarithmischen Methoden von Bergbohm und Oltramare. E) Logischer Algorithmus.

IV. Abschnitt. Die Transformationsgruppen. 1. Hauptstück. Darstellung der Transformationen und Gruppen durch Gleichungen. 2. Hauptstück. Definitionen besonderer Eigenschaften. A) Vertauschbarkeit. B) Gleiche Zusammensetzung und Aehnlichkeit. C) Transitivität und Primitivität. D) Der Rang der Gruppe. 3. Hauptstück. Die einer Gruppe zugehörigen Gruppen. A) Untergruppen. B) Die Parametergruppe. C) Die adjungirte Gruppe. 4. Hauptstück. Die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie. 5. Hauptstück. Invariante Functionen und Gebilde. A) Allgemeine Begriffe. B) Mannigfaltigkeiten, welche infinitesimale Transformationen gestatten. C) Mannigfaltigkeiten, welche eine Gruppe gestatten. D) Invariante Scharen von Mannigfaltigkeiten. 6. Hauptstück. Bestimmung der Transformationsgruppen in beschränkten Fällen. A) Beschränkte Anzahl der Veränderlichen. B) Beschränkte Anzahl der Parameter. 7. Hauptstück. Die projectiven Transformationsgruppen. A) Analytische Darstellung. B) Typische Formen. C) Invariante Gebilde.

Ueber die Vorzüge und die Schwächen der Hagen'schen Synopsis vergleiche man die Anzeigen der beiden ersten Bände (F. d. M. **22**, 1253, 1890 und **25**, 1905, 1894). Durch die inzwischen begründete Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften ist der langsam fortschreitenden Synopsis eine überlegene und zuverlässigere Parallelerscheinung von bedeutend weiterem Umfange und tieferem Eingehen auf die Sache an die Seite getreten. Der von den bedeutendsten Kräften geförderten Encyklopädie dürfte daher von den meisten Mathematikern der Vorzug gegeben werden. Lp.

N. B. Delaunay. Einführung in das selbständige Studium der höheren Mathematik und Mechanik. Mit 321 Fig. im Text. St. Petersburg. 496 S. 8°. (Russisch.)

Der Verf. will denen ein Lehrbuch darbieten, welche, obschon nicht Mathematiker von Fach, im Laufe ihrer besonderen Studien die Notwendigkeit fühlen, Mathematik zu studiren, und dann auch tiefere Einsicht in sie erlangen wollen. In der Einleitung werden die wichtigsten Formeln der Algebra, Geometrie und Trigonometrie zusammengestellt

und die Grundlagen der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes gegeben. Teil II behandelt die Infinitesimalrechnung; zuerst die Differentialrechnung und ihre analytischen und geometrischen Anwendungen (Kap. I), dann die Integralrechnung (unbestimmte Integrale, Quadratur, Kubatur u. s. w.), die Integration der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen (die einfachsten Fälle) nebst den Hauptbegriffen der Flächentheorie. Teil III ist der analytischen Mechanik gewidmet (S. 301—398). Teil IV giebt endlich eine flüchtige Uebersicht über die mathematischen Wissenschaften in ihrem Zusammenhang, sowie über die Litteratur der reinen Mathematik, nämlich eine Liste der wichtigsten Lehrbücher und der klassischen Werke, aus denen der Leser weitere Kenntnisse erlangen kann. Leider ist die Auswahl der empfohlenen Bücher etwas zufällig, sowie überhaupt die Darstellung manchmal oberflächlich. Im Anhang sind ungefähr 300 Aufgaben und Beispiele zu verschiedenen Kapiteln des Buches zusammengestellt. Si.

W. P. Ermakow. **Integralrechnung. Vorlesungen am polytechnischen Institut Kiew, ausgearbeitet von S. Scheinberg und A. Roschkowski. Teil I: Integration der Functionen. Teil II: Integration der Differentialgleichungen.** Kiew. VII + 200 + 144 S. (Russisch.)

Dem Inhalte nach gehört dieses Lehrbuch, sowie auch die Vorlesungen über die Differentialrechnung (vergl. F. d. M. **30**, 263) der formalen Richtung an (nach der Klassification von Bohlmann). Auf tiefere Begründung des Integralbegriffs und auf die Beweise der Existenz der Integrale wird verzichtet; dagegen tritt die formale Rechnung in den Vordergrund. Geometrische Anwendungen sind ausführlich behandelt, mechanische weit weniger; die Forderungen der Physik werden fast gar nicht beachtet, was doch in einem Lehrbuche für Techniker wichtig wäre. An sich aber ist die Darstellung sehr einfach, und die Lehren werden an vielen Beispielen erläutert.

I. Kapitel. 1. Unbestimmte Integrale. 2. Bestimmte Integrale (Haupteigenschaften, Mittelwertsätze, Grenzwerte). 3. Geometrische Anwendungen der einfachen bestimmten Integrale. 4. Mehrfache Integrale (geometrische Deutung und Anwendungen, Einführung neuer Veränderlicher). 5. Ergänzungen (Formel von Simpson, Differentiation und Integration der bestimmten Integrale, Bestimmung des Schwerpunkts, Guldin'sche Sätze, Trägheitsmoment). Teil II. Kapitel 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung der Form $y' = F(x,y)$. 2. Differentialgleichungen der Form $F(x,y,y')=0$ (Integrirbarkeit, Clairaut's Gleichung, Singuläre Lösungen). 3. Differentialgleichungen höherer Ordnungen (lineare Gleichungen, Entwickelung der Integrale nach Fuchs, Reductionsfälle). 4. Simultane Differentialgleichungen (besonders lineare in 3 und 4 Veränderlichen). 5. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Si.

J. A. Serret. Cours de calcul différentiel et intégral. Cinquième édition. Augmentée d'une note sur la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite. Paris: Gauthier-Villars. 8°.

Tome premier. Calcul différentiel. XIII + 617 S.

Tome second. Calcul intégral. XIII + 904 S.

Nachdem in Deutschland schon die zweite bedeutend geänderte Bearbeitung des Serret'schen Werkes über die Differential- und Integralrechnung erschienen ist, haben die Erben des scharfsinnigen französischen Mathematikers das Original unverändert abdrucken lassen. Offenbar sind die Vorzüge des Werkes, welche Harnack in der Einleitung der von ihm veranstalteten Uebersetzung nach allen Richtungen hin hervorgehoben hat (vergl. F. d. M. **16**, 224-226, 1884), derartig, dass auch die mathematische Jugend in Frankreich noch immer gern zu der lichtvollen Darstellung des Werkes die Zuflucht nimmt, obgleich die jetzigen Anschauungen schärfere Begriffsbestimmungen verlangen. Darboux, ein Schüler Serret's um 1864, sagt in seiner Anzeige dieser neuen Auflage (Darboux Bull. (2) **34**, 195): „Wir erinnern uns des Einflusses, den diese Vorlesungen auf den Unterricht gehabt haben, und der Beliebtheit, deren sie sich erfreuten. Diese Beliebtheit war nicht das Ergebnis einer flüchtigen Eingenommenheit; der Erfolg, den die Vorlesungen Serret's erlangt haben, als sie zu Büchern vereinigt wurden, die Uebersetzungen in fremde Sprachen, die sich folgenden Auflagen sind der beste Beweis, dass sie wirklichen Bedürfnissen entsprachen und auch jetzt noch entsprechen. Die Wissenschaft ist reicher geworden, aber die Grundlagen und die Principien bleiben die nämlichen. Man findet sie klar und methodisch in dem vorliegenden Lehrbuch dargelegt.“ — Die als Anhang abgedruckte „Note sur la théorie des fonctions elliptiques“ von Hermite (S. 735-904) ergänzt den Inhalt gemäss den die Kenntnis dieser Transcendenten fordernden neueren französischen Prüfungsvorschriften. Zuerst als Anhang zum „Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral“ von Lacroix erschienen, bietet dieser Abriss der Theorie der elliptischen Functionen einen geistvollen Ueberblick über die Hauptfragen des ausgedehnten Gebietes. Lp.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studirenden der Naturwissenschaften bearbeitet. Unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von G. C. Schmidt. Mit 118 Figuren. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. VII + 476 S. 8°.

Das holländische Original dieses Lehrbuches ist in F. d. M. **14**, 201, 1882, angezeigt worden, die russische Uebersetzung in **29**, 234, 1898.

Von denselben Grundlagen ausgehend wie Nernst und Schoenflies in ihrer bekannten „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften“, schliesst sich Lorentz enger an die historische

Entwickelung an, die von Leibniz und seinen Nachfolgern ausging, und schreitet viel weiter vor als die beiden deutschen Autoren. Mit der ersten anschaulichen Auffassung der Begriffe beginnend, führt er den Leser später zur schärferen Fassung derselben und leistet erstaunlich viel auf diesem Wege, so dass sein Buch in der That einen ersten Cursus der Differential- und Integralrechnung einschliesslich der Anfangsgründe der analytischen Geometrie umfasst. Da die Grundzüge der Theorie der Krümmung der Oberflächen, der Fourier'schen Reihen, der partiellen Differentialgleichungen gelehrt werden, so ist, wie man sieht, der Verf. durchaus nicht bei den ersten Elementen stehen geblieben. Durch Anwendung der erlangten Kenntnisse auf viele Beispiele aus der Geometrie und der Physik und auf Uebungsaufgaben, deren Lösungen am Schlusse zusammengestellt sind, erhalten die abgeleiteten abstracten Begriffe sofort einen concreten Inhalt.

Für die deutsche Ausgabe ist auf Wunsch des Uebersetzers das recht elementare Kapitel über die goniometrischen Functionen und deren Anwendungen aufgenommen worden, d. h. ein Abriss der ebenen und der sphärischen Trigonometrie, für welchen Einschub Ref. eigentlich keinen Grund sieht. Sonst ist die Uebersetzung gut lesbar, abgesehen von einzelnen Wendungen, die sonst nicht üblich sind. Lp.

F. Glanville Taylor. **An introduction to the differential and integral calculus and differential equations.** London: Longmans, Green & Co. XXIV + 568 S. [Phil. Mag. (5) **49**, 411.]

Das Buch ist in drei Hauptabschnitte geteilt: Differentialrechnung, S. 1-303, Integralrechnung, S. 305-491, Differentialgleichungen (gewöhnliche), S. 493-564. Die Erläuterungen und Anwendungen sind hauptsächlich aus der Geometrie entnommen, doch sind auch die Mechanik und die Physik berücksichtigt. Der Verf. hat sich bemüht, den Gegenstand so einfach wie möglich zu gestalten, und hat eine grosse Zahl gelöster und nicht gelöster Uebungsaufgaben eingeflochten, so dass ein fleissiger Student nicht ermangeln dürfte, Geschick in der Handhabung der Formeln zu erlangen. Der Standpunkt des Verf. ist derjenige der vorkritischen Periode; so wird bei der Differentiation unendlicher Reihen keine Rücksicht auf den Unterschied genommen zwischen der Differentiation der Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern und derjenigen einer unendlichen Anzahl. Demgemäss ist die Behandlung des Unendlichkleinen nicht befriedigend. Auch in einem elementaren Werke darf ein Ausspruch wie der folgende nicht vorkommen (S. 75): „Unter unendlich klein verstehen wir kleiner als jede vorstellbare Grösse, ohne dass dieselbe geradezu Null ist.“ Trotz alledem enthält das Kapitel, in welchem dieser Ausspruch vorkommt, manches Lehrreiche. Gbs. (Lp.)

L. Kiepert. Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. II. Teil: Integral-Rechnung. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Max Stegemann. Mit 139 Figuren im Texte. Hannover: Helwingsche Verlagsbuchhandlung. XX u. 617 S. 8°.

Zu der neuen Auflage der Integralrechnung dieses weit verbreiteten Lehrbuches, dessen frühere Auflagen regelmässige Besprechung im Jahrbuche gefunden haben, ist zu bemerken, dass nur geringe Aenderungen stattgefunden haben. Hinzugetreten ist unter anderem ein Abschnitt über die mechanische Quadratur nach Gauss, ein Abschnitt, den Referent nach seinen persönlichen Erfahrungen über die Wünsche der technischen Professoren auf die Formeln von Tschebyschew hätte ausgedehnt sehen mögen, der überhaupt noch mehr nach den principiellen Gesichtspunkten hätte entwickelt werden können. Lp.

W. Nernst und A. Schoenflies. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. (Russisch.)

Von dem trefflichen Lehrbuche von Nernst und Schoenflies sind zu gleicher Zeit zwei russische Uebersetzungen erschienen, und zwar beide in Moskau. Die eine von Dobrosserdow, redigirt von A. Wassiliew, die andere von Dukelski, redigirt von A. Grusintzew und W. Thimoteïew. Si.

Wjera Schiff. Sbornik upraschnenij i sadatsch po differencialnomy i integralnomy ustschislenijam. (Sammlung von Uebungen und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung). I. Teil. (2. Ausgabe.) VIII + 397 S. II. Teil. VI + 594 S. St. Petersburg. 1899 u. 1900.

Eine überaus reichhaltige Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungen. Die Lösungen füllen im ersten Teile 263 und im zweiten 436 Seiten. Die Aufgaben des ersten Teiles behandeln die Berechnung von Grenzwerten und von gewöhnlichen und partiellen Differentialquotienten, die Einführung neuer Veränderlicher, die Elimination willkürlicher Constanten und Functionen durch Differentiation, die Nullstellen von Functionen, die Entwickelung von Functionen in Reihen, Ausdrücke, die in unbestimmter Form erscheinen, Maxima und Minima von Functionen einer und mehrerer Veränderlicher, Berechnung von Integralen. Der zweite Teil enthält Anwendungen auf ebene und Raumcurven, Flächen und die Berechnung von Körpern, Oberflächen und Schwerpunkten, sowie Aufgaben über die Integration vollständiger Differentiale, gewöhnlicher und linearer partieller Differentialgleichungen. El.

O. SCHLÖMILCH. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage. Bearbeitet von R. Henke. Mit Holzschnitten im Texte. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 448 S. gr. 8°.

Die dritte Auflage dieses Teiles des Schlömilch'schen Uebungsbuches ist im Jahrbuche **14**, 197, 1882, angezeigt worden. Dass erst achtzehn Jahre nach dem Erscheinen dieser Auflagen eine neue notwendig geworden ist, während die drei ersten sich in den kurzen Zwischenräumen 1870, 1874, 1882 folgten, hängt wohl damit zusammen, dass Schlömilch seinen Lehrstuhl an der technischen Hochschule in Dresden mit einer Verwaltungsstelle im Ministerium vertauscht hatte, dass also eine unmittelbare Einwirkung des Verf. auf die studirende Jugend fehlte. Es ist erfreulich, dass der neue Bearbeiter den deutschen Jüngern der mathematischen Wissenschaft die reichhaltige Sammlung erhalten hat, deren Brauchbarkeit und anregende Einwirkung in dreissig Jahren an einer Reihe von Generationen erprobt ist. Die getroffenen Aenderungen, die zumeist in einer anderen Anordnung des Stoffes bestehen, lassen die Folge der Aufgaben natürlicher erscheinen. Eine Vermehrung hat nur in geringem Grade stattgefunden, so z. B. in § 26, wo 11 Beispiele zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale gegeben sind. So möge denn die neue Aufgabe das Andenken des um den mathematischen Hochschulunterricht verdienten Verf. auch in der nächsten Generation der Studenten aufrecht erhalten! Lp.

F. FRENET. Sammlung der Aufgaben aus der Infinitesimalrechnung. Uebersetzt von A. Nenaschew. Moskau. 8°. 244 S. (Russisch.)

Unter anderen Lehrbüchern, die in letzter Zeit ins Russische übertragen wurden, ist auch die bekannte Aufgabensammlung von Frenet erschienen. Si.

G. FUBINI. Sulla teoria dei limiti. Batt. G. **38**, 72-76.

Beweis des Satzes:

Wenn $\lim\limits_{x=a} f(x,y)$ für einen beliebigen Wert von y in der Umgebung von b und $\lim\limits_{y=b} f(x,y)$ für einen beliebigen Wert von x in der Umgebung von a existirt, wenn ferner $f(x,y)$ gleichförmig gegen die eine oder die andere dieser beiden Grenzen convergirt, so existiren die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x=a}\lim\limits_{y=b} f(x,y)$ und $\lim\limits_{y=b}\lim\limits_{x=a} f(x,y)$ und sind einander gleich.

Unter der gleichförmigen Convergenz von $f(x,y)$ gegen einen der beiden Grenzwerte soll verstanden werden, dass von einer gewissen Stelle ab $|f(x,y) - \lim\limits_{x=a} f(x,y)|$, bezw. $|f(x,y) - \lim\limits_{y=b} f(x,z)|$ kleiner als eine beliebig klein angenommene Zahl ist.

Von dem Satze werden einige Anwendungen gemacht, und am Schlusse wird der Satz selbst in leicht erkennbarer Weise für Functionen von n Veränderlichen ausgesprochen. Hau.

Weitere Litteratur.

F. d'Arcais. Corso del calcolo infinitesimale. Vol. II, parte 1. 2ª edizione, con aggiunte e modificazioni. Padova: Draghi. 368 S. 8°.

E. Bortolotti. Lezioni di calcolo infinitesimale dettate nell' anno accademico 1899-1900 nella R. Università di Modena. Modena: Pizzolotti. 621 S. 8°.

Em. v. Budisavljević. Leitfaden für den Unterricht der höheren Mathematik an der k. u. k. Artillerie- und der Pionier-Cadettenschule. Wien: L. W. Seidel & Sohn. XI + 618 S. gr. 8°.

H. Cox. Rudimentary treatise on integral calculus. New edition. London: Lockwood. 136 S. 12mo (Weale's series).

H. Dölp. Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. 8. Aufl. von E. Netto. Giessen: J. Ricker. IV u. 216 S. gr. 8°.

A. Fuhrmann. Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. (In 6 Teilen.) 1. Teil. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. 2. Aufl. Berlin: W. Ernst & Sohn. XVIII + 239 S. gr. 8°.

J. Graham. An elementary treatise on calculus for engineering students, with numerous examples and problems worked out. Second edition. London: Spon. 288 S. 12mo.

Rob. Grassmann. Die Functionenlehre namentlich die Differential- und Integralrechnung in strenger Formelentwickelung. (Neue Titel-Ausg. von: Die Folgelehre). Stettin: R. Grassmann. XII + 189 S. gr. 8°.
S. F. d. M. **26**, 106, 1895.

Rob. Grassmann. Die Differential- und Integralrechnung bei Vermeidung der Trugschlüsse eine höchst leichte Wissenschaft. Stettin: R. Grassmann. 44 S. 12°.

E. Hayes. Calculus, with applications; an introduction to the mathematical treatment of science.. Boston: Allyn & Bacon. VII + 162 S. 12mo.

E. Holst. Laerebog i Infinitesimalregnings Elementer. 1ste Hefte. Kristiania.

L. Lavaggi. Calcolo infinitesimale. Lezioni dettate nell' anno 1899-1900 nella R. Università di Parma. Compilate per cura di S. Buroni. Parma: Zafferri. 815 S. 8°.

H. B. Lübsen. Einleitung in die Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung). 8. Aufl. Leipzig. IV + 383 S. 8°.

J. W. A. Young and C. E. Linebarger. The elements of the differential and integral calculus based on „Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von W. Nernst und A. Schoenflies.“ New York: Appleton. XVII + 410 S. 8°.

F. W. Nichols. Differential and integral calculus, with applications; for colleges, universities, and technical schools. Boston: Heath. 405 S. 12mo.

A. Paromenski. Differential- und Integralrechnung und deren Anwendungen auf die Analysis und Geometrie. 2. Aufl. 8°. 436 S. (Russ.)

Ernesto Pascal. Repertorium der höheren Mathematik. Polnische Uebersetzung von S. Dickstein. I. Band: Analysis. Warschau. 1900. 8°. XIII u. 556 S.

E. Rouché et L. Lévy. Analyse infinitésimale, à l'usage des ingénieurs. Vol. I. Calcul différentiel. Paris: Gauthier-Villars. VIII + 559 S. 8°. (Encyclopédie industrielle).

E. Sailer. Die Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, aus der analytischen Geometrie, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den k. bayerischen humanistischen und technischen Unterrichtsanstalten in den Jahren 1873 bis 1893 gestellt wurden. München: Th. Ackermann. 187 S. gr. 8°.

J. T. Townsend. Ueber den Begriff und die Anwendung des Doppellimes. Diss. Göttingen. VII + 78 S. 8°.

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima.)

A. Macfarlane. Differentiation in the quaternion analysis. Dublin Proc. (3) **6**, 199-215.

Die Quelle der Schwierigkeit bezüglich der räumlichen Differentiation, wie dieselbe von Hamilton dargestellt wird, liegt in dem nicht-commutativen Charakter der Quaternionen-Multiplication. Die Gleichung $e^{q+q'} = e^q e^{q'}$ ist nach Hamilton nur wahr, wenn q und q' coplanar sind; wenn jedoch die n-te Potenz von $q+q'$ nach der Formel für das Binom scalarer Grössen gebildet wird, immer mit Unterordnung unter die Bedingung, dass in jedem Teilproducte q vor q' angeordnet bleibt, dann behält das für den Raum verallgemeinerte Exponentialtheorem dieselbe Form wie für die Ebene. Die Gründe für die Behauptung, dass auf diese Weise das Exponentialtheorem zu verallgemeinern ist, werden angegeben, und es wird gezeigt, dass bei Annahme dieser Verallgemeinerung, falls B ein Vectorlogarithmus ist,

$$\frac{dB^n}{dB} = nB^{n-1}, \frac{dB^n}{dt} = nB^{n-1}\frac{dB}{dt}$$

ist, wo t eine scalare Veränderliche bezeichnet. Das Differential eines Productes, z. B. AB^2, aus Vectorlogarithmen wird als $B^2dA + 2ABdB$ gefunden, indem das Differential am Ende geschrieben wird, da ja die natürliche Anordnung der Logarithmen A, B, dA, dB ist, und das Auftreten einer natürlichen Anordnung die Logarithmen unterscheidet. Danach wird der Taylor'sche Satz für solche Vectoren verallgemeinert, und es werden mehrere Transformationen, welche die Differentiation einschliessen, betrachtet, wobei Hamilton's Operator ∇ in einiger Ausführlichkeit behandelt wird. Der Artikel verdient Beachtung von allen, die sich für Quaternionen interessiren. Gbs. (Lp.)

M. G. Ricci et T. Levi-Civita. **Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.** Math. Ann. **54,** 125-201.

Der von Jacobi gegebene und von Beltrami erweiterte Beweis der Invarianz von $\Delta_2 U$ überrascht sehr dadurch, dass derselbe mit Hülfe der Variation eines Integrals geführt wird, während der Satz seiner Natur nach in die algebraische Theorie der Elimination gehört. Dieser Bemerkung und der a priori angenommenen Möglichkeit, die Theorie der Differentialparameter zweiter Ordnung auf die Theorie der Invarianten algebraischer Formen zurückführen zu können, ist die Entdeckung der Methoden zu danken, welche die Verff. unter dem Namen „absoluter Differentialcalcul“ zusammenfassen. Die erste Frucht dieser Methoden war die Entdeckung einer ganzen Kette von eine oder mehrere willkürliche Functionen enthaltenden Differentialinvarianten, deren erstes und wichtigstes Glied gerade $\Delta_2 U$ ist.

Der Algorithmus des absoluten Differentialcalculs, wie er von den Verff. hier in seinen Grundzügen dargelegt wird, findet sich bereits in einer Arbeit Christoffel's („Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.“ J. für Math. **70,** 46-70; F. d. M. **2,** 128-129, 1869) begründet. Die Methoden dieses Calculs und die Vorteile, welche seine Benutzung darbietet, haben ihren Ursprung in den engen Beziehungen, welche ihn mit dem Begriffe der Mannigfaltigkeit von n Dimensionen verknüpfen, wie ihn uns die Gauss'schen und die Riemann'schen Arbeiten kennen gelehrt haben.

Hiernach ist eine Mannigfaltigkeit V_n in ihren metrischen Eigenschaften definirt durch n unabhängige Veränderliche und eine Klasse von quadratischen Differentialformen dieser Veränderlichen, von welchen je zwei durch eine Punkttransformation in einander übergeführt werden können. Es bleibt also V_n unverändert bei jeder Coordinatentransformation. Die Formeln und Resultate des absoluten Differentialcalculs sind somit ganz unabhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen, und es ist daher der absolute Differentialcalcul ein

natürliches Werkzeug für alle Untersuchungen, welche eine Mannigfaltigkeit V_n zum Gegenstande haben, oder welche als charakteristisches Element eine positive quadratische Form der Differentiale von n Veränderlichen oder ihren Ableitungen aufweisen.

Die summarische Darstellung, welche die Verff. in der vorliegenden Abhandlung von diesen Methoden und ihren Anwendungen geben, sollen den Leser von den Vorteilen dieses Calculs überzeugen und demjenigen, welcher ihn anwenden will, die Mühe und Schwierigkeiten vermindern, welche die Benutzung eines neuen Hülfsmittels stets mit sich bringt.

Die Abhandlung zerfällt in zwei ziemlich gleiche Teile; in dem ersten werden die Grundzüge des Algorithmus auseinandergesetzt, in dem zweiten wird er auf Beispiele aus der Analysis, Geometrie, Mechanik und Physik angewandt. Hau.

H. Maschke. A new method of determining the differential parameters and invariants of quadratic differential quantics. American M. S. Trans. **1,** 197-204.

Diese Mitteilung giebt die Grundzüge eines Symbolismus für die Bildung von Invarianten quadratischer Differentialausdrücke

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (a_{ik}=a_{ki})$$

und für das Rechnen mit solchen Invarianten. Der Hauptvorteil des hier gegebenen Symbolismus liegt in dem Umstande, dass nach Aufstellung der Grundprincipien des Verfahrens eine weitere Bezugnahme auf die Transformationsformeln unnötig wird.

Die Betrachtungen können ohne besondere Schwierigkeiten auf die Fälle von quadratischen Differentialausdrücken mit n Veränderlichen und von Differentialausdrücken höherer Ordnung ausgedehnt werden, wie zum Schlusse für einen ternären quadratischen Differentialausdruck gezeigt wird. Hau.

J. J. Bielankin. Der zweite Differentialparameter einer quadratischen Form aus Differentialen von n unabhängigen Veränderlichen. Kasan Ges. (2) **10,** No. 2, 181-186. (Russisch.)

Das vom Verf. zur Aufstellung des betreffenden Ausdrucks angewandte Verfahren ist dem von Beltrami (Bologna Mem. 1869) analog. Si.

W. E. Philip. A slight extension of Euler's theorem on homogeneous functions. Edinb. M. S. Proc. **18,** 101-102.

Mit Δ_p bezeichnet man den Operator

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+\cdots\right)^p.$$

Ist nun $U = F(u)$ eine beliebige Function von u, wo u homogen und vom Grade n ist, so ist

$$\Delta_p U = \lambda^p \frac{d^p}{d\lambda^p} F(\lambda^n),$$

wo $u = \lambda^n$. Gbs. (Lp.)

G. Fontené. Sur le théorème des fonctions composées. Ens. math. **2**, 451-452.

Bestimmung von Δy, wenn $y = f(u, v)$ ist, auf geometrischem Wege.

Der Verf. fordert beim Unterricht in der Geometrie weniger Synthese und mehr Analysis. Wz.

F. J. Studnička. Methodische Beiträge zur Differentialrechnung. Časopis **29**, 225-232. (Böhmisch.)

Der Verf. entwickelt mehrere Vereinfachungen der Methode, welche bei der Differentiation der Producte, der Potenzen, der Quotienten und der einfachen Functionen in Anwendung kommt. Sda.

S. Pincherle. Sulla scomposizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni. Bologna Rend. **4**, 101-105.

A. Korn. Ueber den sogenannten semidefiniten Fall in der Theorie der Maxima und Minima. Münch. Ber. **30**, 235-246.

Ohne sich auf die Arbeiten früherer Forscher zu stützen, giebt der Verf. einen einfachen Weg an, um in dem semidefiniten Falle die nächsten Kriterien für das Maximum, bezw. Minimum einer Function

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ an einer Stelle

$$x_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

welche den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \; (i = 1, 2, \dots, n)$ entspricht, zu erhalten. Der semidefinite Fall ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass in der Gleichung

$$\varrho^n + \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} \varrho + \alpha_n = 0,$$

welche die nach Potenzen von ϱ geordnete Relation:

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\varrho & f_{21} & \cdots f_{n1} \\ f_{12} & f_{22}-\varrho & \cdots f_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots f_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$f_{ik} = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right|_{x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n}$$

darstellt, die Coefficienten

$$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n \qquad (0 \leqq r \gtreqless n-1)$$

verschwinden, während die Coefficienten

$$(\alpha_0 =)\, 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

entweder r Zeichenfolgen oder r Zeichenwechsel aufweisen. Der Verf. gelangt für diesen Fall zu den folgenden Kriterien für das Auftreten eines Extremwertes an der betrachteten Stelle:

„Es ist für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen

$$\text{(A)} \qquad \sum_{k=1}^{n} f_{ik}\, \delta x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(von diesen sind nur r von einander unabhängig) die Identität

$$\text{(B)} \qquad \delta^2 f \equiv 0$$

stattfinde; ist (für $i \neq k$)

$$\begin{cases} c_{ik} = \dfrac{1}{2\alpha_r} \dfrac{\partial \alpha_r}{\partial f_{ik}}, \\ c_{kk} = \dfrac{1}{\alpha_r} \dfrac{\partial \alpha_r}{\partial f_{kk}}, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ r \neq 0)$$
$$c_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ r = 0),$$

so wird sicher dann ein Maximum, resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen (A) der Ausdruck

$$\text{(C)} \qquad \delta^4 f - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

das Zeichen von $(-\alpha_1)$ [resp. im Falle $r=0$ ein festes Zeichen] hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck (C) unter den Bedingungen (A) durch geeignete Wahl der

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$$

auch das Zeichen von $(+\alpha_1)$ erhalten kann [resp. im Falle $r=0$ bald positiv, bald negativ gemacht werden kann]; für den Fall, dass der Ausdruck (C) bei den Bedingungen (A) zwar ein festes Zeichen hat,

aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ gleichzeitig Null sind, ist eine weitere Untersuchung erforderlich." Hau.

R. Lipschitz. Nachweis des Zusammenhanges zwischen den vier Drehungsaxen einer Lagenänderung eines orthogonalen Systems und einem Maximumstetraeder. Acta Math. **24,** 123-158.

Wenn zwei dreiaxige rechtwinklige Coordinatensysteme denselben Anfangspunkt haben, und auf jeder Axe eine der beiden Richtungen numerirt ist, so kann auf vierfache Weise das eine mit dem andern durch Drehung so zur Deckung gebracht werden, dass die gleichnumerirten Axenrichtungen zusammenfallen. Wird dann auf jeder der vier entsprechenden Drehungsaxen vom Anfangspunkt aus eine gewisse, als Function des zugehörigen Drehungswinkels bestimmte Strecke abgetragen, so sind die Endpunkte dieser Strecken die Ecken eines Tetraeders, dessen Höhen die Drehungsaxen sind, also eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt oder mit grösstem Inhalt für gegebene Oberfläche. Es wird gezeigt, wie aus den beiden gegebenen Systemen die Drehungsaxen und Drehungswinkel, und umgekehrt aus einem gegebenen Maximumstetraeder diejenigen beiden rechtwinkligen Systeme bestimmt werden können, welche durch Drehung um eine der Höhen des Tetraeders in einander übergehen. — Betrachtet man den Anfangspunkt als Schwerpunkt eines beliebigen Systems von starr mit einander verbundenen Massenpunkten und das eine der beiden Systeme als System der zugehörigen Hauptträgheitsaxen, so lassen sich mittels der entwickelten Methode aus der bekannten Lagenänderung dieser Axen in Bezug auf ein im Raume festes Axensystem für jeden Zeitmoment die entsprechenden vier Drehungsaxen und zugehörigen Drehungswinkel nebst dem entsprechenden Maximumstetraeder ableiten, wie auch umgekehrt die Natur der drehenden Bewegung aus dem bekannten Maximumstetraeder. — Im letzten Teile der Arbeit werden die vorstehenden Resultate auf eine ebene n-dimensionale Mannigfaltigkeit ausgedehnt, wobei jedoch, wenn n eine gerade Zahl ist, der Begriff der Drehungsaxen durch den der „Symmetrieaxen" ersetzt werden muss, um die Verallgemeinerung zu ermöglichen. Hierdurch wird die von Schläfli (J. für Math. **65,** 185, 1866) für den gedachten Fall als undurchführbar erkannte Verallgemeinerung in anderer Weise erledigt. Schg.

A. Aubry. Étude élémentaire sur la théorie des maxima et minima. Progreso mat. (2) **2,** 41-49, 185-193, 233-241, 321-324.

Der Verf. behandelt mit Hülfe der ersten Begriffe der Algebra viele elementare Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Seinen Ausführungen stellt er einige interessante historische Notizen voran, die jedoch wichtige Arbeiten, wie z. B. die Steiner'sche, nicht erwähnen. Tx. (Lp.)

R. Volpi. Sopra due teoremi fondamentali di massimi e minimi. Periodico di Mat. (2) **2**, 157-162.

Elementare Beweise dafür, dass $y=(a-x)x^{m-1}$ für $x=(m-1)a/m$ ein Maximum wird $(a>0)$, und dass das Product von n positiven Zahlen, deren Summe gegeben ist, ein Grösstes ist, wenn die Zahlen unter einander gleich sind. Dass Heilermann auf diesen letzteren Satz seine elementare Behandlung der extremen Werte gegründet hat („Eine elementare Methode zur Bestimmung von grössten und kleinsten Werten". Leipzig, B. G. Teubner, 1871), scheint im Auslande unbekannt geblieben zu sein (vergl. Crawford, S. 168 dieses Bandes). Lp.

E. N. Barisien. Sur le point du plan d'un triangle tel que la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des distances de ce point aux côtés soit minimum. Bull. math. spéc. **6**, 10-13.

H. Worm. In der Ebene einem gegebenen Vierecke ein Viereck von kleinstem Umfange einzubeschreiben. Diss. Leipzig. 47 S. 4°.

Kapitel 3.

Integralrechnung.

Ch. Riquier. Sur une question fondamentale du calcul intégral. Acta Math. **23**, 203-331.

In der vorliegenden langen Abhandlung ist Riquier auf die von ihm in einer Reihe von Veröffentlichungen behandelte Frage nach der Existenz von Integralen bei beliebigen Differentialsystemen zurückgekommen und hat nicht nur eine zusammenfassende und gleichzeitig vereinfachte Darstellung seiner früheren Untersuchungen gegeben, sondern auch weitergehende Sätze mitgeteilt.

Die Einleitung enthält eine Uebersicht über die Geschichte des Problems. Cauchy, dem wir die Methode der Majoranten verdanken, hat neben Systemen von gewöhnlichen auch Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet (C. R. 1842 und 1843), wobei er sich die n Gleichungen zwischen den n unbekannten Functionen $w_1, w_2, \cdots, w_n$ und ihren Ableitungen nach den r Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_r$ nach den Ableitungen in Bezug auf eine dieser Veränderlichen, etwa x_1, aufgelöst denkt; er scheint geglaubt zu haben, dass das immer möglich ist. Einen wichtigen Fortschritt brachte das Jahr 1875, indem Darboux die von Cauchy ausgesprochenen Sätze in aller Strenge bewies (F. d. M. **7**, 198, 1875), während gleichzeitig Sonja Kowalewsky Differentialsysteme beliebiger Ordnung behandelte, die nach den Ableitungen höchster Ordnung in Bezug auf eine und dieselbe Veränderliche:

$$\frac{\partial^{k_\alpha} w_\alpha}{\partial x_1^{k_\alpha}} \quad (\alpha=1,2,\cdots,n)$$

auflösbar sind (F. d. M. **7**, 201, 1875). Im Jahre 1875 hat auch, was von Riquier übersehen worden ist, Méray bereits die Ergebnisse seiner Untersuchungen in den Comptes Rendus veröffentlicht (F. d. M. **7**, 206, 1875), deren ausführliche Herleitung die von Riquier erwähnte Abhandlung vom Jahre 1880 enthält (F. d. M. **12**, 283, 1880; das für den nächsten Band versprochene Referat ist nicht erschienen). Bedenken, die dieser jenem im Jahre 1888 mitgeteilt hatte, führten dazu, dass beide gemeinschaftlich eine Abhandlung über die Convergenz der betreffenden Reihenentwickelungen abfassten, die 1890 erschienen ist (F. d. M. **22**, 348, 1890) und in der ein Teil der Ergebnisse von Méray in einwandfreier Weise hergeleitet wird. Noch weiter darüber hinaus ist Riquier in einer 1893 veröffentlichten Arbeit gelangt, über die der Referent in F. d. M. **25**, 590, 1893 ausführlich berichtet hat, und in Abhandlungen vom Jahre 1897 (F. d. M. **28**, 299-300, 1897).

Daneben findet man die Arbeiten von Bouquet und Mayer (1872), König (1884), Bourlet (1891), Tresse (1894), Delassus (1896), Goursat (1897) erwähnt; in einem Anhange (S. 322-331) wird gezeigt, dass die von diesen Forschern erhaltenen Ergebnisse sämtlich als besondere Fälle unter den Theoremen des Verfassers enthalten sind. Vermisst hat der Referent die Erwähnung der Arbeiten von Koenigsberger (F. d. M. **24**, 319-320, 1892; **25**, 595, 599, 1893), Mie (F. d. M. **24**, 330-332, 1892), Stäckel (F. d. M. **29**, 299-300, 1898) und Beudon (F. d. M. **29**, 304, 1898).

Nachdem im ersten Abschnitte einige Definitionen aufgestellt und verschiedene Hülfssätze entwickelt worden sind, betrachtet Riquier im zweiten Abschnitte orthoische Differentialsysteme, die er folgendermassen definirt. Wie früher (F. d. M. **25**, 591, 1893; die Kenntnis dieses Referates wird im folgenden vorausgesetzt) werden den Veränderlichen $w_1, w_2, \cdots, w_n; x_1, x_2, \cdots, x_r$ je p Marken zugeordnet, nämlich ganze positive oder negative Zahlen, wobei aber jede erste Marke von $x_1, x_2, \cdots, x_r \geqq 1$ sein soll. Hieraus entsteht die q-te Marke einer beliebigen Ableitung von $w_1, w_2, \cdots, w_n$, indem der q-ten Marke der Function die q-ten Marken aller $x_1, x_2, \cdots, x_r$, nach denen differentiirt wird, so oft hinzugefügt werden, als nach ihnen differentiirt wird. Eine Ableitung (oder Function) mit den Marken $c_1, c_2, \cdots, c_p$ heisst normal oder anormal in Bezug auf eine andere Ableitung (oder Function) mit den Marken $c'_1, c'_2, \cdots, c'_p$, je nachdem die Differenzen $c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \cdots, c_p - c'_p$ der Bedingung genügen oder nicht genügen, dass nicht alle Differenzen verschwinden, und dass die erste von Null verschiedene positiv ist. Das betrachtete System möge so beschaffen sein, dass es nach gewissen Ableitungen aufgelöst werden kann, die weder selbst noch in ihren Ableitungen auf den rechten Seiten vorkommen, und dass die rechten Seiten convergente Potenzreihen aller ihrer Argumente sind. Wenn alsdann die Zahl p und die den Veränderlichen beigelegten Marken so gewählt werden können, dass die rechten Seiten ausser den $x_1, x_2, \cdots, x_r$ nur solche Grössen (Functionen oder Ableitungen) enthalten, die normal zu der Grösse auf der linken Seite sind, so heisst das System orthoisch.

Ein System von Functionen $W_1(x_1, \cdots, x_r), \cdots, W_n(x_1, \cdots, x_r)$ bildet eine Schar ordinärer Integrale, falls die $W_1, \cdots, W_n$ sich in convergente Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1 - x_1^0, \cdots, x_r - x_r^0)$ entwickeln lassen, und die Werte, die sich daraus für die Functionen und ihre Ableitungen ergeben, dem Convergenzbezirke der rechten Seiten des orthoischen Systems angehören, und wenn die Substitution der $W_1, \cdots, W_n$ für die $w_1, \cdots, w_n$ die Gleichungen dieses Systems in Identitäten verwandelt. Alsdann gilt der Satz: Besitzt ein orthoisches System irgend eine Schar ordinärer Integrale, so lassen sich die Entwickelungen dieser Integrale nach der Taylor'schen Reihe für die Stelle $x_1^0, \cdots, x_r^0$ angeben, sobald man ihre Anfangswerte und die Anfangswerte ihrer Nebenableitungen aller Ordnungen kennt.

Damit solche Integrale existiren, ist notwendig und hinreichend, dass 1. die ursprünglichen Gleichungen für jede der Hauptableitungen einen einzigen Anfangswert liefern, 2. die formal angesetzten Integrale convergiren. Zu den gegebenen Anfangsbedingungen gehört in diesem Falle eine einzige Schar ordinärer Integrale.

Ein orthoisches System heisst vollständig integrabel, wenn dazu bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen eine Schar ordinärer Integrale gehört, passiv, wenn die Uebereinstimmung der Anfangswerte der Hauptableitungen für alle möglichen Anfangsbedingungen stattfindet. Mithin ist ein orthoisches System dann und nur dann vollständig integrabel, wenn 1. die Bedingung der Passivität erfüllt ist, 2. die für beliebige Anfangsbedingungen formal angesetzten Potenzreihen der Integrale convergent sind.

Es werden nunmehr notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, dass ein orthoisches System passiv ist. Darauf wird an verschiedenen Beispielen gezeigt, dass die einem passiv-orthoischen System formal genügenden Potenzreihen sehr wohl divergiren können, so dass die Bedingung 2. für die Existenz einer Schar ordinärer Integrale sich als durchaus notwendig erweist.

Die Bedingung 2. ist von selbst erfüllt bei den passiv-orthonomen Systemen, die also bei beliebigen Anfangsbedingungen eine Schar ordinärer Integrale besitzen. Damit gelangen wir zu dem dritten Abschnitte, in dem zunächst orthonome Systeme als solche orthoische Systeme definirt werden, bei denen die ersten Marken der $x_1, x_2, \cdots, x_r$ alle gleich derselben (positiven) ganzen Zahl sind; die früher von Riquier betrachteten harmonischen Systeme sind besondere Fälle der orthonomen Systeme. Es folgt der Beweis der Convergenz der Potenzreihen für die $w_1, w_2, \cdots, w_r$.

Im vierten Abschnitte wird zunächst in verbesserter Form das Schlusstheorem der Abhandlung vom Jahre 1893 bewiesen, dass man nämlich aus einem jeden Differentialsysteme, dessen rechte Seiten gleich Null und dessen linke Seiten convergente Potenzreihen ihrer Argumente sind, „im allgemeinen" ohne Einführung neuer Veränderlicher und ohne Integration ein zweites System herleiten kann, das dieselben Integrale besitzt und das 1. aus Scharen von Gleichungen besteht, die für eine gewisse Anzahl der unbekannten Functionen je ein passiv-orthonomes

System bilden und 2. einer Schar von Gleichungen, durch welche die übrigen unbekannten Functionen mittels der unabhängigen Veränderlichen, der Functionen der ersten Scharen und deren Ableitungen ausgedrückt werden.

Die Convergenz-Bedingung 2. kann auch bei nicht-orthonomen Systemen erfüllt sein und zwar entweder für beliebige oder für geeignet gewählte Anfangsbedingungen. Der Untersuchung gewisser nicht-orthonomer Differentialsysteme, bei denen unter solchen Umständen Integrale existiren, ist der fünfte Abschnitt gewidmet.

Zunächst wird der Begriff einer quasi-exponentiellen Function $f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ aufgestellt, nämlich einer Function, die für geeignet gewählte Werte $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_r^0$ nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \cdots, x_r - x_r^0$ in der Weise entwickelbar ist, dass man als Majorante für die Reihenentwickelung der Function die Reihe für

$$M_0 \cdot e^{a[(x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0) + \cdots + (x_r - x_r^0)]}$$

nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \cdots, x_r - x_r^0$ bei geeigneter Wahl der positiven Constanten M_0 und α (F. d. M. **25**, 592, 1893) erhält. Alle Ableitungen einer quasi-exponentiellen Function sind auch quasi-exponentiell, ebenso alle durch wiederholte Integration daraus entstehenden Functionen, wenn als Integrationsconstanten quasi-exponentielle Functionen der betreffenden Argumente gewählt werden; die Summe und das Product von zwei qausi-exponentiellen Functionen sind endlich auch quasi-exponentiell.

Mit Hülfe dieser Eigenschaften der quasi-exponentiellen Functionen ergiebt sich das folgende merkwürdige Theorem. Sind in einem passiv-orthoischen Systeme, das in Bezug auf die unbekannten Functionen und deren Ableitungen linear ist, die von diesen Grössen unabhängigen Glieder alle quasi-exponentiell, während die andern Coefficienten sich auf Constanten reduciren, und sind die Functionen (in endlicher Zahl), durch die eine Schar von Integralen des Systems formal vollständig bestimmt wird, sämtlich quasi-exponentiell, so existiren diese Integrale wirklich und sind selbst quasi-exponentiell.

Ein anderer Fall, in dem sich die Existenz einer Schar von Integralen erweisen lässt, ergiebt sich, wenn man für die ersten Marken der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_r$ eine und dieselbe ganze positive Zahl wählt. Lässt sich dann das System von n Gleichungen für die n unbekannten Functionen $w_1, w_2, \cdots, w_n$ nach n Ableitungen auflösen, die der Reihe nach zu $w_1, w_2, \cdots, w_n$ in der Weise gehören, dass auf den rechten Seiten, die als convergente Potenzreihen ihrer Argumente vorausgesetzt werden, weder diese Ableitungen noch daraus gebildete Ableitungen vorkommen, lässt es sich ferner so einrichten, dass alle unbekannten Functionen und deren Ableitungen, die auf den rechten Seiten wirklich vorkommen, eine erste Marke besitzen, die der ersten Marke der entsprechenden linken Seite mindestens gleich ist, und enthält endlich jede rechte Seite Grössen, die in Bezug auf die entsprechende linke Seite anormal sind, so lassen sich die Anfangs-

bedingungen (in einer von Riquier genauer angegebenen Weise) stets so wählen, dass eine Schar ordinärer Integrale existirt. Einen besonderen Fall dieses Satzes hatte Goursat im November 1897 angegeben.

Es wäre dringend zu wünschen, dass die sehr allgemeinen Theoreme von Riquier auf besondere Fälle angewandt würden, in denen die Discussion vollständig durchgeführt werden kann; auf diese Weise würde sich erst entscheiden lassen, in welchem Sinne man mit ihrer Hülfe die Frage nach der Existenz von Integralen bei vorgelegten Differentialsystemen zu beantworten vermag. St.

Ch. Riquier. Sur le calcul inverse des dérivées. Marseille Ann. **10**, 1-60.

Nach dem Berichte in Revue semestrielle $\mathbf{9}_1$, 78, besteht das Ziel der Arbeit darin, jede Function der Variabeln $x, y, \cdots$ zu finden, die der doppelten Bedingung genügt: 1. von gegebenen Werten $x_0, y_0 \cdots$ aus nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar zu sein; 2. zu Ableitungen von beliebig gegebenen (gleichen oder ungleichen) Ordnungen gegebene Functionen von $x, y, \cdots$ zu besitzen. In dem ersten Teile der Arbeit prüft der Verf. den einfachsten Fall, bei welchem man nur eine erste Ableitung der unbekannten Function giebt; in dem zweiten bestimmt er die Beschaffenheit der Anfangsbedingungen, deren Angabe eine Lösung des allgemeinen Problems völlig bestimmt; in dem dritten Teile wird das allgemeine Problem angegriffen zum Zwecke der Zurückführung auf den elementaren Fall, der den Gegenstand des ersten Teiles bildet (vergl. das vorangehende Referat). Lp.

J. Pexider. Beitrag zur Infinitesimalrechnung. Časopis **29**, 33-38. (Böhmisch.)

Der Verf. entwickelt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen in einfachen Fällen das Integral einer Function abgeleitet werden kann, wenn ihre charakteristische Functionalgleichung, nicht aber die Function selbst gegeben erscheint. Sda.

C. Arzelà. Sull' integrazione per sostituzione. Bologna Rend. (2) **4**, 1899-1900, 82-90.

Wenn man in den Lehrbüchern von der Berechnung eines unbestimmten Integrales $\int f(u)\,du$ durch eine Substitution $u = u(x)$ spricht, so verlangt man gewöhnlich nicht nur, dass $u(x)$ eine einwertige, stetige und derivirbare, sondern dass sie auch eine eindeutig umkehrbare Function sein solle. Diese letzte Bedingung ist aber, wie Arzelà beweist, überflüssig; setzt man nämlich:

$$\int f(u)\,du = \int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \psi(x),$$

so ergiebt sich, dass $\psi(x)$ eine eindeutige Function von x selbst dann ist, wenn $u(x)$ eine nicht eindeutig umkehrbare Function von x bezeichnet. Vi.

J. Beudon. Sur les changements de variables. S. M. F. Bull. **28,** 107-116.

Weitere Ausführung der Methode, welche der Verf. zur Integration von Ausdrücken, die willkürliche Functionen und deren Ableitungen enthalten, in den C. R. **128,** 1215-1218 entwickelt hat (vergl. F. d. M. **30,** 272, 1899). Die vorgetragene Methode wird auf die Quadraturen $\int \frac{du}{1+u\cdot u_1}$, $\int \frac{du_1}{1+u\cdot u_1}$, angewandt, wo u und u_1 willkürliche Functionen derselben Veränderlichen bedeuten. F.

W. R. Roberts. On the reduction of the integral $\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)\sqrt{f(z)}}$ to a number of other integrals of the form $\int \frac{dz}{(z-n)\sqrt{f(z)}}$ when $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are rational and integral functions of z, and $f(z)$ a polynomial of the degree $2m$. Dublin Proc. (3) **6,** 93-99.

Die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von $f(z)=0$ werden alle als reell angenommen, und das Integral wird zwischen reellen Grenzen erstreckt. Die Zerlegung von $\varphi(z)/\psi(z)$ in eine ganze Function und eine Summe von Partialbrüchen führt auf die Typen:

$$I_r = \int_{z_2}^{z_1} \frac{z^r\,dz}{\sqrt{f(z)}}, \quad L = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(z-n)\sqrt{f(z)}}.$$

Ist $r > 2m-2$, so können die Integrale I_r von den $m-1$ Integralen $I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{2m-2}$ abhängig gemacht werden, während die Integrale

$$\int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(z-n)^r \sqrt{f(z)}}$$

in Abhängigkeit von den I_r und von L gebracht werden können. Demnächst können alle I_r ausser I_{m-1} von $2m$ Integralen (von denen $2m-1$ unabhängig sind) abhängig gemacht werden vom Typus

$$L_r = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(z-\alpha_r)\sqrt{f(z)}},$$

wo α_r eine Wurzel von $f(z)=0$ ist. Dann wird gezeigt, dass I_{m-1} in Abhängigkeit von $I_{m-2}, \dots, I_0$ gesetzt werden kann und von den Integralen des Typus

$$L_a = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(z-a)\sqrt{f(z)}},$$

wo a eine Wurzel von $u-v=0$ ist, wenn u und v Functionen desselben Grades sind und aus den Factoren von $f(z)$ derart gebildet, dass $uv=f(z)$. Als fundamentales Integral, von welchem man alle übrigen abhängen lassen kann, ist der Typus das Integral L. Gbs. (Lp.)

N. J. Sonin. Ergänzung zur Abhandlung von P. L. Tschebyschew: Ueber Integration der einfachsten Differentiale, welche eine Kubikwurzel enthalten. Petersb. Bull. (2) **12**, No. 5, 411-417. (Russisch.)

Nach Angabe von Tschebyschew (Mosk. Math. Samml. **2**, 71-78, 1867; Werke, Bd. **1**) ist zur Möglichkeit des Integrals

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt[3]{ax^3+ax+b}}$$

in endlicher Form notwendig, dass bei commensurablem b^2/a^3 wenigstens eine der Gleichungen

$$x^3 = \frac{27}{4}\frac{b^2}{a^3}+1, \quad 3\left(\frac{b^2}{a^3}\right)^2 x^4 + 6\,\frac{b^2}{a^3}(x^2+2x) = 1$$

eine commensurable Wurzel besitze. Die erste Gleichung ist leicht zu prüfen. Sonin zeigt, dass auch für die zweite Gleichung die Lösung einfach genug ist. Si.

G. Giovanetti. Integrale d'una funzione particolare. Periodico di Mat. (2) **3**, 84-85.

Berechnung des „in der mathematischen Physik vorkommenden“ Integrals:

$$\int (\sin n\Theta + \cos n\Theta)\,\Theta\,(1+\Theta)\,d\Theta.$$

Lp.

G. Lazzeri. Risoluzione della quistione 508. Periodico di Mat. (2) **3**, 86-87.

Berechnung der Integrale:

$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{tg}^m\,\beta x\,dx, \qquad \int e^{\alpha x}\,\mathrm{cotg}^m\,\beta x\,dx,$$

$$\int e^{ax}\,\mathfrak{Tang}^m\,\beta x\,dx, \quad \int e^{ax}\,\mathfrak{Cotg}^m\,\beta x\,dx.$$

Eine zweite Berechnung von A. Barozzini. Lp.

E. Barisien. Sull' integrale $\int \operatorname{tang}^n \varphi\, d\varphi$. Periodico di Mat. (2) **2**, 150-151.

Bekannte Reductionsformel, aber nur für die kleinsten Zahlenwerte von n. Lp.

M. Chini. Sopra alcuni integrali indefiniti. Periodico di Mat. (2) **2**, 199-200.

Verf. weist bezüglich der Note von Barisien auf die allgemeinen Reductionsformeln der Integrale von $\operatorname{tang}^n \varphi\, d\varphi$ und $\operatorname{cotg}^n \varphi\, d\varphi$ hin. Lp.

A. Lee. Integral tables of $F(r, v)$ and $Hr, v)$ functions. London. 50 S. 8°.

Kapitel 4.

Bestimmte Integrale.

A. Pringsheim. Ueber den sogenannten zweiten Mittelwertsatz für endliche Summen und Integrale. Münch. Ber. **30**, 209-238.

Von den beiden Formen, in welchen der sogenannte zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung existirt ($a \leqq \xi \leqq b$):

$$\text{(I)} \quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx,$$

$$\text{(II)} \quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + f(b)\cdot\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx,$$

gilt die erste (Bonnet'sche Form) unter der specielleren Voraussetzung, dass $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ positiv und niemals zunehmend ist, während die zweite (du Bois-Reymond'sche Form) $f(x)$ nur als monoton voraussetzt. Trotzdem aber ist der Satz (I) keineswegs ein specieller Fall von (II), sondern er ist der allgemeinere von beiden, und es erscheint sogar der Satz (II) als ein blosses Corollar zu (I). Nun existirt aber in der That eine allgemeinere Form des Satzes (II), welche die beiden obigen Formen als specielle Fälle in sich enthält. Auch diese Form ist gelegentlich von du Bois-Reymond angegeben; doch erscheint die von ihm gegebene Begründung unzulänglich.

In dieser dritten Form

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx$$

$$= A\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + B\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx \begin{cases} \text{wo } A \leqq f(a+0) \\ \qquad\qquad < f(b-0) \leqq B \\ \text{oder } A \geqq f(a+0) \\ \qquad\qquad > f(b-0) \geqq B \text{ ist,} \end{cases}$$

fällt vor allem die ausserordentlich grosse Willkürlichkeit der beiden mit A und B bezeichneten Zahlen auf. Diese Willkürlichkeit in der Auswahl der Zahlen A, B beruht aber nicht auf einer infinitesimalen Eigenschaft des bestimmten Integrals, sondern ist ganz elementaren arithmetischen Ursprungs. Es existirt nämlich für gewöhnliche endliche Summen

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu,$$

wo $u_\nu, v_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, n)$ beliebig vorgegebene Zahlen sind und die u_ν eine monotone Folge bilden, der Mittelwertsatz:

$$S_n = (u_0 - u_{n+1}) \overset{\nu=n}{\underset{\nu=0}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1}\cdot V_n$$

$$= u_0 \cdot \overset{\nu=n}{\underset{\nu=0}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1}[V_n - \overset{\nu=n}{\underset{\nu=0}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)],$$

wo $\overset{\nu=n}{\underset{\nu=0}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$ einen Mittelwert aus $V_0, V_1, \cdots, V_n$ bezeichnet und $V_0 = 0$, $V_\nu = v_1 + v_2 + \cdots + v_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, n)$ ist, während u_0 und u_{n+1} zwei willkürlich wählbare, aber der monotonen Folge der u_ν sich anschliessende Zahlen sind. Dieser Mittelwertsatz besitzt genau die Bauart der Formel (III) und bildet ihre eigentliche Grundlage.

Der vorstehende Mittelwertsatz für endliche Summen wird in § 1 mit Hülfe der Formel

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (u_\nu - u_{\nu+1})\cdot V_\nu + u_{n+1}\cdot V_n,$$

welche eine einfache Umformung der Abel'schen Transformationsformel ist, hergeleitet und des näheren discutirt. Mit seiner Hülfe wird dann in § 2 ein Beweis der Integralformel (III) gegeben, welcher dem Verf. „mehr als irgend einer der bisherigen Beweise die äusserst erreichbare Allgemeinheit mit genügender Einfachheit zu verbinden scheint". Zur näheren Begründung dieser Ansicht werden in § 3 zu jenen früheren Beweisen einige historische und kritische Bemerkungen gegeben. Hau.

O. Stolz. Zum Existenzbeweis für das complexe Integral. Monatsh. f. Math. **11,** 64-66.

Der Verf. stellt einen Existenzbeweis für das complexe Integral richtig, welchen er in seinen „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung" (**2,** 174) gegeben hat, und bei welchem ein kleiner Irrtum untergelaufen war. Hau.

L. K. Whittemore. Note of the convergence of definite integrals. Annals of Math. (2) **1,** 189-192.

Ist $f(x)$ eine für alle Werte von $x > a$ stetige Function, so ist bekanntlich

$$\lim_{x=\infty} \{ x^k f(x) \} = A \qquad (k > 1),$$

wo A eine beliebige endliche Zahl bezeichnet, eine hinreichende Bedingung für die Convergenz des uneigentlichen bestimmten Integrals

$$\int_b^\infty f(x)dx \qquad (b > a > 0).$$

Aus der obigen Bedingung folgt

$$\lim_{x=\infty} (xf(x)) = 0.$$

Diese letztere Gleichung stellt jedoch im allgemeinen weder eine hinreichende, noch eine notwendige Bedingung für die Convergenz eines uneigentlichen bestimmten Integrals $\int_b^\infty f(x)dx$ dar; sie ist, wie in dieser Mitteilung gezeigt wird, nur dann eine notwendige Bedingung, wenn die Function $xf(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima für $x > b$ besitzt. Hau.

A. Hurwitz. Ueber die Anwendung eines functionentheoretischen Principes auf gewisse bestimmte Integrale. Math. Ann. **53,** 220-224.

Die Function $f_k(x)$ sei in jedem endlichen Intervalle der positiven Zahlenaxe integrirbar, werde für unendlich grosse positive Werte von x stärker Null als jede endliche Potenz von $1/x$ und sei in der Umgebung von $x = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar. Dann kann das Integral

$$J = \int_0^\infty \left\{ \sum_{k=1}^{k=r} \frac{f_k(x)}{x^{n_k+1}} \right\} dx,$$

wo die n_k nicht negative Zahlen bedeuten und die integrirte Function für $x = 0$ endlich bleibt, angesehen werden als der Wert, welchen die Function des complexen Argumentes s:

$$J(s) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{k=1}^{k=r} \frac{f_k(x)}{x^{n_k+1}} \right\} x^{s-1} dx$$

an der Stelle $s = 1$ annimmt.

Versteht man noch unter $J_k(s)$ die durch

$$J_k(s) = \int_0^\infty f_k(x) x^{s-1} dx$$

definirte analytische Function, so gilt für jeden beliebigen Wert von s die Gleichung

$$J(s) = \sum_{k=1}^{k=r} J_k(s - n_k - 1) = \sum_{k=1}^{k=r} J_k(-n_k + h),$$

und man kann daher den Integralwert $J = J(1)$ auffassen als das constante Glied in der Entwickelung der Function $\sum_{k=1}^{k=r} J_k(-n_k + h)$ nach aufsteigenden Potenzen von h.

Beispiel: $\quad J = \int_0^\infty \left\{ \frac{Ae^{-ax}}{x^{n+1}} + \frac{Be^{-bx}}{x^{m+1}} + \cdots \right\} dx.$

Zum Schlusse erwähnt der Verf. noch drei Methoden zur Herstellung der für die obige Potenzentwickelung notwendigen analytischen Fortsetzungen der Functionen $J_k(s)$, welche ursprünglich nur für s mit positivem reellen Teile Functionen von s darstellen. Hau.

G. H. Hardy. On differentiation and integration under the integral sign. Quart. J. **32**, 66-140.

Der Differentialquotient einer durch ein bestimmtes Integral definirten Function kann, sehr allgemein gesprochen, nach dem „Leibniz'schen Theorem" durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^A f(x, \alpha) dx = \int_a^A \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx$$

bestimmt werden. Jedoch ist das Problem, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit dieser Formel zu finden, ebenso aussichtslos wie z. B. die Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Convergenz einer unendlichen Reihe aufzustellen. Ein weiteres Problem besteht darin, in den Fällen, wo das Leibniz'sche Theorem nicht gilt, den Differentialquotienten zu bestimmen. Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich in erster Linie mit der Lösung dieses Problems insbesondere für die ausgedehnte Klasse von Functionen, die in einer Unendlichkeitsstelle $x = a$ so unendlich werden, dass ihr Product mit einer Grösse von der Form

$$(x - a)^r \{\log(x - a)^2\}^{r_1} \cdot \{\log\log(x - a)^2\}^{r_2} \cdots$$

für $x=a$ sich einer bestimmten Grenze nähert. Dabei werden auch einige Seiten der allgemeinen Frage in die Erörterung einbezogen.

Ot.

A. A. Markow. Untersuchung über die Grenzwerte der Integrale. Petersb. Denkschr. (8) **10**, No. 9, 1-34. (Russisch.)

Der Verf. stellt sich die Aufgabe: Es seien bekannt die Werte $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ der Integrale $\int_0^\infty x^i f(x)\,dx\,(i=0,1,\dots,n)$, und das Integral $\int_0^\infty x^{n+1} f(x)\,dx$ sei nicht grösser als α_{n+1}. Es wird gefragt nach der oberen und nach der unteren Grenze des Integrals $\int_0^u f(x)dx$ für eine beliebig gegebene positive Zahl u, d. h. nach den zwei Grössen $S_{n+1}(u)$ und $s_{n+1}(u)$, zwischen denen das Integral unter den besagten Bedingungen sicherlich liegt. Die Untersuchung wird mit der Umformung der Reihe $\Sigma\alpha i/z^{i+1}$ in den Kettenbruch

$$\frac{1|}{|c_0 z} - \frac{1|}{|c_1} - \frac{1|}{|c_2 z} - \frac{1|}{|c_3} - \cdots$$

eng verbunden (Stieltjes: Recherches sur les fractions continues. A. A. Markow: Ueber einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche). Die Coefficienten c_i werden nach den gegebenen α_i bestimmt.

Es sind dann auch die Näherungsbrüche $\frac{\psi_i(z)}{\varphi_i(z)}\,(i=0,1,\dots,n+1)$ bekannt. Nennt man nun $\frac{\psi_{n+1}(z,u)}{\varphi_{n+1}(z,u)}$ einen neuen Bruch, wo, wenn n gerade und $\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_n(u)<0$:

$$\varphi_{n+1}(z,u) = \frac{\varphi_{n+1}(z)\,\varphi_n(u) - \varphi_{n+1}(u)\,\varphi_n(z)}{\varphi_n(u)},$$

$$\psi_{n+1}(z,u) = \varphi_{n+1}(z,u)\cdot\left\{\frac{1|}{|c_0 z} - \frac{1|}{|c_1} - \frac{1|}{|c_2 z} - \cdots - \frac{1|}{|c_n z} - \frac{1|}{|c_{n+1}+c'}\right\};$$

dagegen wenn n gerade, $\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_n(u)>0$:

$$\varphi_{n+1}(z,u) = \frac{z\,\varphi_{n+1}(z)\,\varphi_n(u) - \varphi_n(z)\,\varphi_{n+1}(u)\,u}{u\,\varphi_n(u)},$$

$$\psi_{n+1}(z,u) = \varphi_{n+1}(z,u)\cdot\left\{\frac{1|}{|c_0 z} - \frac{1|}{|c_1} - \cdots - \frac{1|}{|c_{n+1} - 1/c_1 z}\right\},$$

und ist $\frac{\psi_{n+1}(z,u)}{\varphi_{n+1}(z,u)} = \Sigma\frac{G}{z-g}$ die Zerlegung in Partialbrüche, so ist

die Summe der G für $g < u$ die gesuchte untere Grenze des Integrals; dieselbe Summe, vergrössert um das G, welches dem $g = u$ entspricht, ist die obere Grenze. Analog fallen die Formeln für n ungerade aus. Der Verf. zeigt weiter (§ 6), dass für beliebige u, v $(0 \leq u < v)$ die Ungleichheit besteht: $S(u) \leq s(v)$; dieselbe ähnelt der Ungleichheit $\psi(u) \leq \chi(v)$ von Stieltjes, ist jedoch von ihr verschieden, da $\psi(u)$ und $\chi(u)$ anderen Sinn bei Stieltjes besitzen als hier $S(u)$ und $s(u)$. Jetzt kann man behaupten, dass die unendliche Reihe der Gleichungen

$$a_i = \int_0^\infty x^i f(x)\, dx$$

die beiden Functionen $\overset{-}{F}(x)$ und $\overset{+}{F}(x)$, zwischen denen das Integral $\int_0^x f(x)\, dx$ enthalten ist, vollständig bestimmt. Als Beispiel wird der Fall betrachtet, welchen Tschebyschew behandelt hat (Petersb. Denkschr. **55**; F. d. M. **16**, 208, 1887). Si.

A. L. Cauchy. Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. Herausgegeben von P. Stäckel. Leipzig: W. Engelmann. 80 S. 8°. (Ostwald's Klassiker No. 112.)

Stäckel bietet in dem vorliegenden 112. Bändchen von Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften eine erste deutsche Ausgabe der berühmten Abhandlung Cauchy's: „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires", welche im August 1825 als besonderes Werkchen erschienen war. Das Original ist nur schwer zugänglich, weshalb diese deutsche Ausgabe um so verdienstvoller ist. Hoffentlich trägt dieselbe dazu bei, dass künftighin die Abhandlung nicht nur, wie bisher, ohne gelesen zu sein, häufig citirt (ähnlich, wie es früher mit Bernoulli's Ars conjectandi der Fall war), sondern auch wirklich oft gelesen wird.

Das eine Ziel der Abhandlung ist, die Cauchy'sche Fundamentalformel

$$\int_{x_0}^X f(x + iy_0)\, dx + i \int_{y_0}^Y f(X + iy)\, dy$$
$$= \int_{x_0}^X f(x + iY)\, dx + i \int_{y_0}^Y f(x_0 + iy)\, dy + \Delta,$$

wo Δ die von den Unendlichkeitsstellen der Function $f(z)$ herrührende Correction ist, auf directem Wege herzuleiten. Hierzu musste Cauchy zunächst den Grad der Allgemeinheit feststellen, welchen ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zulässt, und die Zahl der Werte, welche es annehmen kann. Deshalb pflegt man mit Recht die Geschichte der Functionentheorie mit dieser klassischen Abhandlung zu beginnen,

wenn auch zugestanden werden muss, dass Cauchy die wahre Bedeutung seiner Resultate erst geraume Zeit später und zum Teil infolge der Arbeiten anderer Forscher erkannt hat.

Das zweite Ziel der Abhandlung besteht in der ausgiebigen Anwendung der obigen Fundamentalformel auf die Theorie der bestimmten Integrale.

Die deutsche Ausgabe hält sich streng an das Original. Die zahlreichen Druckfehler derselben sind ohne weiteres verbessert worden, während einige kleine Aenderungen, die notwendig erforderlich waren, in den von Stäckel am Ende des Bändchens hinzugefügten Anmerkungen angegeben sind.

Diese Anmerkungen enthalten eine kurze Biographie Cauchy's, in welcher vornehmlich seine Bedeutung für die Functionentheorie gebührend gewürdigt wird, eine Skizze seiner Abhandlung über bestimmte Integrale vom Jahre 1814, Notizen über die vorliegende Abhandlung und Textanmerkungen. Hau.

P. A. Nekrassow. **Berechnung angenäherter Ausdrücke für Functionen von sehr grossen Zahlen.** Mosk. Math. Samml. **21,** 68-334. (Russisch.)

Die Untersuchungen des Verf. beziehen sich auf die Ermittelung der Integrale von der Form

$$\text{(a)} \qquad \int f(z)\,[\psi(z)]^m\,dz.$$

Als Fortsetzung seiner Arbeit: „Die Reihe von Lagrange und Annäherungsausdrücke für die Functionen sehr grosser Zahlen“ (F. d. M. **17,** 212, 1885) knüpfen sie an die Arbeiten von Laplace, Cauchy und Darboux an. Mit den Arbeiten von Tschebyschew und seiner Schule über die Grenzwerte der Integrale sind sie dem Gegenstand nach nahe verwandt; die Methode der Untersuchung ist aber eine wesentlich andere: hier spielt eine wesentliche Rolle die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. Der Verf. strebt danach, die Lösung von den Hülfstheorien, wie derjenigen der erzeugenden Functionen, der trigonometrischen Reihen etc., zu befreien und sie auf die Untersuchung der Aenderungen der Functionen $\psi(z)$ und ihres absoluten Betrages zu gründen. Die Theorie der MacLaurin'schen und der Lagrange'schen Reihen dienen zur Abschätzung der Fehler. — Nach Andeutung einiger Hülfsformeln und Sätze (§ 1) führt der Verf. den Begriff der conservativen Deformation des Integrationsweges (§ 2), den des Hauptweges (für welchen das Maximum maximorum von $\psi(z)$ den kleinsten Wert k_1 annimmt) (§ 3) ein. Weiter sei k_2 das Maximum des Moduls von $\psi(z)$ auf dem Hauptwege nach Ausscheidung der (Haupt-)Punkte, für welche es gleich k_1 ist. Zwei „Hauptbedingungen“ werden eingeführt: 1) $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^m$ sei in Bezug auf $\frac{1}{m}$ unendlich klein von der Ordnung $\sigma = +\infty$. 2) Auf dem ge-

gebenen, vom Hauptpunkte ζ ausgehenden Zweige des Hauptweges existire wenigstens ein Punkt z' von der Beschaffenheit, dass dh/dx auf dem endlichen Bogen $\zeta z'$ zwischen gegebenen endlichen Grenzen liegt und x beständig wächst $\left(\log [\psi(z)/\psi(\zeta)] = x + h\sqrt{-1}\right)$. § 4: Der Hauptweg wird durch Hauptpunkte in einzelne Glieder zerteilt. Zum Zwecke der angenäherten Berechnung des Integrals (a) werden in diesen Gliedern „untergeordnete" Stücke abgesondert, welche nur auf den Fehler wirken; aus den übrigen Teilen werden Glieder gebildet, welche die zweite Hauptbedingung befriedigen [und dazu noch einige weiter im Satze IV angeführte]. Es wird dies durch vorläufige Deformation des Hauptweges erfüllt, deren Möglichkeit im § 8 nachgewiesen wird. Die Berechnung des Integrals wird also für den Hauptteil des Hauptweges und für untergeordnete Teile für sich ausgeführt. Der fundamentale Process der Berechnung für Glieder der ersten Art wird im § 4 No. 9 für den Fall, dass beide Hauptbedingungen erfüllt sind, auseinandergesetzt. Er beruht auf der Einführung einer neuen Veränderlichen y durch die Gleichung $\psi(z) = \psi(\zeta)e^{-y}$ und auf der Entwickelung von $f(z)dz/dy = \Pi(y)$ nach den Potenzen von y. Die Formeln sind etwas zu verwickelt, um sie hier anzuführen. Dieser Process ist aber nicht immer anwendbar; dann werden andere Verfahren angewandt und andere Veränderliche eingeführt: $\psi(z) = \psi(\zeta)\cdot\psi_1(y)$ (wo $\psi_1(y)$ eine im Bereich von $y = 0$ holomorphe Function, $\psi_1(0) = 1$) (§ 5). Im § 6 werden die Ausnahmefälle erster Art betrachtet (wenn k_2/k_1 sich der Grenze 1 nähert), im § 7 die der zweiten Art (wenn $\Pi(y)$ nicht nach ganzen Potenzen von y entwickelbar oder der Convergenzkreis zu klein ist). Im § 8 werden die zu Grunde gelegten Bedingungen derart erörtert, dass die Möglichkeit, den diese Bedingungen erfüllenden Hauptweg zu construiren, nachgewiesen wird. § 9 enthält Bemerkungen über die Glieder zweiter Art. § 10 u. ff. enthalten Anwendungen, nämlich auf die Aufstellung eines angenäherten Ausdrucks für $\Phi^{(m)}(x)$, für ein entferntes Glied der Taylor'schen, der MacLaurin'schen und der Laurent'schen Reihe, für X_n (die Formeln sind aber ziemlich verwickelt). § 11 ist der Berechnung eines entfernten Gliedes der Lagrange'schen Reihe gewidmet (in der zweiten Abhandlung werden diese Ausführungen vervollständigt), § 12 den Anwendungen auf die Berechnung der Functionen durch unendliche Reihen und auf die Theorie der Differentialgleichungen. Die Schlussparagraphen beschäftigen sich mit der Vergleichung einiger Resultate von Markow (Theorie der Differenzen Abt. I), Tschebyschew, Markow und Posse über Grenzwerte der Integrale. Si.

P. Mansion. Démonstration élémentaire de la formule de Cauchy relative aux résidus. Brux. S. sc. **24** A, 88-90.

G. H. Hardy. Question 14317. Ed. Times **73**, 61-63.

Das Frullani'sche Theorem:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\varphi(ax)-\varphi(bx)\right\}=\left\{\varphi(\infty)-\varphi(0)\right\}\ln\frac{a}{b}$$

unter Ausdehnung auf die Fälle zu beweisen, in denen 1) $\varphi(x)$ ein discretes System von Unendlichen in dem Intervalle $(0\cdots\infty)$ hat, während es einen bestimmten Integralwert in der Nähe jedes Wertes von x besitzt; 2) wenn nur der Hauptwert des Integrals bestimmt ist. Auch der Fall wird betrachtet, bei welchem $\varphi(x)$ im Unendlichen zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen schwankt. Lp.

G. H. Hardy. Question 14243. Ed. Times **72**, 80-81.

Es seien p und m ganze Zahlen, $p>m$, so ist für ungerades m:

$$\int_0^\pi x\cos px\sin^m x\,dx=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}[m+(-1)^p]}\cdot m!\,\pi}{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\cdots(p^2-m^2)},$$

für gerades m:

$$\int_0^\pi x\sin px\sin^m x\,dx=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}[m+(-1)^p]}\cdot m!\,\pi}{p(p^2-2^2)(p^2-4^2)\cdots(p^2-m^2)}.$$

Beweis von J. H. Dipp. Lp.

H. W. Curjel. Note on questions 14143 and 14173. Ed. Times **72**, 54-56.

Verf. weist darauf hin, dass die in den beiden Aufgaben vorkommenden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tang} x}{x},\quad \int_0^\infty \cos rx\,dx,\quad \int_0^\infty \sin rx\,dx$$

nicht definirt und daher die geforderten Werte unrichtig sind. Lp.

E. Barisien. Sulla curva luogo dei punti che hanno per coordinate $x=a\cos^n\varphi$, $y=b\operatorname{sen}^n\varphi$. Periodico di Mat. (2) **2**, 151-155.

Berechnung des Sectors dieser Curven

$$S=\frac{nab}{2^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}2\varphi\,d\varphi$$

für verschiedene besondere Werte von n mit Angabe der cartesischen Gleichungen der betreffenden Curven. Lp.

E. N. Barisien. Sull' identità di certi integrali definiti. Periodico di Mat. (2) **2**, 155-156.

Durch Anwendung von cartesischen Coordinaten oder von Polarcoordinaten auf Fragen der Integralrechnung für geometrische Gebilde erhält man Integrale verschiedener Form von gleichem Werte. So z. B. ist der Inhalt der Curven $x^4/a^4+y^4/b^4=1$:

$$F=4\frac{a}{b}\int_0^a \sqrt[4]{a^4-x^4}.dx=ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}.$$

Lp.

F. von Dalwigk. Ueber das Poisson'sche Integral. Gesellsch. z. Beförd. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg, No. 4. Mai 1900, 59-65. 8°.

E. Picard. Sur une formule de Weierstrass. Darboux Bull. (2) **24**, 30-32.

Ist das Polynom $U(x,y)$ definirt durch die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(y-x)\sqrt{P(y)}}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{P(y)}}{(x-y)\sqrt{P(x)}}\right]=\frac{U(x,y)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}},$$

wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom mit den von einander verschiedenen Wurzeln $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bezeichnet, so hat das Doppelintegral

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}}\frac{U(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}}$$

den Wert Null oder einen von Null verschiedenen Wert, je nachdem

$$\mu+1<\nu \text{ oder } \mu+1=\nu$$

ist. Für diesen Weierstrass'schen Satz wird hier ein sehr einfacher und völlig neuer Beweis gegeben. Hau.

T. Cazzaniga. Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 567-575.

Die krummlinigen Integrale $\int A(x,y)dx$, $\int B(x,y)dy$ sind nicht besondere Fälle des Integrals $\int Q(x,y)\cdot dP(x,y)$, sondern entstehen aus dem letzteren durch geeignete Transformationen; das Gleiche gilt von den Oberflächenintegralen

$$\iint A(x,y,z)\,dy\,dz,\ \iint B(x,y,z)\,dz\,dx,\ \iint C(x,y,z)\,dx\,dy$$

in Bezug auf das nur formal allgemeinere Integral

$$\iint R(x,y,z)\,d\,Q(x,y,z)\,d\,P(x,y,z).$$

Hau.

H. Lebesgue. Sur la définition de certaines intégrales de surface. C. R. **131,** 867-870.

Es mögen die drei Gleichungen

$$x = f(u,v), y = \varphi(u,v), z = \psi(u,v)$$

eine quadrirbare Fläche vorstellen, und es sei $F(u,v)$ eine in jedem Punkte dieser Fläche definirte Function. Die Fläche werde in quadrirbare Elemente geteilt; der Flächeninhalt eines solchen Stückes sei mit δa bezeichnet und mit Mm, das Maximum, bezw. Minimum von F in demselben. Variirt man die Zerlegung der Fläche in der Weise, dass der grösste Durchmesser jedes Elementes der Null zustrebt, so convergiren die beiden Summen $\Sigma M\cdot\delta a$ und $\Sigma m\cdot\delta a$ gegen feste Grenzwerte, welche von der gewählten Art der Zerlegung unabhängig sind und mit dem oberen, bezw. unteren Integralwerte übereinstimmen. Beide Grenzwerte sind gleich, wenn F integrirbar ist. Der letztere Fall bietet sich besonders dar, wenn F eine stetige Function ist. Hau.

H. Lebesgue. Sur le minimum de certaines intégrales. C. R. **131,** 935-937.

Wenn man beweisen will, dass eine Function $f(E)$ von gewissen Elementen E ihr Minimum erreicht, so hat man folgende zwei Operationen auszuführen:

I. Eine Reihe von Elementen $E_1, E_2, \ldots,$ welche ein Grenzelement e besitzen, so auszuwählen, dass $f(E_1)$, $f(E_2), \ldots$ gegen die untere Grenze $m\,f(E)$ von $f(E)$ convergiren.

II. Nachzuweisen, dass $f(e) = m\,f(E)$ ist.

Es werden dann speciell die Existenz des Minimums der beiden Functionen:

$$f(C) = \int\limits_C F(x,y,z)\,ds$$

und

$$f(S) = \iint\limits_S F(x,y,z)\,da$$

nachgewiesen, wo die Curve C rectificirbar und die Fläche S quadrirbar ist, beide gewissen Bedingungen an den Grenzen genügen, und F eine in dem betrachteten Bereiche stetige Function ist. In diesen beiden Fällen ist dann nur die Operation I auszuführen. Hau.

Le Roux. Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles. S. M. F. Bull. **28**, 168-172.

Zwischen dem Differential

$$\frac{du\,dv}{\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

welches durch Aenderung von u und v in $-\frac{1}{u}$ und $-\frac{1}{v}$ in die Gestalt

$$\frac{du\,dv}{(ux+vy+1)^3}$$

übergeführt wird, und einer gewissen projectiven Invariante eines ebenen Systems zweier Dreiecke besteht eine ähnliche Beziehung wie zwischen dem Differentiale

$$\frac{dz}{(z-x)^2}$$

und dem anharmonischen Verhältnisse.

Im Anschlusse hieran wird das Doppelintegral berechnet:

$$J=1\cdot 2\int\int\frac{dx\,dy}{(ux+vy+1)^3},$$

erstreckt über die Fläche eines Dreiecks, welche von der Geraden

$$ux+vy+1=0$$

nicht geschnitten wird. Sind $a_i x+b_i y+c_i=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ die Gleichungen der Dreiecksseiten, ist

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

sind A_i, B_i, C_i die Adjuncten von a_i, b_i, c_i in $\varDelta$, und ist

$$\varDelta_i=A_i u+B_i v+C_i,$$

so ergiebt sich

$$J=\frac{\varDelta^2}{\varDelta_1\cdot\varDelta_2\cdot\varDelta_3}.$$

Hau.

A. Pell. Evaluation of a definite integral. Annals of Math. (2) **1**, 144-146.

Es wird der bei Bierens de Haan ohne Beweis stehende Wert des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-(px^2+q/x^2)}\,\frac{\sin}{\cos}\left\{rx^2+\frac{s}{x^2}\right\}dx$$

berechnet.

F.

W. F. Sheppard. Some quadrature formulae. Lond. M. S. Proc. 32, 258-277.

Das von der Curve $z=f(x)$, der x-Axe und den Ordinaten $z_0=f(x_0)$ und $z=f(x_0+mh)$ begrenzte Flächenstück hat angenähert den Flächeninhalt

$$A=\frac{pA_a+qA_b+rA_c+\dots}{p+q+r+\dots}.$$

In dieser Formel bezeichnen die i Zahlen $a, b, c, \dots$ beliebige Teiler von m (einschliesslich 1 und m), und die i Zahlen $p, q, r, \dots$ sind definirt durch die $i-1$ Gleichungen

$$pa^{2\nu}+qb^{2\nu}+rc^{2\nu}+\dots=0 \quad (\nu=1,2,\dots,i-1),$$

während

$$A_a=a\cdot h(\tfrac{1}{2}z_0+z_a+z_{2a}+\dots+z_{m-a}+\tfrac{1}{2}z_m),$$
$$A_b=b\cdot h(\tfrac{1}{2}z_0+z_b+z_{2b}+\dots+z_{m-b}+\tfrac{1}{2}z_m)$$

u. s. w. ist ($z_\varrho=f(x+\varrho h)$).

Beschränkt man sich auf zwei Teiler, so erhält man für $a=1$, $b=2$ und $a=1$, $b=3$, je nachdem m durch 2 oder 3 teilbar ist, die beiden Simpson'schen Formeln; nimmt man, wenn m durch 6 teilbar ist, die drei Teiler $a=1$, $b=2$, $c=3$, so ergiebt sich die Weddle'sche Formel. Es wird ausser diesen noch eine grosse Anzahl specieller Formeln abgeleitet und ihre Genauigkeit discutirt.

Ausser der angeführten Näherungsformel wird noch eine grössere Zahl ähnlich gebauter Formeln aufgestellt. Zum Schlusse wird das Verfahren verallgemeinert, um analog gebaute Näherungsformeln für das Volumen von Körpern zu erhalten. Hau.

W. F. Sheppard. On the calculation of the double integral expressing normal correlation. Cambr. Trans. 19, 23-68; Cambr. Proc. 10, 317.

H. Amstein. Note complémentaire sur le logarithme-intégral. Bull. Soc. Vaud. 36, 1-15.

M. Cailler. Exemple de transformation d'une intégrale multiple. Inversion d'une intégrale. Arch. sc. phys. Genève (4) 8, 293 (1899).

L. Schläfli. Praktische Integration. Bern. Mitt. 1900, 83-102.

Dieser Aufsatz, der von J. H. Graf aus dem Nachlasse von Schläfli veröffentlicht ist, war in Briefform für einen Freund des schöpferischen

Schweizer Mathematikers bestimmt. Etwa aus dem Jahre 1840 stammend, sollten die Ausführungen den nicht bezeichneten Freund über einige Bedenken aufklären, die diesem beim Lesen von Raabe's Differential- und Integralrechnung aufgestiegen waren. Der wesentliche Inhalt ist die Ableitung der Euler-Maclaurin'schen Summenformel für die Berechnung eines bestimmten Integrals. Die hierbei auftretenden Bernoulli'schen Zahlen gaben Schläfli Veranlassung, genauere Untersuchungen über die Bernoulli'sche Function und jene Zahlen anzustellen. Der Herausgeber betont daher, dass für die Priorität der Aufstellung der Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und Functionen dieser Aufsatz von Bedeutung sei. Am Schlusse sagt Schläfli: „Es waren die Gleichungen

$$1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (x-1)^{2n} = \varphi(x, n),$$
$$1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \cdots + (x-1)^{2n-1} = \psi(x, n),$$

auf die ich durch Lesung von Bourdon's Algebra gelangte, die mich zuerst mit jenen Zahlen bekannt machten. Seither, es sind nun bald 10 Jahre, bemühte ich mich vergeblich, über sie näheren Aufschluss zu erlangen, namentlich zur Beantwortung obiger drei Fragen zu gelangen. Sieh nun, das Bedürfnis, das ich hatte, dir nicht nur die Gleichung $\varphi(\frac{1}{2}, n) = 0$ aus Poisson schlechtweg hinzuschreiben, sondern auch die Eigenschaften der dabei vorkommenden Bernoulli'schen Zahlen zu beweisen, hat mich jetzt gezwungen, meine eigenen lange gehegten Wünsche zu erfüllen. Es dreht sich vorzüglich alles um die Gleichung

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n.$$

Ich kannte zwar schon vorher, ehe ich daran ging, dir zu schreiben, zwei Beweise derselben, deren einer sich in Raabe befindet. Aber der, den ich hier gebe, ist elementarer als jene beiden.“ Lp.

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

A. R. Forsyth. Theory of differential equations. (Part II. Ordinary equations, not linear.) Cambridge: University Press. Vol. II; XI + 344 S.; Vol. III: X + 391 S. 8°.

Die beiden vorliegenden, als zweiter Teil der Theorie der Differentialgleichungen veröffentlichten Bände bilden den zweiten Beitrag des Verf. zur Erfüllung eines alten Versprechens; sie behandeln mit möglichster Vollständigkeit, nach dem bisherigen Stande der Wissenschaft, den functionalen Charakter der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Ausschluss der linearen, die einem späteren Teile vorbehalten bleiben sollen. Der erste Teil umfasst Kap. I bis X. Im ersten, einleitenden

Kapitel werden mit Benutzung des Theorems von **Weierstrass** über die Form einer regulären Function mehrerer Variablen in der Nähe einer Nullstelle Normalformen des zu untersuchenden Systems von Differentialgleichungen aufgestellt. Das zweite Kapitel ist dem **Cauchy**'schen Existenzbeweise eines einzigen Integrals mit gegebenen Anfangswerten gewidmet. Kap. III giebt eine Einteilung der singulären Punkte einer Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades $\frac{dw}{dz} = f(w, z)$ in Verzweigungspunkte, ausserwesentlich singuläre Punkte erster und zweiter Art und wesentlich singuläre Punkte, sowie die damit eng zusammenhängende Unterscheidung zwischen isolirten und continuirlichen Singularitäten, ferner die typische Form von $f(w,z)$, falls diese Function eindeutig ist, in der Umgebung der ausserwesentlich singulären Stellen. In Kap. IV wird der Einfluss einer ausserwesentlich singulären Stelle erster Art der Differentialgleichung auf die Integrale derselben untersucht; sie giebt Anlass zur Einführung der **Fuchs**'schen „Punkte der Unbestimmtheit" und zu der dadurch nötig werdenden Ergänzung des **Cauchy**'schen Unitätsbeweises. In Kap. V wird die Reduction der Differentialgleichungen auf die typischen, in der Umgebung einer ausserwesentlichen Stelle zweiter Art gültigen Endformen durchgeführt und in Kap. VI der functionale Charakter der Integrale in der Umgebung einer solchen Stelle untersucht; es handelt sich dabei hauptsächlich um die drei Formen:

(1) $$t \frac{dv}{dt} = av + bt + \cdots,$$

(2) $$t \frac{dv}{dt} = gv^m + bt + \cdots,$$

(3) $$t^s \frac{dv}{dt} = \varphi(v, t).$$

Kap. VII erörtert den Einfluss einer wesentlichen Singularität der Differentialgleichungen auf ihre Integrale und bringt den Beweis des wichtigen Theorems von **Painlevé**, dass die wesentlichen Singularitäten der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung „fest", d. h. nicht mit den Anfangswerten verschiebbar sind, im Gegensatze zu den Differentialgleichungen höherer Ordnung. In Kap. VIII werden Differentialgleichungen erster Ordnung beliebigen Grades behandelt, besonders in Bezug auf die im allgemeinen mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte, und **Hamburger**'s Untersuchungen über die Wurzeln der Discriminante in ihrer Beziehung zur Differentialgleichung wiedergegeben. Kap. IX enthält die Arbeiten von **Fuchs**, **Poincaré** und dem Ref. über die Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, Kap. X die entsprechenden Untersuchungen von **Briot** und **Bouquet** über Differentialgleichungen $f(w', w) = 0$ mit eindeutigen Integralen, sowie einige elementare Betrachtungen über Differentialgleichungen erster Ordnung mit algebraischen Integralen. — Der dritte

Band umfasst Kap. XI bis XVII. In Kap. XI werden die reducirten Formen der Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung singulärer Stellen der Ableitungen behandelt und im ganzen fünf Fälle unterschieden; in Kap. XII die zugehörigen Integrale, besonders für den Fall zweier abhängigen Variabeln; in Kap. XIII Systeme von Differentialgleichungen mit mehrfachen Werten der Ableitungen und ihre singulären Lösungen. Die drei nächsten Kapitel sind der Untersuchung der nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewidmet; leider hat Verf. die neuesten Arbeiten Painlevé's, die einen bedeutenden Fortschritt auf diesem Gebiete bedeuten, nicht mehr benutzen können. Das Schlusskapitel endlich beschäftigt sich hauptsächlich mit den algebraischen Integralen der Differentialgleichungen des n-Körper-Problems und bringt einen Beweis des Bruns'schen Theorems.

Wie aus der vorstehenden Inhaltsangabe ersichtlich ist, hat Verf. in den beiden vorliegenden Bänden ein überaus reichhaltiges Material verarbeitet. Sieht man von den einschlägigen Arbeiten Lie's, von Picard's asymptotischen Lösungen und Poincaré's Untersuchungen der geometrischen Eigenschaften der durch Differentialgleichungen definirten Curven ab, die Verf. absichtlich bei Seite gelassen hat, um den Umfang des Werkes nicht übermässig zu erweitern, so sind fast alle wichtigeren Arbeiten auf diesem Gebiete von ihm benutzt worden, wenn auch freilich ihre Durcharbeitung keine überall gleichmässige ist. Vollständige Litteraturangaben gestatten aber dem Leser, stets auf die Originalarbeiten zurückzugreifen. Zur Illustrirung der Theorien und zur Uebung in ihrer Anwendung dienen zahlreiche Beispiele, zum Teil vom Verf. selbst durchgeführt. Ein sorgfältiges Inhaltsverzeichnis am Anfang sowie ein Sach- und Namenregister am Ende erleichtern in dankenswerter Weise den Gebrauch des nicht gerade leicht lesbaren Buches, dessen Ausstattung, wie bei allen englischen Lehrbüchern, eine überaus gute ist. Wbg.

L. Schlesinger. Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig: C. J. Göschen (Sammlung Schubert XIII). VIII + 309 S. 8⁰.

Der vorliegende Band der „Sammlung Schubert" reiht sich den bereits erschienenen Bänden würdig an; sein Charakter ist hauptsächlich dadurch gekennzeichnet, dass er eine im wesentlichen unveränderte Wiedergabe der Vorlesungen ist, die Verf. im Wintersemester 1899 an der Universität Klausenburg gehalten hat. Dadurch ist bedingt, dass Verf. bei der Abfassung seines Buches mehr methodisch als systematisch zu Werke gegangen ist und sich von dem Princip „non multa, sed multum" hat leiten lassen. Der Leser wird daher vieles in dem Buche nicht finden, was in anderen Werken über Differentialgleichungen behandelt wird, so z. B. die Theorie des Euler'schen Multiplicators, die geometrischen Untersuchungen von Darboux, Picard und Poincaré und die nichtlinearen Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung. Aber was

er dort findet, ist so gründlich durchgearbeitet, dass er mehr Nutzen davon hat, als wenn er irgend ein umfassendes Compendium benutzt; denn er wird dadurch in den Stand gesetzt, das Wesen der Forschungsmethode kennen zu lernen. Ref. kann daher dem Verf. nur beistimmen, wenn dieser in dem Vorwort sagt: „Es kommt für den Anfänger nicht so sehr darauf an, dass er gleich die ganze Tragweite einer bestimmten Methode kennen lernt, als vielmehr darauf, dass er zunächst ihr Wesen richtig erfasst. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es aber, die betreffende Methode an Beispielen zu entwickeln, die einerseits so allgemein sind, dass keine der Schwierigkeiten, die durch das Wesen jener Methode überwunden werden sollen, fehlt, und andererseits so speciell, dass Schwierigkeiten accessorischer Natur möglichst vermieden werden." — Verf. hat sich also, abgesehen von der Einleitung und zwei Stellen des Textes, ausschliesslich auf die functionentheoretische Behandlung der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt, während darüber hinausgehende Fragen nur kurz formulirt und durch Litteraturnachweise belegt sind. Dabei war ihm der Gesichtspunkt massgebend, dass die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen in der Unterscheidung zwischen festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren Singularitäten zu finden ist.

In der Einleitung wird der Begriff einer Differentialgleichung und ihrer Integration im modernen Sinne aufgestellt, eine allgemeine Orientirung über die Natur der Integrale gegeben und die Reduction eines Systems von Differentialgleichungen auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung gezeigt; das Wesen der „Anfangsbedingungen" wird an einem Beispiel aus der analytischen Mechanik erläutert. — 1. Kapitel. Allgemeine Untersuchung der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung: Cauchy's Convergenzbeweis. Singuläre Stellen der Integrale. Feste und verschiebbare Singularitäten. 2. Kapitel. Theorie der Riccati'schen Differentialgleichung. (Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, speciell homogene.) Zusammenhang mit der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. 3. Kapitel. Untersuchung der singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden. Die Riemann'sche Differentialgleichung. 4. Kapitel. Die Gauss'sche Differentialgleichung. Fundamentalsubstitutionen. Multiplicator. Adjungirte Differentialgleichung. Integration durch bestimmte Integrale. Euler'sche Transformirte. Begriff der „Klasse". Legendre'sche Polynome. 5. Kapitel. Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit: Normalreihen, determinirende Factoren. Begriff der asymptotischen Darstellung. Rang. Laplace'sche und Bessel'sche Differentialgleichung. 6. Kapitel. Integration der completten linearen Differentialgleichung. Die Fuchs'sche Reihenentwickelung der Integrale. 7. Kapitel. Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die Ableitung als implicite Function der abhängigen Variabeln gegeben ist: Algebraische Functionen; Verschwinden der Discriminante. Hamburger's Theorie der singulären Lösungen. 8. Kapitel. Differentialgleichungen mit festen Ver-

zweigungspunkten. Die Fuchs'schen Bedingungen. Die Briot- und Bouquet'schen Differentialgleichungen. Die Untersuchungen von Poincaré: Rang null, eins und zwei. Behandlung der Gleichungen vom Range zwei (nach Painlevé). Schlussbemerkung.

Man ersieht aus dem vorstehenden, nur das Wesentlichste enthaltenden Auszuge des Inhaltes, dass trotz der auferlegten Beschränkung der Stoff noch reichhaltig genug sich gestaltet hat, und er ist durchweg mit Benutzung der neuesten, vom Verf. stets angegebenen Litteratur behandelt, so dass der Leser auf der Höhe der Wissenschaft steht und sich über Gebiete, die ihn besonders interessiren, weiter unterrichten kann — ein nicht zu unterschätzender Vorteil. Allerdings kann Ref. sich der Ueberzeugung nicht verschliessen, dass nur derjenige „Anfänger" den gewünschten Nutzen von dem Buche haben wird, der nicht nur mit den „Elementen" der Infinitesimalrechnung, sondern auch mit der Functionentheorie wohl vertraut ist. Wbg.

H. Liebmann. Lehrbuch der Differentialgleichungen. Leipzig: Veit u. Comp. VI + 226 S. 8°.

Im Gegensatze zu dem Lehrbuche von Schlesinger (vergl. das vorangehende Referat) behandelt Verf. die Theorie der Differentialgleichungen hauptsächlich vom geometrischen Gesichtspunkte aus, und zwar unter dem unverkennbaren Einflusse von Lie und Engel. Bei der grossen Fülle von Werken über Differentialgleichungen, die gerade in letzter Zeit erschienen sind, müsste ein jedes neu erscheinende Lehrbuch eigentlich erst seine Existenzberechtigung nachweisen, und zwar durch eine Eigenart, die es von anderen Lehrbüchern unterscheidet. Hätte nun Verf. seine Eigenart, die Anwendung geometrischer Vorstellungen und insbesondere Lie'scher Principien auf die Integration der Differentialgleichungen, consequent durchgeführt, so wäre vielleicht unter entsprechendem Titel ein nützliches Buch entstanden. Dadurch aber, dass Verf. die ganze Theorie der totalen und partiellen Differentialgleichungen in den engen Rahmen eines kurzen Lehrbuches zusammenfassen wollte, war er gezwungen, fast überall an der Oberfläche haften zu bleiben, ohne auch nur einigermassen in die Tiefe zu dringen; das illustriren u. a. recht handgreiflich die vielen trivialen Beispiele, z. B. die der (nur scheinbar) impliciten Functionen, die ihren Zweck, das Wesen der Methode kennen zu lehren, gänzlich verfehlen. Von einer einheitlichen Entwickelung des Stoffes kann dabei natürlich nicht die Rede sein: so besteht das dritte Kapitel aus mehreren organisch nicht zusammenhängenden Abschnitten. Auch die Heranziehung der neuesten Litteratur, wie man sie heutzutage von einem Lehrbuche verlangen muss, ist in diesem engen Rahmen ein Ding der Unmöglichkeit: so vermisst man in der Theorie der singulären Punkte und Lösungen die schönen Untersuchungen von Darboux, Picard, Poincaré, Fuchs, Painlevé und Hamburger, von den linearen Differentialgleichungen gar nicht zu reden. Aber wenigstens hätte Verf. durch zahlreiche Hinweise auf Original-

arbeiten dem Leser Gelegenheit zu weiterem Studium der betreffenden Gebiete geben müssen; derartige Litteraturangaben fehlen vollständig. — Im einzelnen wären noch einige Unklarheiten und Mängel in den functionentheoretischen Definitionen (z. B. „analytisch" gleich „eindeutig" p. 8; 37) und Beweisen (p. 3; 37) hervorzuheben, die durch mehrere störende Druckfehler noch verschärft werden (p. 3 „erste" statt „zweite", p. 37 Y_0 statt u, p. 52 $\frac{\partial \varrho(x,y)}{\partial x}$ statt $\frac{\partial \varrho(x,y)}{\partial y}$, p. 56 m statt α, p. 61 $\cos\varphi$ statt $\cos y$, p. 65 $y=0$ statt $x=0$, p. 198 $\frac{\partial f}{\partial x}$ statt $\frac{\partial f}{\partial y}$).

Die rein empirische Integration der Differentialgleichung für den Euler'schen Multiplicator (p. 52-53) hat geringen Wert; die Darstellung des Zusammenhanges der Riccati'schen Differentialgleichung mit der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung fehlt, ebenso die des Zusammenhanges zwischen der „allgemeinen" und der „vollständigen" Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der in dem klassischen Werke von Goursat so klar auseinandergesetzt ist. — Um nun auch die guten Seiten des Buches hervorzuheben: Verf. giebt eine elementare, leicht verständliche Darstellung der Berührungstransformationen und ihrer Anwendung auf die Integration der Differentialgleichungen (was allerdings auch bereits von Engel und Scheffers geschehen ist); man merkt, dass er hier in seinem Element ist. Die beiden letzten Kapitel, die über partielle Differentialgleichungen handeln, sind demgemäss am besten geraten: hier ist auch die Einheitlichkeit der Entwickelung gewahrt, und die Beispiele sind wirklich lehrreich. Sonst hat dem Ref. noch die geometrische Deutung des Euler'schen Multiplicators, sowie die geometrische Veranschaulichung der verschiedenen Arten von singulären Punkten gefallen, wie man sie in den meisten Lehrbüchern nicht findet. Im Interesse des Verf. wäre also zu wünschen, dass er bei einer etwaigen Neuauflage sich auf den rein geometrischen Standpunkt beschränkte, diesen aber dafür vertiefte, damit sein Buch unter entsprechend verändertem Titel sich neben den Werken von Koenigsberger, Picard, Schlesinger, Forsyth, Painlevé und Goursat behaupten könnte. Wbg.

P. Painlevé. Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. Encykl. d. math. Wiss. **2**, 189-229.

Inhaltsübersicht: Definitionen und Fundamentalprobleme. Stand der Theorie vor Cauchy. Methode von Cauchy-Lipschitz. 3) Methode der successiven Annäherungen. Methode des „calcul des limites". Gewöhnliche singuläre Anfangsbedingungen. Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei Gleichungen erster Ordnung. Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei beliebigen Differentialsystemen. Wbg.

E. Vessiot. Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden. Encykl. d. math. Wiss. **2,** 230-293.

Inhaltsübersicht: Fundamentale Probleme. Definitionen. Historischer Ueberblick. Formale Integrationstheorien. Einführung neuer Variabeln. — Gleichungen erster Ordnung. Systeme von Gleichungen erster Ordnung; allgemeine Theorien. Specielle Methoden für Gleichungen n-ter Ordnung. Specielle Klassen von Gleichungen und Gleichungssystemen: a) Die lineare Gleichung n-ter Ordnung. b) Lineare Systeme. c) Lie'sche Systeme und Verallgemeinerungen. Aequivalenzprobleme. Rationelle Integrationstheorien. Wbg.

M. Bôcher. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Encykl. d. math. Wiss. **2,** 437-463.

Inhaltsübersicht: 1. Die fundamentalen Fragestellungen und ihre Entstehung aus der mathematischen Physik. 2. Die grundlegende Abhandlung von Sturm und das Oscillationstheorem im Falle eines Parameters. 3. Weiteres über den Fall eines Parameters. 4. Ausdehnung der Sturm'schen Resultate auf Differentialgleichungen höherer Ordnung. 5. Das Oscillationstheorem im Falle mehrerer Parameter. 6. Excurs über polynomische Lösungen. 7. Die seit 1890 von partiellen auf gewöhnliche Differentialgleichungen übertragenen Methoden. Wbg.

J. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. **24,** 1-88.

Bei seinen Untersuchungen über die Natur der reellen Integralcurven, welche eine Differentialgleichung der Form $dx/X = dy/Y$, wo X und Y Polynome in x und y sind, befriedigen, hat sich Poincaré (Journ. de Math. 1881, 1882, ⋯; vgl. F. d. M. **13,** 591-593; **14**, 696-697, ⋯) auf den Fall beschränkt, wo die Differentialgleichung eine singuläre Stelle (a,b) der Art besitzt, dass $X = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + X_2$, $Y = \gamma(x-a) + \delta(y-b) + Y_2$ ist, worin X_2 und Y_2 Polynome bedeuten, die $x-a, y-b$ mindestens in der Dimension 2 enthalten und die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

weder die Wurzel Null noch eine mehrfache Wurzel habe.

Der Verf. der vorliegenden umfangreichen Arbeit führt diese Untersuchungen in interessanter Weise fort und zeigt zunächst, dass die wichtigsten Poincaré'schen Sätze sich auf den Fall ausdehnen lassen, dass über die Functionen X und Y nur die Voraussetzung getroffen wird, sie seien ebenso wie ihre Ableitungen nach x und y stetig.

Dieser Nachweis wird im ersten Kapitel geführt, in welchem die Begriffe einer „courbe intégrale traversant un point singulier“ und der „région nodale“ sich als bedeutungsvoll erweisen.

In den folgenden Kapiteln studirt der Verf. die Natur der singulären Punkte näher für den Fall, dass X und Y holomorphe Functionen der Variabeln sind; insbesondere wird im dritten Kapitel der Fall untersucht, wo die Glieder kleinster Dimension von der Ordnung 1 sind, und wo die Wurzeln der oben angegebenen Gleichung nicht beide Null sind. Und zwar wird die Untersuchung in diesen Fällen durchgeführt, ohne dass man die Reihenentwickelung der Integrale in der Nähe eines singulären Punktes zu kennen braucht.

Der allgemeine Fall wird vermittelst einer Reihe bilinearer Substitutionen auf Differentialgleichungen der Form

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y) \qquad (a \neq 0)$$

zurückgeführt, worin $\mathfrak{P}$ eine Taylor'sche Reihe bedeutet, deren sämtliche Glieder die Dimension > 1 haben. Diese Reduction gestattet, die Natur der Integralcurven in der Nähe eines singulären Punktes völlig zu bestimmen, sowie Reihenentwickelungen nach einer früheren Methode des Verf. zu gewinnen. („Sur les points singuliers des équations différentielles“. Stockh. Öfv. 1898; F. d. M. **29**, 275-276). Verf. ist also zur vollständigen Lösung eines Problems gelangt, das Briot und Bouquet in ihren „Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles“ (J. de l'Ec. Pol. 1856) behandelt haben.

Gz.

M. Hamburger. Ueber die singulären Lösungen der Differentialgleichungen höherer Ordnung. J. für Math. **121**, 265-299.

M. Hamburger. Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit n abhängigen Variabeln. J. für Math. **122**, 322-354.

Ueber die erste Arbeit sagt Verf. in der Einleitung: „Im 112. Bande dieses Journals S. 205 ff. (F. d. M. **25**, 558-562, 1893) sind die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung in y als Functionen von x nach einem Verfahren behandelt worden, welches gestattet, aus der Gestalt der Entwickelung eines Teilers $y-\eta$ der Discriminante der Differentialgleichung in Beziehung auf y' nach Potenzen von $x-c$, wo c ein willkürlicher Wert ist, zu entscheiden, ob $y-\eta$ ein singuläres oder particulares oder überhaupt kein Integral darstellt. Dem Verfahren lag ein Princip zu Grunde, das Fuchs in seiner Arbeit „Ueber Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“ (Berl. Ber. 1884, 699 ff.) angewandt hat. Diese Methode lässt eine Erweiterung zu auf die singulären Lösungen algebraischer Differentialgleichungen n-ter Ordnung, die in

Form von Differentialgleichungen $(n-1)$-ter Ordnung ohne willkürliche Constante erscheinen. Ist $y^{(n-1)} - \eta$ ein Teiler der Discriminante Δ der gegebenen Differentialgleichung in Beziehung auf $y^{(n)}$, wo η eine Function von $x, y, y', \cdots, y^{(n-2)}$ bedeutet, so giebt die Entwickelung von $y^{(n-1)} - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ für einen willkürlichen Wert von x_0 in gleicher Weise charakteristische Merkmale dafür, ob $y^{(n-1)} = \eta$ ein singuläres oder particulares oder überhaupt kein erstes Integral darstellt. Hiermit sowie mit der geometrischen Bedeutung von $y^{(n-1)} = \eta$ in allen Fällen beschäftigt sich der erste Abschnitt. Im zweiten wird eine Darstellung von n von einander unabängigen ersten Integralen in in der Form $\varphi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = \text{const.}$ gegeben, worin φ nach Potenzen von $y^{(n-1)} - \eta$ mit von $x, y, y', \cdots, y^{(n-2)}$ abhängenden Coefficienten entwickelt ist, und es wird gezeigt, wie die Exponenten der niedrigsten Potenz in der Entwickelungsreihe ebenfalls für die Beziehung der Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ zur Differentialgleichung charakteristisch sind. Im Anschluss daran wird im dritten Abschnitt die Existenz von ersten Integralen in der Form $F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}, C) = 0$ abgeleitet, welche Gleichung vom m-ten Grade in C ist, falls m den Grad der Differentialgleichung in Bezug auf $y^{(n)}$ bedeutet, worin ferner der Coefficient von C^m gleich 1 und die Coefficienten der übrigen Potenzen in der Umgebung eines willkürlichen Wertsystems $x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ in nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, y' - y'_0, \cdots, y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}$ fortschreitende Reihen entwickelt werden können. Eine solche Integralgleichung wird bei der weiteren Betrachtung zu Grunde gelegt und die Discriminante D von $F = 0$ in Beziehung auf C untersucht. Bezeichnet man einen Teiler derselben mit $y^{(n-1)} - \eta'$, so zeigt sich, dass die Entscheidung darüber, ob $y^{(n-1)} = \eta'$ ein singuläres Integral der aus $F = 0$ hervorgehenden Differentialgleichung ist, durch dieselbe Beschaffenheit des Exponenten der niedrigsten Potenz von $y^{(n-1)} - \eta'$ in der Entwickelung von C nach Potenzen von $y^{(n-1)} - \eta'$ gegeben wird, die das ausschliessliche Kriterium dafür war, dass die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$, wo $y^{(n-1)} - \eta$ ein linearer Teiler der Discriminante Δ ist, eine singuläre Lösung ist. Es folgt daraus, dass die Gleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ die singulären Lösungen zu gemeinsamen Wurzeln haben müssen. Während aber eine Bedingung dafür zu erfüllen ist, dass die Wurzeln von $\Delta = 0$ eine Differentialgleichung als erste Integrale befriedigen, ist umgekehrt mindestens eine Bedingung erforderlich, damit keine Wurzel von $D = 0$ ein Integral der Differentialgleichung sei."

In der zweiten Arbeit wird die Behandlung der Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen Variabeln nach der gleichen Methode durchgeführt. „Wiewohl die Differentialgleichungssysteme mit n abhängigen Variabeln stets auf eine einzige Differentialgleichung n-ter Ordnung zurückgeführt werden können, so schien es doch von Interesse, die Frage nach den singulären Lösungen der ersteren Systeme ohne Hülfe dieser Reduction zu untersuchen. Die Entwickelungen geschehen nach derselben Methode wie in der ersten Arbeit, und zwar wird zuerst von den Differentialgleichungen, dann von den

vollständigen Integralen ausgegangen. Die Ergebnisse stimmen in beiden Betrachtungen überein. Die Frage nach den singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung hat Picard in seinem Traité d'Analyse t. III, 52 ff. behandelt, sich jedoch auf den Fall beschränkt, dass die darin auftretende Irrationalität durch eine Quadratwurzel darstellbar ist. Ein Kriterium dafür, ob die durch Nullsetzung des Radicanden erhaltene Gleichung, falls sie mit dem Differentialgleichungssystem verträglich ist, ein singuläres oder particulares Integral darstellt, findet sich a. a. O. nicht angegeben. Das dort eingeschlagene Verfahren, aus dem nicht ersichtlich ist, wie es auf den Fall einer beliebigen algebraischen Irrationalität auszudehnen sei, ist von dem hier befolgten wesentlich verschieden. Dieses beruht, wie in der ersten Arbeit, auf der Erweiterung der von Fuchs (l. c.) eingeführten Methode der Zerlegung der Discriminante einer Differentialgleichung in ihre linearen Teiler auf Systeme von Differentialgleichungen." Wbg.

L. Koenigsberger. Ueber die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **53**, 49-80.

Der erste kürzere Teil beschäftigt sich mit den Irreductibilitätskriterien einer algebraischen Gleichung, die, auf die Normalform gebracht, lautet:

$$(1)\quad (x-\alpha)^n \mathfrak{P}_0(x-\alpha) + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ endliche oder unendliche convergente Potenzreihen von $x-\alpha$ bedeuten, die nicht sämtlich für $x=\alpha$ verschwinden. Die Gleichung (1) heisst reductibel, wenn ihre linke Seite in zwei Factoren derselben Form mit Coefficienten von gleichem Charakter in der Umgebung von $x=\alpha$ zerlegbar ist. Die zur Untersuchung angewandte Methode ist nicht wesentlich von der früher vom Verf. zur Ausdehnung des Eisenstein'schen Satzes benutzten unterschieden, aber hier so modificirt, dass die gewählte Form auf die Festsetzung der Irreductibilität linearer Differentialgleichungen, den Hauptgegenstand der Arbeit, übertragbar ist. Die betrachtete Differentialgleichung wird ebenfalls auf eine Normalform gebracht, die aus (1) hervorgeht, wenn man die Potenzen von y durch die gleich hohen Ableitungen von y ersetzt und $\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y$ statt $\mathfrak{P}_n(x-\alpha)$ schreibt. Bringt man den Differentialausdruck auf die für die Discussion geeignetere Form

$$P \equiv (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y' + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)\,y,$$

worin nunmehr $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \cdots, \mathfrak{P}_n(0)$ sämtlich von Null verschieden sind und $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$ positive ganze Zahlen bedeuten, von denen eine mindestens Null sein muss, so erfordert die Reductibilität der Differential-

gleichung die Möglichkeit der Darstellung von P in der Form $(x-\alpha)^{\varepsilon} P = R(Q(y))$, wo Q und R Differentialausdrücke in der Normalform bezw. ν-ter und $(n-\nu)$-ter Ordnung sind:

$$Q(y) = (x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu}y,$$

$$R = (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu}y}{dx^{n-\nu}} + (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu-1}y}{dx^{n-\nu-1}} + \cdots + \mathfrak{R}_{n-\nu},$$

$R(Q(y))$ die Operation von R auf $Q(y)$ bedeutet, und ε eine unbestimmte positive oder negative ganze Zahl ist. Durch die Substitution $y=(x-\alpha)^k$ ergiebt sich, dass für eine reductible lineare Differentialgleichung $P(y)=0$ die für jedes k identische Beziehung bestehen muss:

$$\begin{aligned}
&k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0 + k(k-1)\cdots(k-n+2)\\
&\quad\times(x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1 + \cdots + k(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}^{\mu_{n-1}} + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n\\
&= \mathfrak{R}_0\,[k(k-1)\cdots(k-n+\nu+1)A_0 + (k+1)k\cdots(k-n+\nu+2)\\
&\quad\times A_1(x-\alpha) + (k+2)(k+1)\cdots(k-n+\nu+3)A_2(x-\alpha)^2 + \cdots]\\
&+ \mathfrak{R}_1\,[k(k-1)\cdots(k-n+\nu+2)A_0\\
&\qquad + (k+1)k\cdots(k-n+\nu+3)A_1(x-\alpha) + \cdots]\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \mathfrak{R}_{n-\nu-1}[kA_0 + (k+1)A_1(x-\alpha) + (k+2)A_2(x-\alpha)^2 + \cdots]\\
&+ \mathfrak{R}_{n-\nu}[A_0 + A_1(x-\alpha) + A_2(x-\alpha)^2 + \cdots],
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$k(k-1)\cdots(k-\nu+1)\mathfrak{Q}_0^{(r)}(0) + k(k-1)\cdots(k-\nu+2)\mathfrak{Q}_1^{(r)}(0) + \cdots + k\mathfrak{Q}_{\nu-1}^{(r)} + \mathfrak{Q}_{\nu}^{(r)}(0) = r!\,A_r$$

und $\mathfrak{P}_k$, $\mathfrak{Q}_k$, $\mathfrak{R}_k$ für $\mathfrak{P}_k(x-\alpha)$ u. s. w. gesetzt ist. Die Discussion der Möglichkeit dieser Beziehung führt zu einer Reihe hier nicht wiederzugebender Irreductibilitätssätze gemäss den verschiedenen Annahmen, die über die Zahlen $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$ gemacht werden, wobei übrigens, wie nachgewiesen wird, ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets $\mu_n = 0$ genommen werden darf. Hr.

L. Heffter. Ueber reductible lineare Differentialgleichungen. J. für Math. **122**, 39-42.

Der lineare homogene Differentialausdruck P lasse sich bei $x=0$ zerlegen in $P \equiv Q(R(\ldots(Z)))$, wo $P, Q, R\ldots$ bei $x=0$ die Normalform haben, und dem entsprechend die determinirende Function von P in $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{q}(\lambda)\cdot\mathfrak{r}(\lambda)\ldots\mathfrak{z}(\lambda)$. Wenn nun ein unter den Factoren auf-

tretender Differentialausdruck S bei $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit mit der determinirenden Function $\mathfrak{f}(\lambda)$ hat, so entspricht jeder Wurzel $\mathfrak{f}(\lambda)=0$ eine Wurzel $w=e^{2\pi i\lambda}$ der zu $x=0$ gehörigen Fundamentalgleichung von $P=0$. Vermittelst dieses Satzes gelingt es dem Verf., zu beweisen, dass es bei $x=0$ irreductible Differentialgleichungen giebt, deren determinirende Function keine Constante ist. Für den Fall, dass letztere eine Constante ist, hat bereits Frobenius die Existenz irreductibler Differentialgleichungen bei der betreffenden Stelle nachgewiesen.

Hr.

E. Picard. Sur un exemple d'approximations successives divergentes. S. M. F. Bull. **28**, 137-143.

Die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(u,x,y),$$

in der F eine positive wachsende Function von u bezeichnet, so lange (x,y) in einem gewissen Bereiche der Ebene bleibt, besitzt ein continuirliches Integral, und zwar ein einziges, das auf einer beliebig vorgezeichneten Curve C in dem genannten Bereiche verschwindet. Sucht man dies Integral auf dem Wege der successiven Approximationen zu erhalten, indem man die Gleichungen bildet:

$$\Delta u_1=F(0,x,y),\ \Delta u_2=F(u_1,x,y),\ldots,\ \Delta u_n=F(u_{n-1},x,y)$$

mit der Bedingung, dass alle u auf C verschwinden, so bilden die u mit ungeraden Indices eine wachsende, die mit geraden Indices eine abnehmende Reihe, die verschiedenen Grenzen zustreben können. Wenn man annimmt, dass u_{2n+1} und u_{2n} gleichmässig gegen ihre Grenzen u und v convergiren, so ist

$$\Delta u=F(v,x,y),\ \Delta v=F(u,x,y).$$

Die Feststellung dieser gleichmässigen Convergenz für die u mit ungeraden und geraden Indices ist der Zweck der vorliegenden Note. Der Beweis wird nicht für den allgemeinen Fall geführt, sondern unter der Voraussetzung, dass F nur eine Function von $\sqrt{x^2+y^2}$ und die Curve C ein Kreis um den Ursprung ist.

Vorausgeschickt wird die analoge Behandlung der Gleichung mit 2 Variabeln $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y)$, wo f eine positive wachsende Function ist, so lange x zwischen a und b bleibt, und das Integral y der Bedingung genügen soll, für $x=a$ und $x=b$ zu verschwinden. Hr.

K. Heun. Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Variable. Zeitschr. f. Math. **45**, 23-38.

Die hier entwickelte Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen beruht auf einer Erweiterung des der Gauss'schen Quadraturmethode zu Grunde liegenden Gedankens. Das Problem wird in folgender Weise gestellt: Man sucht ein Grössensystem

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n; \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon''_n; \text{ etc.}$$

so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\Delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu f(x + \varepsilon_\nu \Delta x, y + \Delta'_y) \Delta x,$$

wo

$$\Delta'_\nu = \varepsilon_\nu f(x + \varepsilon'_\nu \Delta x, y + \Delta''_\nu y) \Delta x,$$
$$\Delta''_\nu = \varepsilon'_\nu f(x + \varepsilon''_\nu \Delta x, y + \Delta'''_\nu y) \Delta x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{(m)}_\nu = \varepsilon^{(m-1)}_\nu f(x, y) \Delta x$$

bedeutet, die Fortsetzung der durch die Differentialgleichung

$$dy/dx = f(x, y)$$

definirten Function y für das Intervall Δx mit der grössten auf diesem Wege erreichbaren Approximation darstellt. Für $m = 1$ (Appr. zweiter Ordnung) erhält man $\Sigma\alpha = 1$, $\Sigma\alpha\,\varepsilon = \frac{1}{2}$, woraus, wenn man $n = 1$ nimmt, die Approximationsformel $\Delta y = f(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2} f \cdot \Delta x)$ sich ergiebt. Für $m = 2$, welcher Fall am meisten für die Anwendungen in Betracht kommt, wird

$$\Sigma\alpha = 1, \ \Sigma\alpha\,\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \ \Sigma\alpha\,\varepsilon^2 = \tfrac{1}{3}, \ \Sigma\alpha\,\varepsilon\varepsilon' = \tfrac{1}{6}.$$

Nimmt man hier $n = 3$, so hat man neun unbekannte Grössen; durch Hinzufügung der willkürlichen Bestimmungen $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon'_1 = 0$, $\varepsilon'_2 = 0$ gelangt man zu der von Runge gefundenen Formel

$$\Delta y = \tfrac{1}{6} \{f(x, y) + 4 f(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, y + \tfrac{1}{2} f \Delta x) + f(x + \Delta x, \Delta'_y\} \Delta x,$$
$$\Delta'_y = f(x + \Delta x, y + f \cdot \Delta x) \Delta x.$$

Ein analoges Verfahren wird auf die Integration der Simultansysteme von Differentialgleichungen erster Ordnung und auf die der Differentialgleichungen höherer Ordnung angewandt. Hr.

M. Chini. Sui fattori integranti di una o più forme differenziali di grado n ad m variabili. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 601-618.

In der vorliegenden Arbeit stellt Verf. zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen auf, welche die Coefficienten von p linearen Differentialformen in m Variabeln erfüllen müssen, damit simultane integrirende Factoren aller Formen existiren, und bestimmt für den Fall, dass diese Bedingungen erfüllt sind, alle möglichen integrirenden Factoren. Darauf zeigt er, dass die Existenz und die wirkliche Bestimmung jedes

integrirenden Factors einer Differentialform n-ten Grades in m Variabeln derjenigen eines simultanen integrirenden Factors von $\binom{m+n-2}{m-1}$ linearen Differentialformen gleichkommt. Endlich bemerkt er, dass das Problem der Untersuchung der simultanen integrirenden Factoren einer beliebigen Anzahl von Differentialformen beliebigen Grades in m Variabeln ebenfalls der Untersuchung der simultanen integrirenden Factoren einer bestimmten Anzahl linearer Differentialformen in denselben Variabeln äquivalent ist. Wbg.

E. O. Lovett. Note on the differential invariants of Goursat and Painlevé. American J. **22,** 41-45.

Eine Klasse von Differentialinvarianten einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen in n Veränderlichen von der Form

$$u_i = \frac{a_{i1}\,u'_1 + a_{i2}\,u'_2 + \cdots + a_{in}\,u'_n + a_{i\,n+1}}{a_{01}\,u'_1 + a_{02}\,u'_2 + \cdots + a_{0\,n}\,u'_n + a_{0\,n+1}}$$

wird auf einfachem Wege abgeleitet, ihre Zahl ist $\frac{1}{2}\,n(n-1)\,(n+2)$. Für $n=2$ erhält man das von Goursat, für $n=3$ das von Painlevé aufgestellte System von Invarianten. Hr.

P. Painlevé. Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes. C. R. **130,** 767-770.

Anwendung der Methode, die Verf. für die explicite Aufstellung der Differentialgleichungen $y'' = R(y', y, x)$ mit festen Verzweigungspunkten befolgt hat, auf ein Gleichungssystem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y, z)}{C(x, y, z)},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{B(x, y, z)}{C(x, y, z)},$$

Aufsuchung der notwendigen Bedingungen für die Existenz fester Verzweigungspunkte und dann Entscheidung darüber, ob diese Bedingungen auch hinreichend sind. Wbg.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes. C. R. **130,** 879-882.

Untersuchung der Differentialgleichungen

$$y''' = R(y'', y', y, x),$$

wo R rational in y'', y', algebraisch in y und analytisch in x ist, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen; die automorphen Functionen spielen hier eine bedeutsame Rolle. Wbg.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes. C. R. **130,** 1112-1115.

Untersuchung der Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten von der Form $\left(y_q = \frac{d^q y}{dx^q}\right)$:

$$(1)\quad y_q^m + A_1(y_{q-1}, \cdots, y_1, y, x)\, y_q^{m-1} + \cdots + A_m(y_{q-1}, \cdots, y_1, y, x) = 0,$$

wo die A_i rational in y_{q-1}, algebraisch in y_{q-2} und y_{q-3}, analytisch in $y_{q-4}, \cdots, y_1, y, x$ sind. — Ist y_q rational in y_{q-1} und y_{q-2}, so hat die Gleichung (1) die Form

$$y_q = My_{q-1}^2 + Ny_{q-1} + P,$$

worin M von bestimmter Gestalt ist. Die Untersuchung dieser Gleichung führt auf das System

$$\frac{dx}{dz} = v^{\frac{-n}{n-1}}, \quad \frac{d^2v}{dz^2} - k(z)\frac{dv}{dz} - \frac{n}{n+1}\, l(z)\, v = 0.$$

Die wichtigste Klasse der durch dieses System definirten eindeutigen Transcendenten bilden die automorphen Functionen. Wbg.

P. Painlevé. Sur une relation entre la théorie des groupes continus et les équations différentielles à points critiques fixes. C. R. **130,** 1171-1173.

In dem $(n+1)$-dimensionalen Raume seien $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ die Coordinaten eines Punktes und $S(y_1, \cdots, y_{n+1}, x) = 0$ die Gleichung einer algebraischen, vom Parameter x abhängenden Fläche. Wenn andererseits

$$(G)\quad y_i = R_i(Y_1, \cdots, Y_{n+1}, x, a, b, \cdots, l)\quad [i = 1, 2, \cdots, (n+1)]$$

eine endliche continuirliche Gruppe von birationalen Transformationen von S ist, die analytisch von x abhängt, dann sind die Coefficienten von $Y_1, \cdots, Y_{n+1}$ Functionen von x, deren sämtliche nicht polaren Singularitäten fest, d. h. unabhängig von den Parametern $a, b, \cdots, l$ der Gruppe G sind. Es lasse nun ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \cdots, y_n, x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

die Gruppe G zu, so hat das System, wenn diese Gruppe transitiv ist, nur feste, kritische Punkte. Die Integrale sind, wenn die Ordnung des Systems die Einheit übersteigt, im allgemeinen transcendente Functionen der Constanten. Ein analoger Satz gilt für den allgemeineren Fall, dass die Transformationsgruppe algebraisch ist. Hr.

P. Painlevé. Sur les systèmes différentiels à intégrale générale uniforme. C. R. **131,** 497-499.

Der Verf. weist auf verschiedene Typen von Problemen hin, auf die man seine Methode, die Bedingungen zu bestimmen, unter denen ein System von Differentialgleichungen nur feste kritische Punkte hat, mit Erfolg anwenden kann. Hr.

P. Painlevé. De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy. S. M. F. Bull. **28,** 191-196.

Gegen den vom Verf. gegebenen Beweis, dass die Cauchy'sche Lösung des Gleichungssystems

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1 = b_1, \cdots, y_n = b_n$ für $x = a$, falls f_i in der Umgebung dieser Werte holomorph ist, die einzig mögliche sei, hat Forsyth in seiner Theory of differential equations, Bd. II, auf Grund einer Bemerkung von Fuchs einen Einwand erhoben. Um diesen zu beseitigen, präcisirt der Verf. genauer, was unter den Worten: der Punkt x nähere sich auf einem vorgeschriebenen Wege l dem Punkte a, zu verstehen sei, falls l ein Weg von unendlicher Länge ist. Es muss nämlich die geradlinige Entfernung $\overline{xa}$ beständig (nicht in endlichen Schwankungen) sich der Null nähern, wenn der Bogen s des Weges l, von x an gerechnet, unbestimmt wächst. In diesem Sinne gilt der Satz:

Es existirt keine Lösung $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ von (1), holomorph auf einem im Punkte a endigenden Wege l (den Punkt a selbst ausgeschlossen) derart, dass $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ den Werten $b_1, \cdots, b_n$ sich nähern, wenn x sich auf l dem Punkte a nähert. Hr.

P. Painlevé. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. S. M. F. Bull. **28,** 201-261.

In einer Reihe von Noten, die in den C. R. erschienen sind, hat Verf. die von ihm über die im Titel bezeichneten Differentialgleichungen gefundenen Resultate veröffentlicht, deren ausführliche Herleitung den Gegenstand einiger grösseren, demnächst erscheinenden Arbeiten bilden soll. In der vorliegenden Arbeit setzt er die von ihm befolgte Methode vorläufig an dem einfachsten Falle auseinander. Diese Methode beruht auf einem Lemma, welches unmittelbar aus einem heute bereits klassischen Satze von Poincaré folgt und also lautet: Es sei ein System von Differentialgleichungen gegeben, z. B.

$$(S) \qquad \frac{dy}{dx} = H(x, y, z), \frac{dz}{dx} = K(x, y, z),$$

worin H und K rationale Functionen von x, y, z bedeuten, welche analytisch von einem Parameter α abhängen und für $\alpha = 0$ holomorph sind. Wenn dann das allgemeine Integral des Systems (S) für jeden Wert von α (ausgenommen vielleicht $\alpha = 0$) eindeutig ist, so ist es auch noch für $\alpha = 0$ eindeutig, und die Entwickelungen von $y(x)$, $z(x)$ nach Potenzen von α haben als Coefficienten eindeutige Functionen von x. — An Stelle der Eindeutigkeit kann allgemeiner der Besitz fester Verzweigungspunkte treten. — Die Methode des Verf. besteht nun darin, in das gegebene Differentialsystem durch geeignete Transformation einen Parameter α so einzuführen, dass das neue System sicher gleichzeitig mit dem ersten feste Verzweigungspunkte besitzt und für $\alpha = 0$ integrabel ist. Auf diese Weise erhält man notwendige Bedingungen für die Existenz fester Verzweigungspunkte; auf das durch diese Bedingungen vereinfachte System wird derselbe Process angewandt u. s. f., bis man zu keinen neuen Bedingungen mehr gelangt. Dann erst erfolgt die (viel schwierigere) Untersuchung, ob die so erschöpften notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. — Die vorliegende Arbeit enthält nun insbesondere: 1. die explicite Bestimmung aller Differentialgleichungen der Form $y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y^2 + c(x)\,y + d(x)$ mit festen Verzweigungspunkten mittels der angegebenen Methode; 2. die Auseinandersetzung der fundamentalen Eigenschaften der in diese Klasse gehörigen Gleichung $y'' = 6\,y^2 + x$, deren allgemeines Integral eindeutig ist und die das erste bekannte Beispiel einer Differentialgleichung darbietet, welche mit Hülfe der Principien der Functionentheorie vollständig integrirt werden kann, ohne auf eine Combination von linearen Differentialgleichungen, Quadraturen oder selbst Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführbar zu sein; 3. eine vorläufige Untersuchung der Bedingungen, die eine Differentialgleichung dritter (oder höherer) Ordnung erfüllen muss, damit ihre Verzweigungspunkte fest seien. Diese Untersuchung setzt die bedeutende Rolle in Evidenz, welche die Arbeiten von Poincaré über die automorphen Functionen in dem systematischen Studium der Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen zu spielen berufen sind. Wbg.

A. Hirsch. Ueber bilineare Relationen zwischen den Perioden der Integrale reciproker Formenscharen. Math. Ann. **54**, 202-322.

Von der bedeutsamen Arbeit liefert Verf. in der Einleitung selber folgende Inhaltsangabe: „Wählt man die Fundamentalsysteme der Integrale von zwei zu einander adjungirten linearen homogenen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in geeigneter Weise aus, so weisen die linearen Substitutionen, welche ihre Elemente bei Umlauf des Arguments um die singulären Punkte erfahren, contragredientes Verhalten auf. Das Gleiche gilt für zwei Formenscharen, welche mit je einem dieser zu einander adjungirten Integralsysteme zu derselben Art gehören. Nennen wir allgemein zwei Formenscharen mit Substitutionen von contragredientem Charakter „reciproke Scharen“, so wird dieser Begriff offenbar bereits

durch das letzterwähnte Beispiel erschöpft, sofern wir uns auf die Betrachtung solcher Functionenscharen beschränken, welche an keiner Stelle unbestimmt werden. — Als „Perioden“ des Integrals einer mehrdeutigen Function bezeichnen wir, nur um einen kurzen Ausdruck zur Hand zu haben und ohne uns auf eine präcise Definition einzulassen, gewisse Werte des Integrals, wenn sich die Integration in einem geschlossenen Zuge um Verzweigungspunkte des Integranden herum oder auch längs einer Verbindungslinie zwischen zweien dieser Punkte erstreckt.

In einer fundamentalen Arbeit älteren Datums und einer neueren daran anknüpfenden Note hat Fuchs ein merkwürdiges System von bilinearen Relationen entwickelt, welche zwischen den Perioden der Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden (J. für Math. **76**, 177, 1873; Berl. Ber. 1892, 1113); und zwar dient ihm als Grundlage seiner Untersuchung nach dem Vorgange von Weierstrass gelegentlich der Herleitung der Beziehungen zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale das Abel-Jacobi'sche Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument. Da die in Rede stehenden Relationen berufen zu sein scheinen, in einer weiteren Entwickelung der Theorie der Integrale dieser Functionenscharen und damit der Integrale der „homomorphen Functionen“ eine ähnlich wichtige Rolle zu spielen, wie die Periodenrelationen in der Theorie der Abel'schen Integrale, so dürfte eine erneute Behandlung dieses Gegenstandes, welche sich zum Teil auf eine Ausdehnung der von Riemann im Falle der Abel'schen Integrale benutzten Principien stützt, nicht unangebracht sein. Ich habe derselben in meiner Arbeit „Ueber bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung“ (Math. Ann. **52**) eine Erörterung des einfachsten Specialfalles, welcher durch die lineare Differentialgleichung erster Ordnung geliefert wird, vorangehen lassen, da dieser bei seinem elementaren Charakter eine bestimmtere Formulirung des Resultats gestattet. — Ebenso wie daselbst findet auch in der vorliegenden Untersuchung die invariantentheoretische Auffassung und Methode grundsätzliche Verwendung, der zufolge unter gewissen Voraussetzungen die Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweckmässig nicht als Functionen, sondern als homogene Formen zu betrachten sind. Der Gedankengang, der sich auf diese Auffassung gründet, mag hier in Kürze angedeutet werden: Indem unter dem hervorgehobenen Gesichtspunkte der sonst ausgezeichnete unendlich ferne Verzweigungspunkt durch einen willkürlichen Parameter ersetzt wird, ist die Veranlassung gegeben, die Perioden der Integrale jener Lösungen in ihrer Abhängigkeit von diesem Parameter zu studiren. Sie erfüllen, als Functionen desselben betrachtet, ihrerseits wieder eine lineare Differentialgleichung; und zwar zeigt sich des näheren, dass diejenigen beiden Differentialgleichungen, welchen die Perioden der Integrale von zwei adjungirten Formenscharen genügen, ebenfalls zu einander adjungirt sind. Dieser Umstand lässt nur unmittelbar die Existenz von bilinearen Relationen erkennen, welche die Perioden der Integrale gewisser reciproker Formenscharen mit einander verbinden.

Was die explicite Formulirung derselben anbelangt, so liefert die Theorie der linearen Differentialgleichungen zwei verschiedene Darstellungsweisen, die ihrem algebraischen Charakter nach äquivalent sind. Die eine bedarf zu ihrer näheren Ausgestaltung der oben angedeuteten Erweiterung einer Riemann'schen Idee. Indes ist letztere nicht etwa als blosses Hülfsprincip anzusehen; vielmehr führt gerade sie uns auf einen höheren Standpunkt, von welchem aus sich erst das ganze Gebiet verwandter Erscheinungen überblicken lässt. Insbesondere gelangen wir durch parallel gehende Verallgemeinerung eines zweiten Riemann'schen Gedankens zur Construction gewisser Ungleichungen, welchen die reellen und imaginären Componenten der in Rede stehenden Perioden unter besonderen Voraussetzungen genügen. — Zugleich gewähren diese Methoden die Einsicht, dass analoge Verhältnisse auch bei linearen Differentialgleichungen statthaben, deren Coefficienten eindeutige algebraische Functionen auf einer Riemann'schen Fläche sind. Hinsichtlich der zweiten Darstellungsweise der Beziehungen unter den Perioden erweist sich als naturgemässer Ausgangspunkt wieder das Abel-Jacobi'sche Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument, welches hierbei selbst in einer der homogenen Auffassung entsprechenden Form zu Tage tritt. Im Verlauf der ferneren Entwickelung lässt sich das von Fuchs eingeschlagene Verfahren in gewissen Punkten vereinfachen und weiter führen; es gelingt schliesslich, die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen einer Formenschar explicit als rationale Invarianten der Perioden ihrer Integrale darzustellen. — Zum Zwecke der Herleitung der oben erwähnten linearen Differentialgleichung der Perioden und im weiteren Zusammenhange damit stütze ich mich auf die interessanten Untersuchungen von Schlesinger über die Theorie der Euler'schen Transformirten; dieselben werden zugleich durch Heranziehung des formentheoretischen Gesichtspunktes in ein helleres Licht gerückt.

Die vorliegende Arbeit ist in drei Abschnitte eingeteilt: Der erste beschäftigt sich mit der Construction und näheren Untersuchung der Differentialgleichung der Perioden und bringt nach einigen Vorbereitungen, die erst späteren Zwecken dienen, die allgemeine Formulirung der Periodenrelationen. Der zweite Abschnitt enthält die genauere Ausarbeitung der „Periodenrelationen zweiter Art", welche aus dem Abel-Jacobi'schen Theorem fliessen. Der dritte Abschnitt endlich hat zum Gegenstand die sich in der Methode an Riemann anschliessende Entwickelung der „Relationen erster Art" sowie der Ungleichungen unter den Perioden." Wbg.

L. W. Thomé. Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. J. für Math. **122,** 1-29.

Es wird ein homogener linearer Differentialausdruck m-ter Ordnung $F_m(y, s, x)$ betrachtet, dessen Coefficienten die unabhängige Variable x und eine irreducible algebraische Function s von x rational enthalten, wobei der Coefficient der abhängigen Variable y gleich 1 angenommen

wird. Ein solcher heisst „in dem Bereiche s regulär", wenn er bei jedem Punkte x regulär ist, nach der Definition in der Abhandlung J. für Math. **115** (F. d. M. **26**, 351, 1895). Lässt er sich auf die Form $F_m(y, s, x) = e^W \overline{F}_m(e^{-W} y, s, x)$ bringen, wo W eine rationale Function von x und $\overline{F}_m(y, s, x)$ im Bereiche von s regulär ist, so wird er „ein im Bereiche s normaler Differentialausdruck" genannt. Es sei nun $F_m(y, s, x)$ durch einen Ausdruck der Form („System" genannt) $f_{\mathfrak{a}_0}(y, s, x) = y_1$, $f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, s, x) = y_2, \cdots, f_{\mathfrak{a}_l}(y_l, s, x)$ darstellbar, wo $f_{\mathfrak{a}_r}(y_r, s, x)$ ein homogener, linearer Ausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten ist, dann gilt der Satz: Wenn F_m ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor $\Omega = e^W$ ist, so müssen die $f_{\mathfrak{a}_r}$ in dem Bereiche s normale Differentialausdrücke mit demselben Factor Ω sein. Bedeutet $\Phi_N(y, x) = 0$ die „Connexdifferentialgleichung" von $F_m(y, s, x) = 0$, d. h. die Gleichung mit rationalen Coefficienten, deren N Integrale die linearunabhängigen Integrale von $F_m = 0$ sind, und ist $\Phi_N(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so ist $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Diejenigen determinirenden Factoren in dem System für $F_m(y, s, x)$, die unter einander verschieden sind, bilden die verschiedenen determinirenden Factoren in dem Systeme für $\Phi_N(y, x)$. Im zweiten Abschnitt werden die Beziehungen untersucht, die zwischen den Differentialgleichungen $F_m(y, x) = 0$ und $G_m(z, x) = 0$ bestehen, wenn die Integrale z der letzteren mit denen der ersteren durch die lineare Relation

$$z = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{n-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

verbunden sind, wo die a wie die Coefficienten von F_m einwertige Functionen von x in einem einfach zusammenhängenden Gebiet bedeuten, insbesondere rationale Functionen von x und s sind, von denen jeder einzelne Zweig für sich betrachtet wird. Es gilt nun der Satz: Wenn $F_m(y, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, so ist $G_m(z, x)$ ebenfalls durch ein solches System mit gleich vielen Bestandteilen darstellbar, und die entsprechenden Bestandteile stimmen in Ordnung und determinirendem Factor überein.

Der letzte Abschnitt enthält einen Rückblick auf die gesamten von dem Verf. im Journ. für Math. veröffentlichten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwertigen algebraischen Coefficienten. Hr.

E. Grünfeld. Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung adjungirten Differentialgleichungen. — Bemerkung zu der Arbeit S. 43-52 dieses Bandes. J. für Math. **122**, 43-52, 88.

Mit Bezugnahme auf die Arbeit des Verf. im J. für Math. **115** (F. d. M. **26**, 357, 1895) wird für die Ableitung der Gleichungen der

zu einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung gehörigen n Adjungirten ein anderes Verfahren angegeben und dadurch die Berechnung der Determinantenproducte $D(u_{(k)_1}, \cdots, u_{(k)_n}) \cdot D(y_1, \cdots, y_n)$, wo $y_1, \cdots, y_r$ die Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung, $u_{(k)_1}, \cdots, u_{(k)_r}$ die der Adjungirten der k-ten Zeile bezeichnen, in Ausdrücken als Functionen der Coefficienten der ersteren wesentlich vereinfacht, wie im speciellen gezeigt wird. Bemerken wir noch den Satz: Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung und alle ihre adjungirten n Differentialgleichungen sind gleichzeitig reducibel oder irreducibel. Für die Gleichung der n-ten (Lagrange'schen) Adjungirten hat ihn bereits Frobenius bewiesen. — Der Nachtrag enthält eine berichtigende Bemerkung zur vorstehenden Arbeit. Hr.

G. Fano. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen. Math. Ann. **58**, 493-590.

Die Frage nach der Natur der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit algebraischen Relationen zwischen den Integralen, die von Fuchs zuerst für die dritter Ordnung gestellt und gelöst, und dann von Ludwig Schlesinger, Lipm. Schlesinger, M. Meyer und Wallenberg weitergeführt worden ist, wird hier vom geometrischen Gesichtspunkte aufgenommen und so eine Verbindung der vorgenannten Untersuchungen mit den Klein-Lie'schen über algebraische Mannigfaltigkeiten mit unendlich vielen projectiven Transformationen in sich hergestellt, wobei der Gruppencharakter des vorliegenden Problems unmittelbar hervortritt. Betrachtet man nach Halphen irgend ein System von Fundamentallösungen $y_1, \cdots, y_n$ einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung als homogene Punktcoordinaten in einem Raume R_{n-1}, und lässt die unabhängige Variable x beliebige Werte annehmen, so beschreibt der entsprechende Punkt (y) ein eindimensionales Gebilde in R_{n-1}, welches die Integralcurve der Differentialgleichung genannt wird. Erfüllen nun $y_1, \cdots, y_n$ eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen mit constanten Coefficienten:

$$(1) \qquad f_k(y_1, \cdots, y_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, h),$$

so wird durch diese Gleichungen eine gewisse h-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit V_n dargestellt, in der die Integralcurve γ enthalten sein muss. Für $h = 1$ ist γ selbst algebraisch. Das System (1) geht bei jeder Operation einer gewissen Gruppe G, der „Rationalitätsgruppe" der Differentialgleichung, in sich selbst über, und indem man sie als Collineationsgruppe des R_{n-1} deutet, muss G in dieser die Mannigfaltigkeit V_h in sich selbst überführenden projectiven Gruppe enthalten sein. Man gelangt so zu dem Problem, alle diejenigen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung zu untersuchen, deren Rationalitäts-

gruppen irgend welche algebraischen Mannigfaltigkeiten des R_{n-1} in sich überführen. Dieses allgemeinere Problem, wobei die Gleichungen des Systems (1) zwischen den Integralen $y_1, \cdots, y_n$ selbst nicht zu bestehen brauchen, kann in einfacher Weise auf das ursprüngliche Problem zurückgeführt werden, so dass letzteres als eine Art Normalform des allgemeinen Problems erscheint. Für ein allgemeines n wird der Fall vollständig erledigt, wo γ eine rationale Normalcurve $(n-1)$-ter Ordnung in R_{n-1} ist, was analytisch darauf hinauskommt, dass die sämtlichen zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

verschwinden. Der andere demnächst erörterte Fall, dass γ auf einer $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweiten Grades liegt, also die Fundamentallösungen $y_1, \cdots, y_n$ eine einzige homogene quadratische Gleichung erfüllen, lässt keine für einen beliebigen Wert von n gültige Behandlung zu. Hier werden einerseits die Fälle $n = 4, 5, 6$ betrachtet, andererseits diejenigen, in denen γ algebraisch ist oder auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit von höchstens 3 Dimensionen liegt.

Hr.

G. Wallenberg. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. J. für Math. **122**, 155-163.

Diese Arbeit bildet die Fortsetzung der unter gleichem Titel im J. für Math. **116**, 1—9 (s. F. d. M. **27**, 246, 1896) erschienenen, wo die Frage behandelt war, unter welchen Bedingungen eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in y, die ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung besitzt, algebraisch integrirbar ist. Es blieb der Ausnahmefall unerledigt, dass nämlich das Particularintegral ausser dem von y' und y freien Gliede nur Glieder einer Dimension enthält. Diese Lücke wird hier ergänzt. Das Particularintegral hat in diesem Falle die Form

$$(1) \qquad (y' - \varrho_1 y)^{p_1} (y' - \varrho_2 y)^{p_2} \cdots (y' - \varrho_n y)^{p_n} = \alpha,$$

wo $\varrho_1, \cdots, \varrho_n, \alpha$ algebraische Functionen der unabhängigen Variable und $p_1, \cdots, p_n$ ganze Zahlen bedeuten. Die Untersuchung ergiebt, dass auch in diesem Falle die Integrale algebraisch sind, falls $n > 2$ ist. Die Resultate beider Arbeiten lassen sich nunmehr in folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zwar reducibel, aber nicht algebraisch integrirbar ist, so kann sie nur algebraische Particularintegrale erster Ordnung von der Gestalt $(y' - \varrho_1 y)^{p_1} \times (y' - \varrho_2 y)^{p_2} = \alpha$ besitzen. Ihre Integrale sind dann Exponentialfunctionen Abel'scher Integrale, bezw. Integrale solcher Functionen. Hr.

J. Horn. Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. J. für Math. **122**, 73-83.

In dieser Fortsetzung der Arbeit unter gleichem Titel im J. für Math. **120**, 1-26 (F. d. M. **30**, 296, 1899) behandelt der Verf. die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx}+(1+a_1x+\cdots+a_kx^k)y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

Ist a_k keine ganze Zahl, so besitzt die Gleichung ein in der Umgebung von $x=0$ eindeutiges Integral

$$y=P(x)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}p_\lambda x^\lambda,$$

welches in den verschiedenen Teilen der Umgebung von $x=0$ verschiedene asymptotische Darstellungen

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$
$$-A_m e^{\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}}x^{-a_k}$$

zulässt, wo $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ die der Differentialgleichung formell genügende, im allgemeinen divergente Potenzreihe darstellt, während $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ die in der ersten Arbeit eingeführten Constanten sind. Es wird nun gezeigt, dass sich die Coefficienten p_λ durch die Grössen $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ und $c_0, c_1, c_2, \cdots$ ausdrücken lassen. Dasselbe gilt, wenn a_k eine ganze Zahl ist, für die in dem Integral

$$y=P(x)+Be^{\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}}\cdot x^{-a_k}\log x$$

enthaltene, in der Umgegend von $x=0$ eindeutige Function $P(x)$. Die asymptotischen Darstellungen werden zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung von $x=0$ unter Heranziehung der Theorie der ganzen transcendenten Functionen verwendet. Hr.

J. Horn. Divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 219-221.

Der Verf. giebt an dem Beispiel einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Uebersicht der von ihm hinsichtlich der Reihenentwickelung der Integrale gefundenen Resultate, deren Beweis in den Acta Math. erscheinen wird. Hr.

J. Horn. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Ann. **53**, 177-192.

In der Differenzengleichung

$$1) \begin{cases} y(x+m) + x^k P_1 y(x+m-1) + x^{2k} P_2 y(x+m-2) + \cdots \\ \qquad + x^{(m-1)k} P_{m-1} y(x+1) + x^{mk} P_m y(x) = 0 \end{cases}$$

sei k eine positive oder negative Zahl oder Null und

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a'_\lambda}{x} + \frac{a''_\lambda}{x^2} + \cdots \qquad (\lambda = 1, \cdots, m)$$

eine convergente oder asymptotische Reihe. Die absoluten Beträge der Wurzeln $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ der Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

seien von einander verschieden und zwar

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_m| > 0;$$

dann besitzt die Gleichung (1) m linear unabhängige Lösungen $y_1, \cdots, y_m$, welche die asymptotischen Gleichungen

$$(2) \qquad y_\lambda \sim \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots\right)$$

für grosse positive Werte von x erfüllen, wenn die Reihen (2) für y_λ die der Gleichung (1) formell genügenden Reihen sind. Zur Grundlage der Untersuchung dient der Beweis des Satzes, dass das System von Differenzengleichungen

$$w_\lambda(x+1) = \alpha_\lambda w_\lambda(x) + \sum_\mu Q_{\lambda\mu} w_\mu(x) \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots, n),$$

wo α_λ eine Constante, $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_m| > 0$ und $Q_{\lambda\mu}$ eine Function von x mit der Eigenschaft $\lim_{x=\infty} Q_{\lambda\mu} = 0$ ist, stets eine Lösung $w_1, \cdots, w_m$ von der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \frac{w_\lambda}{w_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots, m)$$

besitzt. Hr.

M. Bôcher. **On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic.** American M. S. Trans. 1, 40-52.

In der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

wird x als reell betrachtet, während p und q Functionen von x bedeuten, die nicht analytisch zu sein brauchen. Es handelt sich um die Entwickelung der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes unter folgenden Voraussetzungen: Sei $x = 0$ ein solcher Punkt, so soll im Intervalle $0 < x \leqq b$ kein anderer singulärer Punkt von (1) liegen,

ferner soll $p = \frac{\mu}{x} + p_1$, $q = \frac{\nu}{x^2} + q_1$ geschrieben werden können, wo μ und ν Constanten sind, und

$$\int_b^\varepsilon |p_1| \, dx, \int_b^\varepsilon x |q_1| \, dx$$

sich endlichen Grenzen nähern, wenn lim $\varepsilon = 0$. Dann heisst $x = 0$ ein „regulärer singulärer Punkt". Die Anwendung der Methode der successiven Approximationen führt zu folgenden Resultaten: Sind k' und k'' die Wurzeln der Gleichung $\varrho(\varrho - 1) + \mu\varrho + \nu = 0$, so gelten für den Fall, dass k' von k'' verschieden ist und $Rk' \geqq Rk''$ (R = reeller Teil), die Entwickelungen für die Integrale und ihre Ableitungen:

$$y_1 = x^{k'} E_1(x), y_2 = x^{k''} E_2(x), y_1' = x^{k'-1} H_1(x), y_2' = x^{k''-1} H_2(x),$$

wo die E und H im Intervalle $0 \leqq x \leqq c$ continuirlich sind (c ist eine innerhalb des Intervalls $(0b)$ liegende Grösse, die näher bestimmt wird) und $E_1(0) = E_2(0) = 1$, $H_1(0) = k'$, $H_2(0) = k''$ ist. Ist $k' = k''$, dann lauten die Entwickelungen:

$$y_1 = x^{k'} E_1(x), y_2 = x^{k'} \log E_2(x), y_1' = x^{k'-1} H_1(x), y_2' = x^{k'-1} \log H_2(x)$$

mit $E_1(0) = E_2(0) = 1, H_1(0) = H_2(0) = k'$.

Die befolgte Methode ist, wie der Verf. bemerkt, auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung anwendbar. Hr.

S. Pincherle. **Sulla scomposizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni.** Bologna Rend. (2) **4,** 1899-1900, 101-105.

Betrachtet man die linke Seite der Fuchs'schen linearen Differentialgleichung:

$$(a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\varphi + (a_1 + b_1 x + c_1 x^2) x \varphi' + \cdots$$
$$+ (a_m + b_m x + c_m x^2) x^m \varphi^{(m)} = 0$$

als das Symbol einer auf φ auszuführenden Operation, so kann diese in das Product von zwei Operationen zerlegt werden. Die analoge Zerlegung in p Factoren für den Fall einer Gleichung mit $(p+1)$-gliedrigen Coefficienten bietet, wie der Verf. behauptet, keine weitere Schwierigkeit dar. Vi.

L. Gegenbauer. **Einige Sätze über die reellen Wurzeln der Integrale von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Wien. Ber. **109,** 61-73.

Folgende allgemeine Relation bildet die Grundlage der zu beweisenden Sätze.

Sind die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ im reellen Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ eindeutig, endlich und differentiirbar, und liegt innerhalb dieses Intervalls weder eine gemeinsame noch eine mehrfache Wurzel derselben, so ist

$$(1) \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \operatorname{sign}(f'(\xi_\lambda) f_1(\xi_\lambda) + \sum_{\mu=1}^{\mu=s} \operatorname{sign}(f_1'(\eta_\mu) f(\eta_\mu) = \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(f(x_1) f_1(x_1) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(f(x_2) f_1(x_2)) \\ \qquad [f(x_1) f(x_2) f_1(x_1) f_1(x_2) \lesseqgtr 0], \end{cases}$$

wo $\xi_1\, \xi_2, \dots, \xi_r$ alle im Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ liegenden Wurzeln von $f(x)$, sowie $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ die von $f_1(x)$ vorstellen und mit $\operatorname{sign}(\alpha)$ das Vorzeichen von α bezeichnet wird. Setzt man in (1) für $f(x)$ ein Integral y der Differentialgleichung

$$(2) \qquad y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

und für $f_1(x)$ die Ableitung y', so hat man für jedes Intervall $(x_1 \dots x_2)$, in dem $p(x)$ und $q(x)$ eindeutig und endlich sind und $q(x)$ überall dasselbe Zeichen hat:

$$(3) \begin{cases} \mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y(x)) - \operatorname{sign}(q(x_1)) \mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y'(x)) = \\ \qquad -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(y(x) y'(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(y(x_2) y'(x_2)) \\ \qquad [y(x) y(x_2) y'(x_1) y'(x_2) \lesseqgtr 0], \end{cases}$$

wo mit $\mathfrak{A}_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)$ die Anzahl der im Intervalle $(\alpha \dots \beta)$ befindlichen Wurzeln bezeichnet wird. Hieraus wird gefolgert: 1. Ist $\operatorname{sign}(q(y)) = -1$, dann kann weder ein Integral von (2), welches an den Intervallsgrenzen nicht verschwindet, noch dessen erste ebenso beschaffene Ableitung mehr als eine Wurzel haben; auch können beide Functionen in einem solchen Bereiche nicht gleichzeitig Wurzeln haben. 2. Ist $\operatorname{sign}(q(x)) = +1$, so ist der Unterschied zwischen der Anzahl der Wurzeln von $y(x)$ und $y'(x)$ in dem Intervall, an dessen Grenzen y und y' nicht verschwinden, höchstens gleich 1; er ist gleich Null, wenn y und y' an beiden Grenzen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Die Wurzeln von y und y' trennen sich gegenseitig. Eine Reihe von neuen Sätzen folgt, indem man die Gleichung (2) wiederholt nach x differentiirt und auf die für die λ-ten Ableitungen geltenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Relationen (3) anwendet. Endlich wird noch für die Functionen y, z die den Differentialgleichungen genügen:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \quad z'' + p(x) z' + q_1(x) z = 0,$$

die Relation gegeben

$$\mathfrak{A}_{x_1}^{x_2} u(x) = \operatorname{sign} q(x_1) - q_1(x) \left\{ \mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y(x)) - \mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(z(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{d}{dx_1} l\frac{z(x_1)}{y(x_1)} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{d}{dx_2} l\frac{z(x_2)}{y(x_2)} \right\},$$

wo $u = y z' - z y'$ gesetzt ist.

Von den vorstehenden Sätzen werden Anwendungen auf specielle Functionen gemacht, so auf die Bessel'schen und auf die Näherungsnenner der Kettenbruchentwickelung des Integrals

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}.$$

Hr.

E. J. Wilczynski. On continuous binary linearoid groups, and the corresponding differential equations and Δ functions. American J. **22**, 191-225.

In einer früheren Arbeit (s. F. d. M. **30**, 309, 1899) war gezeigt worden, dass jeder Gruppe von der Form

$$(1) \qquad \eta_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x; a_1, \ldots, a_r)\, y_k,$$

wo die r Parameter a_i wesentlich sind, ein System von Differentialgleichungen von der Ordnung r entspricht, deren allgemeine Lösungen durch (1) gegeben sind, wenn $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem bilden. Die Functionen φ_{ik} waren als eindeutige Functionen von x vorausgesetzt. In der vorliegenden Abhandlung werden diese Gruppen, die entsprechenden Differentialgleichungen und ihre Lösungen für den Fall $n=2$ in einer alle Möglichkeiten erschöpfenden Weise discutirt. Hr.

M. Pétrovitch. Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre. Palermo Rend. **14**, 28-32.

Sind für eine reelle Differentialgleichung erster Ordnung gewisse Bedingungen erfüllt, so ist dasjenige Integral derselben, welches für $x=x_0$ den Wert y_0 annimmt, eine in der Umgebung von $x=x_0$ nicht nur endliche und stetige, sondern auch monotone und zwischen zwei bestimmten Functionen bleibende Function. Vi.

M. Pétrovitch. Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certains types d'équations différentielles. American J. **22**, 1-12.

In der Arbeit „Sur l'intégration hydraulique etc." American J. **20**, 293ff.; F. d. M. **29**, 264, 1898) hat der Verf. eine Methode angegeben, Differentialgleichungen erster Ordnung graphisch zu integriren. In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls ein Apparat dieser Art beschrieben, der besonders leicht zu construiren ist und dazu dienen kann, die Integrale gewisser Typen von Differentialgleichungen, die übrigens zu den integrablen gehören, unmittelbar zu registriren. Hr.

W. A. Price. Petrovitch's apparatus for integrating differential equations of the first order. Phil. Mag. (5) **49**, 487-490.

Taucht man einen cylindrischen Körper, dessen Querschnittsfläche auf der einen Seite von einer Geraden, der x-Axe, und auf der andern Seite von einer Curve, $X = f(x)$, begrenzt wird, in der Richtung der x-Axe ins Wasser, so wird eine Verschiebung um dx eine Wasserverdrängung von $c \cdot X\,dx$ zur Folge haben, wo c die Höhe des Cylinders bezeichnet. Ein zweiter Cylinder wird unter den gleichen Bedingungen eine Veränderung von $c \cdot Ydy$ erzeugen. Die Gesamtverdrängung beider kann mit einer Einstellmarke gemessen und die ermittelte Höhe graphisch registrirt werden. Diese Einrichtung wird zur numerischen Integration solcher Differentialgleichungen benutzt, die sich auf die Form $Xdx + Ydy = 0$ bringen lassen. Br.

Ch. Hermite et W. A. Anissimoff. Extrait de la correspondance entre M. Ch. Hermite et W. A. Anissimoff „Sur la forme des intégrales des équations différentielles à coefficients périodiques." Mosk. Math. Samml. **21**, 62-67.

Anissimoff teilt an Hermite das Resultat mit, dass das Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit periodischen Coefficienten $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (also $f(x+1, y) = f(x, y)$) die Form $y = F(Ax + a, p(x))$ (wo $p(x+1) = p(x)$) besitzen muss. Hierzu schreibt Ch. Hermite, dasselbe Resultat sei sehr einfach zu bekommen mit Hülfe einer Reihenentwickelung, dass nämlich $dy/dx = f(e^{2i\pi x}, y)$ ein Integral von der Form $y = F(x - x_0, e^{2i\pi x})$ besitzt. (Vergl. F. d. M. **29**, 286, 1898). Si.

M. Krause. Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch elliptische Functionen integrirbar sind. Berl. Ber. 1900, 258-268.

Die bisherigen Resultate über lineare Differentialgleichungen mit doppelt periodischen Coefficienten werden nach der Richtung hin erweitert, dass auch diejenigen mit beliebig vielen scheinbar singulären Punkten in Betracht gezogen werden. Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf eine besondere Klasse von Gleichungen, die der Verf. „gerade Picard'sche Differentialgleichungen zweiter Ordnung" nennt. Das Problem lautet: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zwei linear von einander unabhängige Integrale die Form haben:

$$\varphi_1 = \Pi \frac{\vartheta_1(v - a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{\lambda v}, \quad \varphi_2 = \Pi \frac{\vartheta_1(v + a_r)e^{-\lambda v}}{\vartheta_0(v)}$$

(erste Normirung des Problems) oder, unter Einführung der Argumente der elliptischen Functionen u und α, die Form:

$$\varphi_1(u) = \prod_{r=1}^{r=m} \varphi(u, a_r), \quad \varphi_2(u) = \prod_{r=1}^{r=m} \varphi(u, -a_r),$$

wo

$$\varphi(u, a) = \frac{\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

(zweite Normirung)? Das Problem wird bei beiden Normirungen darauf zurückgeführt, eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung durch eine ganze rationale Function zu integriren. Die Bedingungen für die Integrirbarkeit werden für den Fall, dass die betrachtete Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei scheinbare singuläre Punkte besitzt, vollständig angegeben. Hr.

A. Liapounoff. Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. **131,** 1185-1188.

Der Verf. nimmt die in den C. R. **123** (F. d. M. **27,** 252, 1896) begonnene Untersuchung über die Gleichung (1) $d^2y/dx^2 + p(x)y = 0$ wieder auf, mit Beibehaltung der Voraussetzung, dass x nur reelle Werte annimmt und $p(x)$ eine continuirliche periodische Function mit der Periode ω bezeichnet. Die dort entwickelten Sätze über die Reihe für die charakteristische Constante A werden hier für den Fall, dass die Function $p(x)$ keine negativen Werte annehmen kann, so weit vervollständigt, dass man allemal, wo $A^2 - 1$ von Null verschieden ist, die Frage des Vorzeichens von $A^2 - 1$, von dem es abhängt, ob die Lösungen von (1) alle begrenzte Functionen von x sind oder nicht, entscheiden kann. Hr.

S. Pajak. Integration gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Prace mat.-fiz. **11,** 32-45. (Polnisch.)

Anwendung der allgemeinen Lie'schen Methode (Archiv for Math. og Naturv. 1883) auf die Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es sei die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{du^2} = \left(\frac{dv}{du}\right)^m$$

gegeben, m eine bestimmte Constante. Transformirt man diese Gleichung mittels der Substitution (2) $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, so erhält man eine Differentialgleichung von der Form:

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} + D = \frac{\left(1 + F\frac{dy}{dx}\right)^m E}{\left(1 + L\frac{dy}{dx}\right)^{m-3}(F - L)},$$

wo $A, B, \ldots$ Functionen von u, v und ihren Ableitungen nach x, y:

$$\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = u_{ik}, \quad \frac{\partial^{i+k} v}{\partial x^i \partial y^k} = v_{ik}$$

sind, wenn u_{10}, v_{10} nicht gleichzeitig verschwinden. Es werden umgekehrt die Transformationen (2) gesucht, welche die Differentialgleichung (3) auf die Form (1) reduciren. Dieselben werden durch die Untersuchung der Transformationsgruppe ermittelt, welche die Gleichung (1) invariant lässt. Man findet leicht die dreigliedrige Gruppe

$$Uf = \varrho_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \varrho_2 \frac{\partial f}{\partial v} + \varrho_3 \left(u \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{m-2}{m-1} v \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Man bilde die erweiterte Gruppe in Bezug auf die Ableitungen von u, v nach x, y und bestimme ihre Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen. Man drücke die Coefficienten der Gleichung (3) durch die Differentialinvarianten erster und zweiter Ordnung aus und bestimme die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen, unter welchen dieselbe in die Form (1) übergeführt werden kann. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erledigt sich die gegebene Aufgabe durch Quadraturen.

Dn.

L. Autonne. Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati. Journ. de Math. (5) **6**, 157-214.

Verf. betrachtet eine algebraische Gleichung hn vom Grade $n \geqq 4$, deren Coefficienten von einer Veränderlichen t abhängen und deren Wurzeln sämtlich Integrale einer Riccati'schen Differentialgleichung sind. Sie ist hauptsächlich dadurch charakterisirt, dass das anharmonische Doppelverhältnis von vier beliebigen Wurzeln constant (von t unabhängig) ist; Verf. nennt sie daher eine „anharmonische Gleichung". Die Gruppe G derselben ist mit einer der 5 bekannten endlichen binären Gruppen S von der Ordnung N (vergl. z. B. Klein: „Vorlesungen über das Ikosaeder") holoedrisch isomorph. — Jede Gleichung hn ist von der Form $F(x, T) = 0$, wo das Polynom F von zwei Argumenten numerische Coefficienten besitzt, die nur von S abhängen, während $T = T(t)$ dem Rationalitätsbereich der Coefficienten von hn angehört; die algebraische Beziehung zwischen x und T ist vom Geschlecht 0. — Die Untergruppe G_0, die aus allen Substitutionen von G besteht, welche die Wurzel x_0 ungeändert lassen, und die entsprechende Untergruppe S_0 von S wird aus den p Potenzen einer einzigen Substitution ($\mathfrak{R}$, bz. R) gebildet. Ist $\Psi(z) = \psi(z) : \varphi(z)$ die absolute Invariante einer der 5 Gruppen S, so hat die Gleichung $\Phi(\Omega) = T$ N Wurzeln Ω_i ($i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$). Nun sei η_0 eine Grösse, deren Wert durch die Substitution R ungeändert bleibt, so ist das Polynom vom Grade $N = n \cdot p$ in η

$$\begin{vmatrix} \psi(\eta) & \varphi(\eta) \\ \psi(\eta_0) & \varphi(\eta_0) \end{vmatrix}$$

die p-te Potenz eines Polynoms $H(\eta)$ vom Grade n, des „reducirten Polynoms von hn"; $\eta_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ seien die n Wurzeln von $H(\eta) = 0$. Verf. führt nun den Ausdruck

$$\mathfrak{F}(X, Y) = \frac{1}{\Psi'(Y)} \left[\frac{1}{X-Y} - \frac{H'(X)}{n H(X)}\right]$$

ein, worin Ψ' und H' die Ableitungen von Ψ und H bedeuten; derselbe ist gegenüber jeder auf X und Y gleichzeitig ausgeübten Substitution von S invariant. Infolge dieser Eigenschaft reduciren sich die nN Ausdrücke $\mathfrak{F}(\Omega_j, \eta_i) \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \\ i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{pmatrix}$ auf n verschiedene, nämlich gerade auf die n Wurzeln x_i von hn. Es ist also $x_i = \mathfrak{F}(\Omega, \eta_i)$, wo Ω irgend eine Wurzel von $\Psi(\Omega) = T$ ist; in dieser Form ist die Constanz des Doppelverhältnisses von vier Wurzeln evident. Ist η eine Wurzel von $H(\eta) = 0$, und eliminirt man Ω aus $x = \mathfrak{F}(\Omega, \eta)$ und $\Psi(\Omega) = T$, so ist die Resultante, unabhängig von der Wahl von η, vom N-ten Grade in x, die p-te Potenz des oben betrachteten Polynoms $F(x, T)$ vom n-ten Grade in x. Hierdurch ist hn vollständig bestimmt. Den Schluss der interessanten Arbeit bildet eine Klassification der anharmonischen Gleichungen nach den 5 Typen der Gruppen S sowie die genauere Untersuchung der anharmonischen Gleichungen vierten und fünften Grades; dabei ist zu unterscheiden, ob die Substitution $\mathfrak{R}$ eine oder zwei Wurzeln von hn ungeändert lässt, also p ein Teiler von $n-1$, bez. $n-2$ ist; mehr als zwei Wurzeln werden von keiner Substitution der Gruppe G ungeändert gelassen. Wbg.

L. Clariana Ricart. **Integral de la ecuación siguiente:**

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} + z^2y = 0.$$

Progreso mat. (2) **2,** 245-248.

Um das Integral dieser Differentialgleichung zu erhalten, entwickelt der Verf. $ye^{-\frac{1}{2}z^2}$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von z, und dann summirt er die sich ergebende Reihe. Tx. (Lp.)

A. Krahe. **Integral de la ecuación** $\frac{d^2y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} + z^2y = 0.$ Progreso mat. (2) **2,** 330.

Der Verf. giebt eine Methode zur Auffindung des Integrals dieser Gleichung. Tx. (Lp.)

M. Bôcher. **Application of a method of d'Alembert to the proof of Sturm's theorems of comparison.** American M. S. Trans. **1,** 414-420.

Verf. beweist zwei Theoreme von Sturm über die Vergleichung der Lösungen zweier homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einfache und directe Weise, indem er, einer d'Alembert'schen Idee folgend, die linearen Differentialgleichungen durch Riccati'sche Gleichungen ersetzt. Wbg.

A. Davidoglou. **Sur une application de la méthode des approximations successives.** C. R. **130**, 692-695.

Die Methode der successiven Approximationen wird auf das Problem angewandt, zu entscheiden, in welchen Fällen die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)y$ $[\varphi(x) \geqq 0$ für $a \leqq x \leqq b]$ ein Integral $y_1(x)$ habe, das die x-Axe in a und b berührt und im Intervalle $(a \cdots b)$ positiv ist. Hr.

A. Davidoglou. **Sur une application de la méthode des approximations successives.** C. R. **130**, 1241-1243.

In der vorstehend besprochenen Arbeit hatte der Verf. gezeigt, dass man eine unendliche Reihe von positiven Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ derart bestimmen kann, dass die bei der Schwingung elastischer Stäbe auftretende Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^4y}{dx^4} = k_n \varphi(x) y \qquad [\varphi(x) \geqq 0 \text{ für } a \leqq x \leqq b]$$

ein Integral besitzt, welches Ox in a und b berührt und $(n-1)$-mal zwischen a und b verschwindet. Hier wird weiter gezeigt, dass die Grössen k_n schneller wachsen als n^4. Es ergiebt sich durch Weglassung der Lösung von (1) mit der entsprechenden Lösung von

$$(2) \quad \frac{d^4z}{dx^4} = k_n Mz \qquad (M > \varphi(x) \text{ zwischen } a \text{ und } b).$$

Der Hauptsatz über die Beziehungen entsprechender Integrale beider Gleichungen wird ohne Beweis mitgeteilt. Wn.

A. Davidoglou. **Sur les zéros des intégrales réelles des équations linéaires de troisième ordre.** C. R. **130**, 399-401.

Anwendung der Picard'schen Methode der successiven Approximationen auf die Bestimmung einer oberen Grenze für den Abstand zweier auf einander folgenden Nullstellen der im Titel bezeichneten Integrale. Wbg.

Z. Żorawski. **Ueber die Integration einer Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen dritter Ordnung.** Krak. Abh. **34**, 141-205. (Polnisch.)

Es sei gegeben die Differentialgleichung (1) $d^3v/du^3 = 0$. Führt man statt u und v neue Veränderliche x, y mittels der Transformation (2) $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ein, so erhält man eine Differentialgleichung von der Form

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^3y}{dx^3} + A\left[\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right] + 3B'\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} \\ &\quad + 3C\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 3B\frac{d^2y}{dx^2} + D'\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + E\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \\ &\quad + F'\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + F\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + E\frac{dy}{dx} + D = 0, \end{aligned} \right.$$

wo $A, B, B', \cdots$ leicht zu ermittelnde Functionen der verschiedenen Ableitungen von u, v nach x und y sind.

Die Differentialgleichung (1) bleibt invariant bei der siebengliedrigen Gruppe

$$(4) \qquad u' = \frac{C_0 + C_1 u}{C + C_5 u}, \quad v' = \frac{C_0' + C_2 u + C_3 v + C_4 u^2}{(C + C_5 u)^2}.$$

Durch die Erweiterung dieser Gruppe in Bezug auf die Ableitungen von u und v nach x, y bekommt man ihre Differentialinvarianten, nämlich die Differentialinvariante erster Ordnung, zwei Differentialinvarianten zweiter Ordnung, zwei dritter Ordnung und alle diejenigen, welche aus diesen durch Differentiation entstehen. Es werden dann die Differentialinvarianten der Untergruppe $u' = C_0 + C_1 u$, $v' = C_0' + C_2 u + C_3 v$ bestimmt und die zwischen den Differentialinvarianten der Gruppe und denen der Untergruppe und auch die zwischen den Differentialinvarianten der Gruppe stattfindenden Relationen aufgestellt. Es werden endlich die Coefficienten der Gleichung (1), die ja die invariante Differentialgleichung der erweiterten Gruppe darstellt, durch die Differentialinvarianten der Gruppe ausgedrückt.

Nach dieser Vorbereitung schreitet der Verf. zur eigentlichen Aufgabe seiner Arbeit, nämlich zur Integration der Gleichung (3). Nimmt man an, dass die Coefficienten dieser Gleichung gegebene Functionen von x, y sind, und fragt nach den Transformationen, welche diese Gleichung in die Form (1) überführen, so müssen die Coefficienten den oben erwähnten Relationen genügen. Sind die letzteren erfüllt, so reducirt sich die Aufgabe, d. i. die Bestimmung der Transformation (2), auf die Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen. Der Verfasser entwickelt die Integrationsmethode derselben, welche zur Integration zweier Riccati'schen Gleichungen und acht Quadraturen führt. Wendet man die von A. Mayer gegebene Methode an, so genügt schon eine Riccati'sche Gleichung mit vier Quadraturen. Es wird auch die Mayer'sche Methode auseinandergesetzt und dann noch ein particularer Fall erörtert, bei welchem dieselbe nicht zum Ziele führt. Endlich wird noch ein Ausnahmefall behandelt. Die ganze Untersuchung wird durch ein geometrisches Beispiel illustrirt. Dn.

R. Ziegel. Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit algebraischen Integralen. Diss. Berlin. 25 S. 8°.

Die algebraisch integrirbare homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten hat Fuchs zuerst hinsichtlich der Natur ihrer Integrale untersucht (Acta Math. **1**). Er geht dabei von der homogenen nicht linearen algebraischen Beziehung mit constanten Coefficienten aus, die zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen besteht. Bedeutet p das Geschlecht der durch sie repräsentirten Curve (Integralcurve), so ist die Gliederanzahl eines reducirten Wurzelsystems des allgemeinen Integrals für $p \geqq 1$, wie Fuchs gezeigt hat, nicht grösser als 6. Der Fall $p=0$ blieb noch unerledigt. Die Ausfüllung dieser Lücke ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung. In diesem Falle lässt sich eine rationale Function $s = \chi(\eta_1, \eta_2)$ der beiden Quotienten η_1, η_2 der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen angeben derart, dass die bestehende Relation $F(\eta_1, \eta_2)=0$ durch zwei rationale Functionen $\eta_1 = P_1(s), \eta_2 = P_2(s)$ identisch befriedigt wird. Der Parameter s ergiebt sich nun als Quotient zweier linear unabhängigen Integrale einer algebraisch integrirbaren homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in x (der unabhängigen Variable) rationalen Coefficienten, und zwar ist x eine rationale Function von s. Die Form derselben bestimmt sich daher in bekannter Weise je nach den fünf verschiedenen Fällen der Ordnung der Gruppe der algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ein weiteres Ergebnis ist, dass die Gliederanzahl eines reducirten Wurzelsystems (nach der Bezeichnung von Fuchs) des allgemeinen Integrals einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integralcurve vom Geschlechte Null ist, durch eine der Zahlen n, $2n$, 12, 24, 60 gegeben ist. Endlich besitzt eine solche Differentialgleichung stets ein Fundamentalsystem von Integralen, dessen Elemente, zu gewissen Potenzen erhoben, algebraischen Gleichungen von nicht höherem als einem der Grade 1, 2, 4, 6, 12 genügen. Durch Hinzunahme der von Fuchs für $p \geqq 1$ erhaltenen Resultate gelangt man zu dem allgemeinen Satze: Zu jeder algebraisch integrirbaren homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten gehört eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen desselben gebildete ternäre Form (Primform) von nicht höherem als dem zwölften Grade, die eine Wurzel aus einer rationalen Function der unabhängigen Variable ist.

Die letzten Abschnitte beschäftigen sich mit der Herleitung analoger Sätze für die adjungirte Differentialgleichung. Hr.

W. Heymann. Ueber Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe integrirt werden können. J. für Math. **122**, 164-171.

Wie die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe als

Normalform für eine gewisse Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und damit zusammenhängende nicht lineare Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet werden kann, so dass letztere mit Hülfe der hypergeometrischen Reihe sich integriren lassen, so gewinnt der Verf. durch h-malige Differentiation der Gauss'schen Differentialgleichung in der Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} x(1-x)y^{(h+2)}+[(1-2x)h+\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\,y^{(h+1)} \\ \qquad\qquad -(\alpha+h)(\beta+h)y^{(h)}=0, \end{cases}$$

wenn man darin h als unabhängige Veränderliche, x dagegen als Parameter ansieht, eine lineare Differenzengleichung, deren Integrale man durch entsprechende Differentiation der hypergeometrischen Reihen erhält, und die als Normalform der linearen Differenzengleichung von der Form

$$Az^{(h+2)}+(B+Ch)z^{(h+1)}+(D+Eh+Fh^2)z^{(h)}=0,$$

sowie auch

$$(A+Bh)z^{(h+2)}+(C+Dh)z^{(h+1)}+(E+Fh)z^{(h)}=0$$

angesehen werden kann, indem sich diese durch einfache Substitutionen in die Form (1) überführen lassen. Es werden noch mit den obigen zusammenhängende nicht lineare Differentialgleichungen angegeben, die ebenfalls durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können.

Hr.

J. R. Brajtzew. Ueber einige durch bestimmte Integrale integrirbare lineare Differential- und Differenzengleichungen mit einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. Warschau Polyt. 1900. No. 1, 2. S. 1-48, 49-136. (Russisch.)

Die Arbeit ist 1900 noch nicht abgeschlossen. Es sei deshalb nur kurz darüber berichtet. Kap. I behandelt Euler'sche Integrale und Differentialgleichungen, welche auf diese Integrale zurückführbar sind. Kap. II: Hypergeometrische Integrale und deren Eigenschaften. Zusammenhang zwischen der hypergeometrischen Gleichung n-ter Ordnung und der linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit linearen Coefficienten; Integration derselben durch bestimmte Integrale. Integrale der Form:

$$\int_L \prod_{i,k}(u-a_i)^{b_i-1}(u-x_k)^{\lambda_k-1}du.$$

Vollständiges System der Differentialgleichungen, denen diese Integrale genügen. Analoges für Differenzengleichungen. Kap. IV: Das Integral

$$\int_L e^{w}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{\lambda_1-1}\cdots \\ \times(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

und die lineare Differentialgleichung, die es befriedigt; die mit ihr zusammenhängende lineare Differenzengleichung mit linearen Coefficienten.

Si.

K. Zindler. Ueber simultane gewöhnliche Differentialgleichungen, welche continuirliche Transformationsgruppen gestatten. Monatsh. f. Math. **11**, 289-366.

Der Verf. entwickelt in § 1 die Lie'schen Regeln zur Erweiterung einer infinitesimalen Transformation in $x_0, x_1, \cdots, x_n$, wenn alle x als Functionen einer Grösse t oder $x_1, \cdots, x_n$ als Functionen von x_0 betrachtet werden. In § 2 giebt er die Lie'schen Kriterien dafür, dass ein vorgelegtes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung in den x eine gegebene infinitesimale Transformation gestattet. § 3 behandelt die Bestimmung der bei einer gegebenen Gruppe invarianten Systeme von Differentialgleichungen. Der Verf. unterscheidet dabei ganz zweckmässig allgemeine Systeme, die den Rang der Matrix der erweiterten Gruppen nicht erniedrigen, und die deshalb durch Relationen zwischen Differentialinvarianten darstellbar sind, ferner halb singuläre Systeme, die zwar den Rang der Matrix erniedrigen, aber doch ausser gewissen, durch Determinantenbildung zu findenden Gleichungen noch Relationen zwischen Differentialinvarianten enthalten, endlich singuläre Systeme, die durch Determinantenbildung allein entstehen. § 4 untersucht die Gliederzahl des vollständigen Systems, das zur Bestimmung der Differentialinvarianten einer r-gliedrigen Gruppe dient, und stellt fest, wie weit man die Erweiterung höchstens zu treiben hat, damit die Gliederzahl gleich r werde. § 5 bespricht die Vereinfachungen, die bei Berechnung der Differentialinvarianten eingliedriger Gruppen eintreten, § 6 die entsprechenden Sätze für eine r-gliedrige Gruppe und die Berechnung der invarianten Systeme von Differentialgleichungen. In § 7 macht der Verf. einige allgemeine Bemerkungen über die Verwertung kanonischer Formen der r-gliedrigen Gruppen für Integrationsprobleme, bestimmt dann kanonische Formen für alle Typen von zweigliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen und wendet das in § 8 auf die Integration von solchen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen des R_3 an, die eine zweigliedrige Gruppe mit bekannten infinitesimalen Transformationen gestatten. § 9 enthält die Bestimmung aller dreigliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen und § 10 wieder die Anwendung auf Differentialgleichungen des R_3. In § 11 werden die viergliedrigen Gruppen des R_3 betrachtet, die eine dreigliedrige invariante Untergruppe von vertauschbaren Transformationen enthalten, und ihre Reduction auf kanonische Formen wird discutirt. In § 12 entwickelt der Verf. einige notwendige Bedingungen dafür, dass ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung des R_3 durch Punkttransformation die Gestalt $y''=0, z''=0$ erhalten kann; er knüpft dabei an die Helmholtz'sche Methode zur Bestimmung der kürzesten Linien im Farbensystem an. Beigefügt sind drei Tafeln für die Differentialinvarianten gewisser eingliedriger und aller Typen von zwei- und dreigliedrigen Gruppen des R_3. El.

J. HADAMARD. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales. S. M. F. Bull. **28**, 64-66.

Einfacher Beweis der Stetigkeit der im Titel angegebenen Integrale in Bezug auf die gegebenen Anfangswerte. Wbg.

CH. RIQUIER. Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque. C. R. **130**, 162-164.

Verf. führt eine Reihe von Bezeichnungen ein und zeigt, dass ein beliebiges Differentialsystem sich auf eine gewisse „passive isonome" Form bringen lässt; dabei treten gewisse invariante Zahlen auf, die geeignet sind, den Grad der Allgemeinheit des Differentialsystems zu definiren. Wbg.

S. A. TSCHAPLYGIN. Ueber das Princip des letzten Multiplicators. Mosk. Math. Samml. **21**, 479-489. (Russisch.)

Sind $X_i = F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ zwei Systeme von Functionen von n Veränderlichen, ferner

$$D = \frac{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{d(y_1, y_2, \cdots, y_n)}, \quad \frac{1}{D} = \frac{d(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \text{ und } Y_i = \Sigma_k X_k \frac{dy_i}{dx_k},$$

so gilt bekanntlich die Identität $D\,\Sigma_i \frac{dX_i}{dx_i} = \Sigma_i \frac{d(Y_i D)}{dy_i}$. Dieser Satz wird benutzt, um das Theorem von Jacobi zu beweisen und auf einige neue Fälle anzuwenden, wo nicht alle gefundenen Integrale des Systems der simultanen Differentialgleichungen willkürliche Constanten enthalten. Si.

P. BOHL. Ueber einige Differentialgleichungen allgemeinen Charakters, welche in der Mechanik anwendbar sind. Diss. Dorpat. 113 S. 4°. (Russisch.)

In seiner Magisterdissertation: „Ueber die Darstellung von Functionen einer Variable durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variable proportionalen Argumenten". Dorpat 1893. hat der Verf. die Bedingungen aufgestellt, damit eine Function einer Variable in eine gleichmässig convergirende trigonometrische Reihe von mehreren dieser Variable proportionalen Argumenten entwickelbar sei. In der neuen Arbeit werden die Resultate der früheren benutzt, um die Möglichkeit der trigonometrischen Lösungen gewisser Differentialgleichungen von allgemeinem Charakter zu bestimmen. Nach Zusammenstellung einiger zum Teil neuer Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen in Kap. I beschäftigt sich der Verf. im Kap. II mit dem System der simultanen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Sigma_k a_{ik} x_k + \xi_i \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n),$$

wo ξ_i Functionen von x und t sind, welche in einem Gebiete $\alpha_i < x_i < \beta_i$ (0 mit einbegriffen) und $t > \tau$ (oder $t < \tau$, oder t willkürlich) stetig sind und stetige Derivirten df/dx_i besitzen; die Constanten a_{ik} seien so beschaffen, dass keine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

rein imaginär sei. Dazu kommt noch eine Voraussetzung: es sei möglich, solche positive Zahl γ zu wählen, dass sämtliche x, deren absoluter Betrag kleiner als γ, dem oben erwähnten Gebiete angehören und die Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right| < \Delta_i, \ |\xi_1|_0 < \Delta_2 \cdot \gamma$$

befriedigen ($|\xi_i|_0 = |\xi_i|_{x_1 = \cdots = x_n = 0}$; Δ_1, Δ_2 gewisse positive Grössen, welche mittelst a_{ik} zu berechnen sind). — Für dieses System werden mit Hülfe einer linearen Transformation die Bedingungen der Existenz der Lösungen aufgestellt, welche durch trigonometrische Reihen darstellbar sind. — Kap. IV enthält einige Anwendungen auf mechanische und physikalische Fragen. Si.

A. Capelli. Alcune osservazioni sugl' integrali communi a due sistemi di equazioni differenziali. Napoli Rend. (3) **6**, 100-116.

Zum Ausgangspunkte dient folgender Satz: Sind 2 Systeme (A) und (B) von der Form gegeben:

$$\text{(A)} \quad \frac{dy}{dx} = f, \ \frac{dy_1}{dx} = f_1, \cdots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = f_{n-2}, \ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f_{n-1};$$

$$\text{(B)} \quad \frac{dy}{dx} = F, \ \frac{dy_1}{dx} = F_1, \cdots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = F_{n-2}, \ \frac{dy_{n-1}}{dx} = F_{n-1},$$

wo $f, f_1, \cdots, f_{n-1}, F, F_1, \cdots, F_{n-1}$ Functionen von $x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ sind, und nimmt man an, dass $\varphi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) =$ const. eine Integralgleichung ist, die sowohl einen Teil des vollständigen Systems der Integrale von (A) als auch den der Integrale von (B) bildet, dann enthält 1) φ nicht die Variable y_{n-1}, 2) besitzt das System

$$\frac{dy}{dx} = f, \ \frac{dy_1}{dx} = f_1, \cdots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = f_{n-2},$$

wo y_{n-1} als willkürlicher Parameter zu betrachten ist, ein Integral $\varphi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-2}) =$ const. Die Anwendung dieses Satzes auf die

Systeme von linearen Differentialgleichungen führt auf zwei Methoden für die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen. Die erste Methode unterscheidet sich nicht von der bekannten d'Alembert'schen; die zweite, welche die Integration des Systems von der particularen Integration einer einzigen Differentialgleichung abhängig macht, wird an dem Falle eines Systems von drei linearen Differentialgleichungen im einzelnen durchgeführt. Hr.

C. Severini. Sulle equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro arbitrario. Lomb. Ist. Rend. (2) **38,** 825-839.

Das System

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_m, \mu) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

mit dem Parameter μ, in dem die f_i endliche und continuirliche Functionen der $m+2$ eingeschlossenen Grössen in einem Gebiete C von $m+2$ Dimensionen bezeichnen, und die Anfangswerte x_0, $y_{i,0}$ beliebig im Gebiete C gegeben sind, soll in der Weise integrirt werden, dass m ganze rationale Functionen von x und μ angegeben werden, die geeignet sind, mit einer beliebigen vorgeschriebenen Annäherung die Integrale in jedem Punkte des Gebietes C darzustellen. Vorausgesetzt ist noch, dass auch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f_i nach $y_1, y_2, \cdots, y_m$ existiren, die im Gebiete C endlich und continuirlich sind. Die Lösung der Aufgabe geschieht dadurch, dass zunächst nach der auf mehrere Variabeln ausgedehnten Methode von Weierstrass, eine explicite gegebene Function einer reellen Veränderlichen durch eine gleichmässig convergente Reihe von ganzen rationalen Polynomen darzustellen, für f_i die Reihe der Polynome

$$P_i^{(1)}(x, y_1, \cdots, y_m, \mu),\ P_i^{(2)}(x, y_1, \cdots, y_m, \mu), \cdots,\ P_i^{(\nu)}(x, y_1, \cdots, y_m, \mu), \cdots$$

construirt wird, und die entsprechenden Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = P_i^{(\nu)}(x, y_1, \cdots, y_m, \mu) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, m \\ \nu = 1, 2, \cdots, \infty \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Bezeichnet man die Integrale eines solchen Systems mit den nämlichen Anfangswerten wie oben $(x = x_0, y_i = y_{i,0})$ mit $y_i^{(\nu)}(x, \mu)$, so kann man nach der Methode der successiven Approximation ein Polynom $R_i^{(\nu)}(x, \mu)$ derart bestimmen, dass

$$|y_i^{(\nu)}(x, \mu) - R_i^{(\nu)}(x, \mu)| < \sigma,$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu, \cdots$ eine unendliche Reihe positiver Grössen bedeuten und $\lim\limits_{\nu=\infty} \sigma_\nu = 0$ ist; die Integrale $y_i(x, \mu)$ des Systems (1) werden dann im Gebiete C dargestellt mittels der Reihen:

$$R_i^{(1)}(x,\mu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}[R_i^{(\nu+1)}(x,\mu)-R_i^{(\nu)}(x,\mu)] \qquad (i=1,2,\cdots,m);$$

die Reihen sind in Beziehung auf x und μ gleichmässig convergent.

Hr.

E. Lindelöf. Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles. Journ. de Math. (5) **6**, 423-441.

Es werden die Lösungen des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen $\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ in der Form

$$(1) \qquad y_i=\varphi_i(x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)$$

als Functionen der Anfangswerte $x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0$ betrachtet. Unter den mannigfachen, hier auf möglichst elementarem Wege bewiesenen Sätzen heben wir folgende hervor: Es seien die Functionen

$$\bar{\varphi}_i(x)=\varphi_i(x,\bar{x}_0,\bar{y}_1^0,\cdots,\bar{y}_n^0)$$

im Intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ continuirlich, ferner die f_i continuirliche Functionen im Gebiete T, definirt durch

$$|x-x_0|\leqq l,\ |y_1-\bar{\varphi}_1(x)|+\cdots+|y_n-\bar{\varphi}_n(x)|\leqq\varrho,$$

endlich

$$|f_i(x,y_1',\cdots,y_n')-f_i(x,y_1,\cdots,y_n)|<k_1|y_1'-y_1|+\cdots+k_n|y_n'-y_n|;$$

dann sind die Lösungen (1) continuirliche Functionen von $x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0$, so lange x im Intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ und der Punkt $x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0$ in dem Gebiete T_0 bleibt, definirt durch $|x-\bar{x}_0|\leqq l$,

$$|y_1-\bar{\varphi}_1(x)|+\cdots+|y_n-\bar{\varphi}_n(x)|<\varrho e^{-nK(l+|x-\bar{x}_0|)}$$

(K die grösste der Zahlen k).

Sind ferner noch die partiellen Ableitungen erster Ordnung der f_i nach $y_1,\cdots,y_n$ continuirlich im Gebiete T, so lassen die Lösungen (1) auch in Beziehung auf alle Grössen $x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0$ Derivirte erster Ordnung zu, so lange x im Intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ und $x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0$ im Gebiete T_0 bleibt. Die Derivirten dieser Lösungen nach y_k^0 genügen den linearen Gleichungen

$$\frac{dY_i}{dx}=\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Y_1+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Y_n$$

mit den Anfangsbedingungen

$$Y_k=1,\ Y_1=\cdots=Y_{k-1}=Y_{k+1}=\cdots=Y_n=0,\ \text{für } x=x_0,$$

und es ist

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}=-\left[[f_1(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1^0}+\cdots+f_n(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n^0}\right].$$

Wir bemerken noch, dass analoge Sätze für das System

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n, \mu),$$

in dem ein willkürlicher Parameter μ auftritt, hergeleitet werden, und dass die vom Verf. befolgte Methode es gestattet, die für reelle Grössen entwickelten Sätze auf complexe auszudehnen. Hr.

C. Spelta. Sull' integrazione dei sistemi di equazioni differenziali simultanee lineari ed omogenee. Batt. G. 38, 217-224.

Der Verf. giebt ein von der Ampère'schen Methode verschiedenes Verfahren, die Integration eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen auf die eines Systems von $n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades zurückzuführen. Zu dem letzteren System kann man auch nach der Ampère'schen Methode gelangen, wenn man sie auf das zu dem linearen System adjungirte anwendet.

Hr.

Vitt. Alberti. Su le differenze di O. Batt. G. 38, 117-127.

Es sei $u_{xy} = ax + by + c$, und man setze $\Theta u_{xy} = u_{x+1, y+1}$; dann gilt die Formel

$$(1) \begin{cases} u_{x+\alpha', y+\beta'} \, u_{x+\alpha'', y+\beta''} \cdots u_{x+\alpha^{(n)}, y+\beta^{(n)}} \\ = \sum_{i=1}^{i=n+1} [S_n - A_{n-i+1}]^{(i-1)} u_{xy} \, \Theta u_{xy} \, \Theta^2 u_{xy} \cdots \Theta^{n-1} u_{xy}, \end{cases}$$

wo $[S_n - A_{n-i+1}]^{(i-1)}$

$$= S_n^{(i-1)} - S_n^{(i-2)} A_{n-i+1}^{(1)} + S_n^{(i-3)} A_{n-i+1}^{(2)} \mp \cdots \pm A_{n-i+1}^{(i-1)},$$

$S_n^{(m)}$ die (gewöhnliche) symmetrische Function m-ten Grades der n Grössen

$$u_{\alpha'\beta'}, \; u_{\alpha''\beta''}, \cdots, u_{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}}$$

und $A_i^{(m)}$ die „complette" symmetrische Function m-ten Grades der $i+1$ Grössen $u_{00}, u_{11}, \cdots, u_{ii}$ (d. h. Wiederholungen derselben Grössen mit einbegriffen) bezeichnet. Durch Vergleichung der Formel (1) für $b=0$ mit einer von Herschel in seiner Schrift „A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences" p. 23 gegebenen Formel, in der das Product auf der linken Seite von (1) für $b=0$ durch die Differenzen von O ausgedrückt ist, wird eine Beziehung zwischen den $r+1$ Differenzen von O

$$\Delta^m O^m, \; \Delta^m O^{m+1}, \cdots, \; \Delta^m O^{m+r}$$

abgeleitet, aus der durch Specialisirung eine grosse Anzahl zum Teil neuer Formeln sich ergiebt. Hr.

Weitere Litteratur.

E. W. Brown. On the solution of a pair of simultaneous linear differential equations, which occur in the lunar theory. Cambr. Trans. **18,** 94-106.

A. R. Forsyth. On the integrals of systems of differential equations. Cambr. Trans. **18,** 12-34.

H. Grönwall. Sur les singularités des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales. Stock. Ak. Bib. 1899. 22 S.

E. Holmgren. Sur les intégrales des équations différentielles, considérées comme fonctions de leurs valeurs initiales. Stock. Akad. Bihang **25,** No. 4, 19 S.

É. Picard. Quelques vues générales sur la théorie des équations différentielles. Rev. générale des sc. **11,** 229-237.

F. G. Radelfinger. Linear differential equations. Washington Bull. **14,** 21-35.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

Lagrange und Cauchy. Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt von G. Kowalewski. Leipzig: W. Engelmann. 54 S. 8⁰. (Ostwald's Klassiker No 113.)

Den beiden grundlegenden Abhandlungen (Lagrange, Berl. Acad. Mém. 1772; Cauchy, Bulletin des sciences de la Société philomathique 1819) sind vom Herausgeber Anmerkungen beigefügt, in denen er einen Ueberblick über die Entwickelung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen seit Euler giebt. Sh.

A. Sommerfeld. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Encykl. d. math. Wiss. **2,** 504-560.

Inhaltsübersicht: 1. Abgrenzung des Gegenstandes.

I. Allgemeine Theorie der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung in zwei unabhängigen Variabeln.

2. Klassification der partiellen Differentialgleichungen 2. O. Der elliptische, hyperbolische und parabolische Typus. 3. Der Green'sche Satz und die Green'schen Functionen. 4. Eindeutigkeitsfragen, vornehmlich bei elliptischen Differentialgleichungen. 5. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus für hinreichend kleine Gebiete. Die Methode der successiven Approximationen. 6. Existenz dieser Lösungen für beliebige Gebiete. Alternirende Methode, Methode der ringförmigen

Gebietserweiterung, Auskehrungsmethode u. s. w. 7. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des hyperbolischen Typus. 8. Analytischer Charakter der durch partielle Differentialgleichungen definirten Functionen.

II. Randwertaufgaben bei besonderen Differentialgleichungen.

9. Die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. 10. Existenz der ausgezeichneten Lösungen. Exacter Nachweis derselben bei Schwarz und Poincaré. 11. Die Gleichung $\Delta u - k^2 u = 0$. 12. Die Gleichung $\Delta u = ke^u$. 13. Die Gleichung der schwingenden Saite und ihre Verallgemeinerungen. 14. Die Wärmeleitungsgleichung. 15. Schlussbemerkungen betreffend die Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung und mehr als zwei unabhängigen Variabeln. Wbg.

E. v. Weber. **Partielle Differentialgleichungen.** Encykl. d. math. Wiss. **2**, 294-399.

Inhaltsübersicht: I. Allgemeine Eigenschaften der Differentialsysteme. (Existenz der Lösungen; Mayer'sche Systeme; das allgemeine Integral, singuläre, intermediäre, vollständige Integrale; Lie's Verallgemeinerung des Integralbegriffs, Transformationen). II. Die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten. (Jacobi's Multiplicator; vollständige Systeme; Systeme totaler Differentialgleichungen; Jacobi's Integrationsmethode; Hauptintegrale; Lie-Mayer'sche Transformation.) III. Das Pfaff'sche Problem. (Pfaff's Reductionsmethode; Grassmann's Methode; Integraläquivalente, allgemeine Normalform; Methoden von Clebsch, Lie, Frobenius; Zusammenhang mit der Theorie der Berührungstransformationen; Jacobi'sche und Mayer'sche Identität; Verallgemeinerung der Theorie von Frobenius; Pfaff'sche Ausdrücke und infinitesimale Transformationen). IV. Die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten. (Methoden von Lagrange, Pfaff, Cauchy, Jacobi (1. und 2. Meth.), Lie, Hamilton-Jacobi'sche Theorie; Variation der Constanten, charakteristische Curven; singuläre Integrale; charakteristische Streifen, Abbildung und Klassification: homogene Elementcoordinaten; Involutionssysteme; Functionengruppen; Bäcklund's Theorie). V. Höhere Differentialprobleme. 1. Differentialsysteme mit 2 unabhängigen Veränderlichen. (Klassification, Charakteristiken; Darboux'sche Systeme, Involutionssysteme; Darboux-Lévy'sche Integrationstheorie; Methode von Laplace und ihre Verallgemeinerungen, Verwertung des Gruppenbegriffs). 2. Differentialsysteme mit m unabhängigen Veränderlichen. (Charakteristiken; Involutionssysteme mit einer Unbekannten; Verallgemeinerung der Monge-Ampère'schen Theorie; lineare und nichtlineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten, Normalsysteme; Systeme Pfaff'scher Gleichungen.) Wbg.

E. von Weber. **Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.** Leipzig: B. G. Teubner. XI + 622 S. gr. 8°.

In mehreren früheren Abhandlungen hat sich der Verfasser mit den Pfaff'schen Gleichungen eingehend beschäftigt und giebt nun in dem vorliegenden umfangreichen Werke eine vollständige Theorie des Pfaff'schen Problems. Zunächst tritt die Frage nach der kleinsten Zahl λ auf, welche die Umwandlung des Pfaff'schen Ausdrucks $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$ in die Form $F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots F_\lambda df_\lambda$ bewirkt, worin die F_i, f_i gewisse Functionen von $x_1, \cdots, x_n$ bedeuten. Diese Zahl hängt von dem Verhalten gewisser schief-symmetrischer Determinanten ab, deren Theorie im ersten Kapitel gegeben wird, während im zweiten die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung folgt, die zur Auffindung jener Functionen F_i, f_i nötig ist. Auf diese vorbereitenden Kapitel folgt in den Kapiteln III-X die Darstellung des Pfaff'schen Problems, wobei auf alle wichtigeren einschlägigen Arbeiten Rücksicht genommen wird, ohne dass aber die historische Entwickelung des Problems streng innegehalten würde. In den Kapiteln VIII und XI werden die Beziehungen zwischen dem Pfaff'schen Probleme und den Berührungstransformationen besprochen, und in natürlichem Zusammenhange hiermit folgt dann in den Schlusskapiteln die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Eine historische Uebersicht und ein ausführliches Litteraturverzeichnis und Sachregister bilden den Schluss des gediegenen inhaltreichen Werkes. Sh.

E. v. WEBER. Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen. Münch. Ber. **40**, 273-300.

Diese Note eröffnet eine ausgedehnte Untersuchung über die Reducirbarkeit Pfaff'scher Systeme, indem sie zunächst die allgemeinste Formulirung enthält. Die Aufgabe ist: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen dafür, dass ein gegebenes System von $n-m$ Pfaff'schen Gleichungen in n Variabeln:

$$(1) \qquad dx_{m+h} = \sum_1^m {}_s\, a_{sh}(x_1, \cdots, x_n) dx_s \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-m)$$

sich auf eine Form mit nur τ Differentialelementen:

$$(2) \qquad \sum_1^\tau {}_s\, F_{sh} df_s = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-m)$$

wenn $n-m \leqq \tau \leqq n-2$ ist, bringen lässt, wo $f_1, f_2, \cdots, f_\tau$ unabhängige Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bedeuten.

m bezeichnet Verf. in einer späteren Note als die Stufe des Pfaff'schen Systems.

Die Bedingungen lassen sich, zunächst unter Benutzung der Functionen f, darstellen durch das identische Verschwinden aller $(2\varrho+2)$-reihigen Unterdeterminanten einer Matrix mit $m+\varrho$ Zeilen und Colonnen, wo $\varrho = \tau - n + m$ gesetzt ist. Von hier ausgehend, gewinnt der Verf. eine Darstellung der Bedingungen, welche nur die Coefficienten a_{sh} und

deren Differentialquotienten, sowie die partiellen Ableitungen der x nach unabhängigen Parametern $u_1, \cdots, u_\nu$ ($\nu = n - \tau$) enthält, welche durch ein gewisses System partieller linearer Differentialgleichungen S_ν verknüpft sind. Die Frage kann „durch eine endliche Zahl von Differentiationen und Eliminationen entschieden werden".

Geometrisch lässt sich die Forderung, dass das System (1) durch das System (2) soll ersetzt werden können, so ausdrücken: es soll durch jeden Punkt eines gewissen n-dimensionalen Gebietes des R_n eine Integralmannigfaltigkeit von $n - \tau$ Dimensionen hindurchgehen.

Für $m = 1, 2, 3, 4$ (wo übrigens nur $m = 3, 4$ in Frage kommen) ist die Untersuchung in dieser Note durchgeführt, und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind nach einer sorgfältigen Discussion formulirt.

Der Fall $m = 3$ insbesondere umfasst die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 Independenten. Sr.

E. v. Weber. Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen. Münch. Ber. **40**, 393-462.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung einer in denselben Berichten erschienenen Note und giebt die Bedingungen der Reducirbarkeit für $(n-5)$-gliedrige Pfaff'sche Systeme in n Variabeln. Zunächst stellt der Verf. die Eigenschaften linearer Liniencomplexe im R_4 und r-gliedriger Congruenzen zusammen.

Ein Complex α, welcher durch eine bilineare Gleichung:

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik}\, \xi_i \eta_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, 5)$$

definirt ist, wo ξ_i, η_k die homogenen Punktcoordinaten im R_4 sind, heisst allgemein oder speciell, je nachdem die Matrix der Coefficienten α_{ik} vom Range 4 oder 2 ist. Danach bestimmen sich die singulären Elemente des Complexes. Ein allgemeiner Complex besitzt nur einen singulären Punkt, ein specieller Complex eine singuläre R_2. Den Inbegriff aller Geraden, welche zwei, drei u. s. w. Complexen angehören, bezeichnet Verf. als eine 2-, 3-, $\cdots$, r-gliedrige Congruenz. Die geometrischen Resultate verwendet dann Verf. zu der Hauptaufgabe, der Frage, wann ein Pfaff'sches System in n Variabeln

$$dx_{5+h} = \sum_1^5{}^i\, a_{ih}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_i \qquad (h = 1, \cdots, n-5)$$

sich auf eine Form mit $n - 5 + \varrho$ Differentialelementen

$$df x_{\varrho+h} - \sum_1^p{}^i\, F_{ih}\, df_i \qquad (h = 1, \cdots, n-5)$$

bringen lasse, wenn $f_1, \cdots, f_{n-5+\varrho}$ unabhängige Functionen sind.

Es erweisen sich zwei Zahlen $\varkappa$ und 2σ, welche sich aus bestimmten durch das Pfaff'sche System gelieferten Matrices ergeben, als

charakteristisch. $\varkappa$ heisst geradezu Charakter des Pfaff'schen Systems, und es werden nun für die Fälle $\varrho=1,2,3$ und die verschiedenen möglichen Combinationen von $\varkappa$, ϱ und σ Theoreme der Reducirbarkeit aufgestellt, beziehungsweise, da die Zahl der Combinationen sehr gross ist, wird die Discussion nach ihrem allgemeinen Gange skizzirt. Verf. benutzt nicht, wie die vorliegende Besprechung, die Buchstaben $R_1, R_2, \cdots, R_k$, sondern $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$; wir haben uns hier nur dem allgemeinen Gebrauch angeschlossen. Sr.

E. von Weber. Liniengeometrie und Pfaff'sche Systeme. Leipz. Ber. **52**, 179-213.

Die Note giebt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reducirbarkeit Pfaff'scher Systeme sechster Stufe [$(n-6)$-gliedriger Systeme], wozu die Theorie der linearen Complexe und der r-gliedrigen Congruenzen im R_5 eine notwendige Voruntersuchung bildet. Die Einleitung giebt noch einmal eine Zusammenfassung der vorausgegangenen Noten über denselben Gegenstand mit einigen neuen Bemerkungen und Formulirungen. Die Untersuchung wird für den vorliegenden Fall sehr complicirt, indem eine grosse Anzahl von Fallunterscheidungen notwendig wird, weshalb sich Verf. auf das Wichtigste beschränkt hat. Sr.

C. K. Rusjan. Note zur Abhandlung: „System der Pfaff'schen Gleichungen". Odessa Univ. **79**, 413-424. (Russisch.)

Die Rechnungen eines Beispiels (No. III) der betreffenden Abhandlung werden infolge eines Fehlers von neuem aufgenommen (vergl. F. d. M. **30**, 315, 1899). Si.

C. K. Rusjan. Ueber die normale Anzahl der vollständigen Integrale eines Systems von Pfaff'schen Gleichungen. Odessa Ges. **80**, 10-14. (Russisch.)

Ein System von $m\ (m>1)$ unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen mit p Differentialen $(p>m+1)$, deren Coefficienten die notwendigen Bedingungen der Reduction nicht befriedigen, wird durch $\frac{1}{2}(p+m)$, resp. $\frac{1}{2}(p+m+1)$ vollständige Integrale integrirt, so dass die betreffenden Reductionsfälle die einzigen sind. Si.

H. Duport. Sur les équations aux dérivées partielles. Journ. de Math. (5) **6**, 41-46.

Es werden zwei Fälle eines Systems Pfaff'scher Gleichungen der Form

$$\Sigma a_i\, dx_i=0,\ \Sigma b_i\, dx_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,6)$$

behandelt, von denen der erste dadurch interessant ist, dass er als besonderen Fall die Laplace'sche Gleichung enthält; der zweite Fall entsteht, wenn bei der Gleichung zweiter Ordnung, auf die obiges System zurückgeführt werden kann, die Charakteristiken zusammenfallen. Sh.

H. Duport. Sur les équations aux dérivées partielles. C. R. **130**, 232-233.

Behandlung zweier Pfaff'schen Gleichungen (Inhaltsangabe einer demnächst erscheinenden Arbeit des Verf.). Wbg.

E. O. Lovett. The condition that a linear total differential equation be integrable. Annals of Math. (2) **1**, 175-176.

Damit die lineare totale Differentialgleichung:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

integrabel sei, ist notwendig und hinreichend, dass

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0$$

ist. Sh.

A. Guldberg. Nota sobre las ecuaciónes lineales de diferenciales totales. Progreso mat. (2) **2**, 443-446.

Der Verf. betrachtet die Gleichungen:

$$P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0, \quad P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz = 0$$

und zeigt, dass, wenn sie denselben integrirenden Factor besitzen, ihre Integration nur Quadraturen erfordert. Hiernach beweist er, dass dasselbe eintritt, wenn die beiden Factoren durch eine Beziehung von der Gestalt $M_2 = \varphi(x, y, z) M_1$ verbunden sind. Sodann wird auch der Fall betrachtet, bei welchem vier lineare Gleichungen mit totalen Differentialen gegeben sind und man eine Lösung jeder einzelnen kennt.

Tx. (Lp.)

A. Guldberg. Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen. J. für Math. **122**, 34-38.

Ist eine totale Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad \omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

vorgelegt, wo ω homogen in dx, dy, dz ist, so substituire man in (1) $pdx + qdy$ für dz. In der dann erhaltenen Gleichung $\Sigma Pdx^\alpha dy^\beta = 0$ setze man sämtliche Coefficienten gleich Null. Die so sich ergebenden Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$ liefern die gesuchten Integrabilitätsbedingungen. Ist die totale Differentialgleichung

n-ter Ordnung $\omega(x, y, z, dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz) = 0$, wo ω homogen in $dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz$ ist (d^mz als ein Ausdruck m-ten Grades angesehen), so führe man die Substitutionen ein:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,\ d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$\ldots,\ d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \cdots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n.$$

In der dann sich ergebenden Gleichung $\Sigma P dx^\alpha dy^\beta = 0$ setze man wieder sämtliche Coefficienten gleich Null. Diese Gleichungen geben in Verbindung mit den Relationen, welche zwischen den Differentialquotienten n-ter Ordnung von z bestehen, die gesuchten Integrabilitätsbedingungen. Die betreffenden Rechnungen werden an einigen Beispielen ausgeführt.

Hr.

A. Guldberg. Sur les équations aux dérivées partielles du troisième ordre qui admettent une intégrale intermédiaire. C. R. **130**, 1452-1454.

Jedes intermediäre Integral einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E(\beta^2 - \alpha\gamma)$$
$$+ F(\gamma^2 - \beta\delta) + G(\alpha\delta - \beta\gamma) + H = 0,$$

wo $A, B, \ldots, H$ Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind und

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

ist, muss einem System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, welches vom Verf. genauer untersucht wird. Wbg.

A. Guldberg. On partial differential equations of the third order. Videnskabsselskabets Skrifter. Math.-naturv. Klasse Kristiania 1900, No. 5, 43 S. 8°.

Die Abhandlung behandelt diejenigen partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, die ein intermediäres Integral von der Form $u = f(v)$ besitzen, wo u und v beliebige Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind. Die Bestimmung eines intermediären Integrals wird zurückgeführt auf die Integration von vier simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich wieder, unter gewissen Bedingungen, auf lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung reduciren lassen.

Gbg.

A. Guldberg. En Saetning om totale integrable Differentialligninger. Nyt Tidss. for Math. **11B**, 33-34.

Erweiterung eines Satzes von Page, American J. **18**, 95-97 (F. d. M. **27**, 240, 1896). Es wird bewiesen, dass, wenn eine totale integrirbare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Sigma P_{a_1, a_2, a_3}(x, y, z)\, dx^{a_1} dy^{a_2} dz^{a_3} \qquad (a_1 + a_2 + a_3 = n)$$

eine Transformationsgleichung

$$Uf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

zulässt, sich die singulären Lösungen der Gleichung (1), falls solche existiren, unter den durch die Gleichung

$$\Sigma P_{a_1, a_2, a_3} \xi^{a_1} \eta^{a_2} \zeta^{a_3}$$

definirten Flächen befinden. V.

E. Pascal. Sur une théorie des systèmes d'équations aux différentielles totales de second ordre. C. R. **130**, 645-647.

Es handelt sich um die Integration eines Systems von m totalen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form (wo $X_{hki} = X_{khi}$):

$$d^2 x_{n-m+1} - \sum_{h, k=1}^{n}\sum X_{hk1}\, dx_h\, dx_k = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^2 x_n - \sum_{h, k=1}^{n}\sum X_{hkm}\, dx_h\, dx_k = 0,$$

wo $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ anzusehen sind, falls das System integrabel ist. Die höchste Zahl der willkürlichen Constanten, die in den Integralen auftreten können, ist $m(n-m+1)$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für diesen Fall des „vollkommen integrablen Systems“ sind

$$\frac{\partial X_{jki}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_{hki}}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^{m}(X_{j, n-m+s, i}\, X_{hks} - X_{h, n-m+s, i}\, X_{jks}) = 0.$$

Sie sind von einander nicht unabhängig; die Anzahl der unabhängigen Bedingungen ist $\frac{1}{3} m(n-1) n(n+1)$. Sind sie erfüllt, so lässt sich die Integration des vorgelegten Systems auf die eines vollkommen integrablen Systems totaler Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Hr.

E. Pascal. Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 287-297.

E. Pascal. La teoria delle equazioni ai differenziali totali di 3° ordine. Ibid. 675-687.

Eine Gleichung mit den totalen Differentialen r-ter Ordnung einer Function y von n unabhängigen Variabeln $x_1, \cdots, x_n$ heisst vollkommen

integrabel, wenn der Differentialausdruck, der gleich Null gesetzt ist, mit dem Product eines Factors in das totale Differential r-ter Ordnung einer Function $f(y, x_1, \cdots, x_n)$ zusammenfällt. Da, falls ψ eine beliebige ganze rationale Function $(r-1)$-ten Grades in den Variabeln $x_1, \cdots, x_n$ bezeichnet, $f+\psi=0$ ebenfalls ein Integral der Gleichung darstellt, so ist die grösste Zahl der im Integral auftretenden willkürlichen Constanten $\binom{n+r-1}{r-1}$. In der ersten Note werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, welche die Coefficienten der Gleichung mit totalen Differentialen erfüllen müssen, damit sie vollkommen integrabel sei, in welchem Falle das Integral die grösste Zahl der willkürlichen Constanten wirklich enthält. Durch Einführung der partiellen Derivirten von y bis zur $(r-1)$-ten Ordnung incl. als neue abhängige Variabeln kann man die fragliche Integration auf die eines Systems von $\binom{n+r-1}{r-1}$ Gleichungen mit totalen Differentialen erster Ordnung zurückführen. In der zweiten Note wird nun an dem Falle $r=3$ gezeigt, dass die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems, die man nach bekannten Methoden aufstellen kann, mit den in der ersten Note auf directem Wege hergeleiteten in den Resultaten vollkommen übereinstimmen. Es folgt die Discussion der verschiedenen Fälle, in denen die Gleichung unvollständig integrabel ist, d. h. durch eine Gleichung integrirt werden kann, die eine geringere als die angegebene grösste Zahl willkürlicher Constanten enthält. Den Beschluss bildet die Behandlung einiger einfachen Beispiele. Hr.

C. Severini. Sull' integrazione approssimata di un'equazione a derivate parziali lineare. Lomb. Ist. Rend. (2) **32**, 1427-1437 (1899).

Frühere Untersuchungen des Verfassers über näherungsweise Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 657-667; F. d. M. **29**, 278-279, 1898) werden hier ausgedehnt auf partielle Differentialgleichungen, und es wird gezeigt, wie ein Integral mit gegebenen Anfangsbedingungen in einem endlichen Bereiche einer Differentialgleichung der Form $\partial z/\partial x + f(xy)\partial z/\partial y = 0$ mit Hülfe eines ganzen rationalen Polynoms von x und y mit beliebiger Annäherung ermittelt werden kann, vorausgesetzt, dass in dem Bereiche $f(x,y)$ reell, eindeutig, endlich und stetig ist. Sh.

J. Le Roux Sur l'intégration des équations linéaires à discriminant non nul. C. R. **130**, 695-697.

Es sei eine lineare partielle Differentialgleichung p-ter Ordnung mit n unabhängigen Variabeln gegeben. Die ihr entsprechenden „charakteristischen Flächen" (Mannigfaltigkeiten $(n-1)$-ter Dimension) sind durch eine homogene partielle Differentialgleichung p-ten Grades definirt,

von der vorausgesetzt wird, dass ihre Discriminante von Null verschieden ist. Man kann dann alle Integrale der gegebenen Gleichung durch $(n-1)$-fache Integrale mit variabeln Grenzen darstellen, wenn bekannt sind: 1. ein vollständiges Integral der Gleichung der Charakteristiken, 2. eine particulare Lösung der betrachteten Gleichung, die Bedingungen genügt, analog denen, welche die vom Verf. in einer früheren Arbeit eingeführten „Hauptintegrale" definiren. (F. d. M. **28**, 316, 1897).

Hr.

J. Le Roux. Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Journ. de Math. (5) **6**, 387-422.

Es wird das allgemeine Problem der Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen darauf zurückgeführt, dass gewisse particulare Integrale in endlicher Anzahl bestimmt werden, aus denen alle anderen auf gewisse Weise abgeleitet werden können. Diese ersten Integrale werden als die primitiven Integrale bezeichnet. Sh.

K. Boehm. Zur Integration partieller Differentialsysteme. Leipzig: B. G. Teubner. 55 S. 8°.

Bei den Existenzuntersuchungen von Integralen partieller Differentialgleichungen handelt es sich um die Construction von Reihen, durch welche formal die Beziehungen zwischen den Differentialquotienten befriedigt werden, und um die Untersuchung der Convergenz dieser Reihen. Die vorliegende Arbeit fasst nur den ersten Teil ins Auge und sieht also von Convergenzbetrachtungen ab. Es ist bekannt, dass Differentialsysteme im allgemeinen nur Lösungen besitzen, wenn sie gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Es ist demnach zunächst eine Normalform für Differentialsysteme aufzustellen, in welcher dieselben die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, und dann zu zeigen, dass ein beliebiges System auf ein äquivalentes System in der Normalform übergeführt werden kann, wenn es Integrale besitzt, oder andernfalls die Unmöglichkeit der Transformation nachzuweisen. Ein derartiges Verfahren ist von Riquier (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **10**; F. d. M. **25**, 590-594, 1893) angegeben worden; da bei demselben ziemlich umfangreiche Rechnungen vorkommen, so stellt der Verf. in dieser Arbeit auf anderem Wege einfachere Bedingungen auf. Sh.

M. Krause. Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen vierfach periodische Functionen Genüge leisten. American M. S. Trans. **1**, 287-292.

Es werden Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen betrachtet, die als Analogon der Picard'schen Differentialgleichung gelten können (C. R. **89**; F. d. M. **11**, 302, 1879). Ausgehend von der Function:

$$Z = G(z)^{\frac{1}{2}} e^{c\varphi(z)},\ \varphi(z) = \int \frac{z^{\nu+1}\,dz}{G(z)\sqrt{R(z)}},$$

wo $G(z)$ eine ganze Function m-ten Grades mit lauter ungleichen Factoren und $R(z)$ den Ausdruck $z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)$ bedeutet, gelangt der Verf. unter Hinzufügung besonderer Bestimmungen zu einer Differentialgleichung für Z von der Form

$$(1)\qquad R(z)\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left(\tfrac{1}{2} R'(z) - \frac{(\nu+1)R(z)}{z}\right)\frac{dZ}{dz} = \\ = \frac{Z}{4}(Bz^2 + Cz + D),$$

von der $G(z)^{\frac{1}{2}} e^{\pm c\varphi(z)}$ zwei linear unabhängige Integrale sind, und wo $m = 2\nu - 1$ ist. Indem man nun die Gleichung (1) für zwei unabhängige Veränderliche z_1, z_2 gebildet denkt und ihre Integrale mit $Z_1^{(1)}$, $Z_1^{(2)}$, resp. $Z_2^{(1)}$, $Z_2^{(2)}$ bezeichnet, erhält man in $Z^{(1)} = Z_1^{(1)} Z_2^{(1)}$ und $Z^{(2)} = Z_2^{(1)} Z_2^{(2)}$ Functionen, welche beiden Differentialgleichungen genügen. Durch Einführung der hyperelliptischen Functionen, indem man setzt

$$2\,du_1 = \frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} - \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}},\quad 2\,du_2 = -\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}},$$

erhält man zwei lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in u_1 und u_2 mit vierfach periodischen Coefficienten als Analogon der Picard'schen Gleichung, von denen die beiden Integrale $Z^{(1)}$ und $Z^{(2)}$ durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen dargestellt werden können.

Hr.

L. Bianchi. Sulla integrazione della equazione $\Delta_2 u = 0$ nello spazio indefinito non-euclideo. Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_2$, 333-343.

Es wird gezeigt, dass die wesentlichen Eigenschaften der harmonischen Functionen im nichteuklidischen Raume erhalten bleiben, so die Theoreme über Maxima und Minima derselben und die Eigenschaft, dass bei gegebenen Werten an der Begrenzung nur eine einzige Function im Innern existirt.

Sh.

É. Picard. Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé. Journ. de Math. (5) **6**, 129-140.

É. Picard. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour fermé. C. R. **130**, 447-449.

Mit der Ausdehnung des Dirichlet'schen Princips auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung hatte sich der Verf. schon früher beschäftigt (Journ. de Math. (4) **6**, 145-210; F. d. M. **22**, 357-358,

1890). Auf diese Arbeit wird hier zurückgegriffen und die Aufgabe gestellt, das stetige Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu$$

zu finden, das auf einer hinreichend kleinen regulären Begrenzung gegebene Werte annimmt. Sind a, b, c stetig, und besitzen sie stetige partielle Differentialquotienten erster Ordnung, ohne analytische Functionen zu sein, so muss angenommen werden, dass die Folge der auf dem Umfange angenommenen Werte eine stetige Function bildet, welche Ableitungen der ersten drei Ordnungen besitzt. Gerade auf diese Bedingungen war in der früheren Arbeit nicht ausdrücklich hingewiesen worden.

Sind dagegen a, b, c analytische Functionen, so genügt die einzige Bedingung, dass die Folge der auf dem Umfange angenommenen Werte eine stetige sei, wie dies in der zweiten Note bemerkt wird. Sh.

É. Picard. De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface fermée. Darboux Bull. (2) **24,** 196-210.

Die Integration obiger Gleichung ist vom Verf. schon in einer früheren Abhandlung (Journ. de Math. (4), **9,** 273-291; F. d. M. **25,** 683-684, 1893) behandelt worden. Hier werden verschiedene Punkte dieser Abhandlung ergänzt und schärfer präcisirt. Besonders wird eingehend bewiesen, dass nur ein einziges Integral existirt, das n im Endlichen gelegene singuläre Punkte von bestimmtem Typus und einen eben solchen Punkt im Unendlichen besitzt. Sh.

É. Picard. Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$. S. M. F. Bull. **28,** 186-191.

Es werden zwei specielle Fälle der obigen Differentialgleichung behandelt, die in der Wärmetheorie auftreten; bei dem interessanteren zweiten Fall handelt es sich darum, ein Integral der Gleichung $\Delta u = u$ zu finden, das in Bezug auf x, y periodisch ist mit den Perioden a, b und mit Ausnahme des Punktes (α,β) und der homologen $(\alpha+ma, \beta+nb)$ endlich ist.

Setzt man: $$\Theta(x,y,z)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{z\sqrt{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}},$$

so ist das gesuchte Integral:

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\Theta(x,y,z)\,dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

Sh.

S. Zaremba. Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + \xi u + f = 0$ und über harmonische Functionen. Prace mat.-fiz. **11,** 99-190. (Polnisch.)

Die Differentialgleichung $\Delta u + \xi u + f = 0$ und die durch sie definirten harmonischen Functionen hat der Verf. mittels der Poincaré'schen Methode (Sur les équations de la physique mathématique. Palermo Rend. **8,** 53-156; F. d. M. **25,** 1516-1532, 1894) schon in früheren Arbeiten: Ann. de l'Éc. Norm. (3) **16,** 427-464 (F. d. M. **30,** 328), C. R. **128,** 1088-1089 (F. d. M. **30,** 373, 1899) untersucht. In der vorliegenden ausführlichen Arbeit behandelt er noch einmal denselben Gegenstand, nämlich den von Poincaré nicht ganz erledigten allgemeinen Fall, in welchem nämlich die Function u auf der Begrenzungsfläche (S) des geschlossenen Raumes (D) die Bedingung $du/dN = hu$ erfüllt, wo du/dN die Derivirte nach der inneren Normale und h eine reelle nicht negative Constante bedeutet. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet nicht, wie gewöhnlich, die Laplace'sche, sondern die allgemeinere Gleichung $\Delta v + \xi v = 0$, was dem Verf. einen einfachen und allgemeinen Beweis des Dirichlet'schen Princips ermöglicht und ihn zu einem interessanten auf die Laplace'sche Differentialgleichung bezüglichen Satz führt. Dieser Satz lautet: „Um die Functionen v zu bestimmen, welche im Raume (D) der Gleichung $\Delta v = 0$ genügen und auf der Begrenzung (S) desselben die Bedingung $dv/dN = \varpi$ erfüllen (ϖ ist eine stetige Function des variablen Punktes auf der Fläche (S)), ist es notwendig und hinreichend, dass man hat:

$$\int_{(S)} \varpi \, ds = 0.$$

Dn.

J. W. Lindeberg. Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$. C. R. **130,** 1539-1541.

Bezeichnet c den Umfang eines Kreises, f eine gegebene Function von x und y, endlich Φ_c eine in jedem Punkte von c bestimmte Function, die ebenso wie f gewissen Continuitätsbedingungen genügen muss, so lässt sich eine Function V von x und y finden, die endlich und stetig mit ihren beiden ersten Ableitungen in dem Kreise ist und den Bedingungen genügt: $\Delta V = fV$ innerhalb des Kreises, $\partial V/\partial n = \Phi_c$ auf c; die ausführliche Begründung dieses Satzes wird einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. Sh.

R. Liouville. Sur une méthode de Riemann et sur les équations, aux dérivées partielles, linéaires. C. R. **131,** 697-699.

Der Verf. setzt hier die Grundzüge einer Methode auseinander, durch die es gelingt, eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln vollständig zu integriren, falls man

sechs beliebige particulare Lösungen derselben kennt. Die Methode, deren Einzelheiten sich nicht in Kürze wiedergeben lassen, hat gewisse Analogie mit der Methode, die Riemann in seiner Arbeit über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite benutzt hat.

Wn.

J. R. Brajtzew. Zur Frage über die Integration der Gleichung $\Delta_m(u) = 0$. Mosk. Math. Samml. **21**, 490-498. (Russisch.)

Die von P. A. Nekrassow in einer Mitteilung an die Moskauer Math. Gesellschaft gegebene Methode, mit Hülfe der Transformation

$$u_1 = \frac{x - x_0}{r},\ u_2 = \frac{y - y_0}{r},\ u_3 = \frac{z - z_0}{r},$$

wo $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$, Integrale der Laplace'schen Gleichung mit einer beliebigen Anzahl willkürlicher Functionen (jede von einem Argument) aufzustellen, kann dasselbe für die Gleichung in m Veränderlichen leisten:

$$\Delta_m(u) = \Sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0.$$

Si.

J. Coulon. Sur les caractéristiques de quelques équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Bordeaux Procès-verbaux, 1899-1900, 24--27.

Ein Integral einer partiellen Differentialgleichung ist im allgemeinen völlig bestimmt durch die Werte desselben und die seiner Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung auf einer gegebenen Fläche. Hier werden gewisse Flächen und gewisse Bedingungen für die Differentialgleichungen der Form $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \partial^2 V/\partial x_\nu^2 = 0$ abgeleitet, für die Unbestimmtheit des betreffenden Integrals eintritt, und die Beziehungen dieser Bedingungen zum Problem der Fortpflanzung der Wellen angegeben.

Sh.

J. Coulon. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et à coefficients constants. C. R. **130**, 765-767.

Einige bemerkenswerte Lösungen der Gleichung

$$\sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = 0$$

werden angegeben und zur Bestimmung einer Lösung benutzt, die durch ihre Werte und diejenigen einer bestimmten Function ihrer ersten Ableitungen auf einer Punktmannigfaltigkeit $(p + q - 1)$-ter Dimension definirt ist.

Sh.

J. Coulon. Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles et le principe d'Huygens. C. R. **130,** 1064-1065.

Beziehung zwischen den Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung

$$a_1\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+a_2\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\cdots+a_n\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}+a\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$$

mit constanten Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_n, a$ und dem Huygens'schen Princip. St.

J. Coulon. Remarques à propos d'un mémoire de M. Massau sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. C. R. **130,** 1378-1379.

Verf. bemerkt, dass trotz der Aehnlichkeit der Gesichtspunkte seine Mitteilung (vergl. das vorangehende Referat) von der Arbeit Massau's (F. d. M. **30,** 312, 1899) verschieden ist. Wbg.

J. Hadamard. Sur l'intégrale résiduelle. S. M. F. Bull. **28,** 69-90.

Die Untersuchung des Verf. hängt innig zusammen mit der Formulirung des Huygens'schen Princips von Kirchhoff. Bedeutet $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,$$

welches durch seine Werte und die seiner ersten Ableitungen in einer Mannigfaltigkeit M_n von n Dimensionen gegeben ist, so besagt das Huygens'sche Princip in der Kirchhoff'schen Formulirung, dass, um $u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, t^0)$ durch ein bestimmtes Integral als Function der Werte auszudrücken, welche u und $\partial u/\partial x_i$ in einer gewissen Function P_n von M_n annehmen, es genügt, die Werte von $u, \partial u/\partial x_i$ auf der Grenze von P_n zu kennen. Bei dieser Auffassung ist das Huygens'sche Princip eine besondere Eigenschaft der Schallgleichung, die der Gleichung der cylindrischen Wellen nicht zukommt. In diesem Falle wird nämlich jeder Punkt in dem Augenblicke in Bewegung geraten, in welchem er von der Welle erreicht wird, aber nach dem Vorübergang der Welle wird er nicht mehr zur Ruhe kommen. Die Gleichung dieser neuen Bewegung nennt Verf. das Residual-Integral der Gleichung der cylindrischen Wellen. Dieses Residual-Integral ist im Falle der Kugelschallwellen nach dem Huygens'schen Princip identisch Null.

Verf. studirt nun genauer den Fall zweier unabhängigen Variabeln und untersucht, in welchen Fällen das Residual-Integral von

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial x}+cz=0$$

einer oder mehreren linearen Gleichungen genügt, die von der vorstehenden und deren Ableitungen verschieden sind. Es ergiebt sich, dass dazu die Laplace'sche Folge der gegebenen Gleichung in einer Richtung oder in beiden Richtungen abbrechen muss. Verf. betrachtet hiernach noch das Problem der Ausbreitung des Schalles in einem begrenzten Mittel. Gz.

G. Lauricella. Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Annali di Mat. (3) **4,** 281-333.

Im Anschlusse an die Picard'sche Abhandlung (Acta Math. **12,** 323-338; F. d. M. **21,** 348-349, 1889) über den analytischen Charakter der Lösungen der Differentialgleichung

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+d\frac{\partial V}{\partial x}+e\frac{\partial V}{\partial y}+fV=0$$

wird hier die allgemeinere Differentialgleichung

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+d\frac{\partial V}{\partial x}+e\frac{\partial V}{\partial y}+fV+h=0$$

behandelt. Zunächst wird gezeigt, dass diese Gleichung sich reduciren lässt auf $\Delta^2 V+f(x,y)V+h(x,y)=0$. Unter der Annahme, dass $f(x,y)$ im betrachteten Bereiche stets positiv ist, und dass k ein beliebiger Parameter ist, wird nun erst gezeigt, dass für die Gleichung $\Delta^2 V+k\cdot f\cdot V+h=0$ eine Function V der Punkte des Bereichs und der complexen Variable k existirt, die eine endliche oder unendliche Reihe einfacher Pole mit bestimmt angegebenen Residuen als singuläre Stellen besitzt, im übrigen in dem betreffenden Bereiche endlich und stetig ist und für eine gegebene Wertfolge auf dem Umfange des Bereichs die Lösung obiger Gleichung darstellt und unter bestimmten Bedingungen auch die einzige derartige Lösung bildet. Es wird schliesslich die Untersuchung auch ausgedehnt auf Bereiche, in denen f nicht constantes Zeichen besitzt. Sh.

W. Kapteyn. Sur quelques cas particuliers de l'équation différentielle de Monge. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17,** 245-282.

Die Gleichung von Monge

$$Ir+2Ks+Lt+M=0$$

besitzt nicht immer zwei Zwischenintegrale; es werden daraufhin zwei specielle Fälle obiger Gleichung hier untersucht. Die allgemeinste Form der Gleichung $s+\lambda t+\mu=0$, für welche dieselbe zwei Zwischenintegrale besitzt, erhält man für

$$\lambda=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial q}(p\varrho+\nu),\quad \mu=\frac{1}{\varrho}H(p\varrho+\nu),$$

wo $H = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}$, ϱ eine willkürliche Function von x, y, z und q bedeutet und ν die allgemeinste Lösung der linearen Gleichung ist:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial q} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y} + \left(1 + \frac{q}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) \frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y} + q \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) \frac{\partial \nu}{\partial q} = \frac{\partial \varrho}{\partial x}.$$

Alsdann wird die Differentialgleichung $r - \lambda^2 t = 0$ untersucht und für λ ein bestimmter Wert angegeben, für den allein die Gleichung zwei Zwischenintegrale besitzt. Sh.

J. Clairin. Sur certaines équations de Monge-Ampère. C. R. **130**, 997-999.

Es werden Transformationen angegeben, durch welche es ermöglicht wird, gewisse durch die Darboux'sche Methode integrable Gleichungen auf solche zurückzuführen, die durch die Monge'sche Methode integrabel sind. Sh.

É. Cotton. Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 211-244.

Bezeichnet man mit F und F' Ausdrücke der Form

$$\sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_k C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Du,$$

wo u, B, C, D Functionen der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ sind, derart, dass $|B_{ij}|$ nicht identisch Null ist, so werden hier die folgenden drei Aufgaben gelöst:

1. Es sind $F(u)$ und $F'(u')$ gegeben; man soll eine Transformation der Variabeln finden, durch welche die x als Functionen der x' ausgedrückt werden und die Identitäten bestehen: $u = u'$, $F(u) = F'(u')$.

2. Es sind $F(u)$ und $F'(u')$ gegeben; man soll eine Transformation der Variabeln und eine Function λ der Variabeln x finden, während die Identitäten bestehen: $\lambda u = u'$, $F(\lambda u)/\lambda = F'(u')$.

3. Wie 2; doch sollen zwei Functionen ϱ, λ gesucht werden, während die Identitäten bestehen:

$$\lambda u = u', \ \varrho F(\lambda u)/\lambda = F'(u').$$

Diese Probleme hängen eng zusammen mit der Bestimmung gewisser Differential-Invarianten der Ausdrücke $F(u)$. Sh.

É. Cotton. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. Darboux Bull. (2) **24**, 229-232.

Es werden einige Resultate über die Lösungen der Gleichung mitgeteilt:

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \alpha x \frac{\partial z}{\partial x} + \beta y \frac{\partial z}{\partial y} + (\alpha\beta xy - \gamma) z = 0,$$

wo α, β, γ Constanten sind. Sh.

C. Guichard. **Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.** C. R. **131**, 100-103.

Von denjenigen Gleichungen der Form $\partial^2\Theta/\partial u \partial v = M\Theta$, die p Lösungen derart zulassen, dass die Summe der Quadrate derselben gleich der Summe einer Function von u und einer Function von v ist, wird der Satz aufgestellt, dass dieselben unzählig viele Gruppen von p Lösungen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p$ besitzen, die von einer willkürlichen Constante h abhängen, so dass

$$\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots + \Theta_p^2 = \frac{U}{1 + Uh} + \frac{V}{1 + Vh}$$

ist, und es werden weitere Schlüsse aus diesem Satze gezogen. Sh.

E. Goursat. **Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x,y)pq$.** S. M. F. Bull. **28**, 1-6.

Die Gleichung des Titels kann auf die lineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z = 0$$

zurückgeführt werden, deren Invarianten h, k die Werte

$$h = \lambda, \; k = \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y}$$

haben. Für diese Gleichungen wird ein Theorem abgeleitet, das dem von Moutard (J. de l'Éc. Pol. Cahier **28**, 1-12; F. d. M. **10**, 263, 1878) über die Gleichungen mit gleichen Invarianten entspricht. Sh.

G. Tzitzéica. **Sur les équations de Laplace à solutions quadratiques.** C. R. **131**, 487-489.

G. Tzitzéica. **Sur une classe d'équations de Laplace.** Darboux Bull. (2) **24**, 142-144.

Beide Noten beziehen sich darauf, n Lösungen der Differentialgleichung $\partial^2 z/\partial x \partial y = a \partial z/\partial x + b\, \partial z/\partial y$ derart zu finden, dass $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung ist. Man wird bei dieser Untersuchung darauf geführt, Functionen c von x, y zu finden, so dass die gegebene Gleichung und die Gleichung $\partial z/\partial x \cdot \partial z/\partial y = c$ eine gemeinsame Lösung haben; es wird der besonders interessante Fall behandelt, dass das System beider Gleichungen ein vollständiges ist. Sh.

B. OSTER. Ueber die Reduction einer Klasse partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hoppe Arch. (2) **17**, 321-328.

Die Gleichungen der Form $Ar + 2Bs + Ct + D = 0$, wo A bis D Functionen von x, y, z, p, q sind, werden durch eine Methode, die zuerst Bonnet (Journ. de Math. **5**, 153-266) zur Reduction der Differentialgleichungen für die Flächen constanten Krümmungsmasses benutzt hat, auf die Form $f(x, y, z, p, q, s) = 0$ gebracht. Sh.

J. E. CAMPBELL. On the types of linear partial differential equations of the second order in three independent variables which are unaltered by the transformations of a continuous group. American M. S. Trans. **1**, 243-258.

Es wird in dieser Arbeit untersucht, auf welche Form eine partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3 gebracht werden kann, wenn sie die Eigenschaft hat, für einige infinitesimale Transformationen ungeändert zu bleiben. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die Gleichung

$$a_{11}z_{11} + a_{22}z_{22} + a_{33}z_{33} + 2a_{12}z_{12} + \cdots + 2a_1 z_1 + \cdots + az = 0,$$

und es wird gezeigt, dass, wenn $|a_{\mu\nu}| \gtrless 0$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$, die Gleichung nicht mehr als 11 unabhängige Transformationen zulässt. Lässt die Gleichung wenigstens eine infinitesimale Transformation zu, so kann sie auf eine Form gebracht werden, deren sämtliche Coefficienten unabhängig von x_1 sind. Entsprechend werden die Fälle, dass die Gleichung wenigstens zwei oder drei Transformationen zulässt, eingehend behandelt. Sh.

G. VIVANTI. Sulla trasformazione di Laplace. Palermo Rend. **14**, 145-156.

Es wird untersucht, ob und wann die bekannten Eigenschaften der Laplace'schen Transformation für eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen:

$$p_{123} + ap_{23} + bp_{31} + cp_{12} + dp_1 + ep_2 + fp_3 + gz = 0$$

noch immer bestehen. Vi.

A. WENDLER. Ueber die Flächen, welche dem particularen Integrale der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ entsprechen. Diss. München: E. Reinhardt. 48 S. 8° + 3 Fig.

Die Theorie der Integralflächen der Gleichung $\partial^2 z/\partial x \partial y = 0$ ist in der von Lie geschaffenen Theorie der Translationsflächen enthalten und vollständig entwickelt. Hier dagegen werden die Particularlösungen

$z = f(x) \pm f(y)$, die mit Rücksicht auf das Vorzeichen als P- und N-Flächen unterschieden werden, einer eingehenden Behandlung unterworfen, die bei der einfachen, bezüglich der unabhängigen Variabeln mehr oder weniger symmetrischen Gleichungsform zu verschiedenen interessanten analytischen und geometrischen Beziehungen führt. Sh.

E. Almansi. Integrazione della doppia equazione di Laplace. Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_1$, 298-304.

In einer früheren Arbeit (Palermo Rend. **13**, 225-262; F. d. M, **30**, 375-376, 1899) desselben Verfassers war die Lösung obiger Gleichung für einen einfach zusammenhängenden ebenen Bereich gegeben worden; hier wird dasselbe Problem dadurch in einfacherer Form gelöst, dass es zurückgeführt wird auf die Bestimmung dreier harmonischen Functionen des Bereichs, deren Werte am Umfange gegeben sind, und auf die einer endlichen Anzahl von Constanten. Sh.

T. Boggio. Integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in una corona circolare e in uno strato sferico. Ven. Ist. Atti **59** [(8) **2**], 497-508.

Die zuerst von Venske (Gött. Nachr. 1891, 27-34; F. d. M. **23**, 426-427, 1891), später wieder von Almansi (Annali di Mat. (3) **2**, 1-51; F. d. M. **30**, 331-332, 1899) behandelte Aufgabe der Integration von $\Delta^2\Delta^2 = 0$ innerhalb eines Kreisringes wird hier im Anschlusse an Almansi's Arbeit in vereinfachter Form gegeben und alsdann das entsprechende Problem für eine Kugelschicht gelöst, wenn die Function und ihre Ableitungen nach der inneren Normale für beide begrenzenden Kugeln bestimmte Werte annehmen, die in Reihen von Kugelfunctionen entwickelbar sind. Sh.

B. Oster. Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit n unabhängigen Variabeln. Diss. Berlin. Göttingen: W. Fr. Kaestner. 27 S. 8⁰.

Es wird hier die Frage nach der Existenz eines Zwischenintegrals erster Ordnung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in beliebig vielen Variabeln behandelt. Zunächst werden die allgemeinen Typen mehrerer Differentialgleichungen aufgestellt, welche Zwischenintegrale von einer besonderen Form besitzen; alsdann wird für eine beliebige partielle Differentialgleichung untersucht, wann ein Zwischenintegral existirt; dies lässt sich allein durch Eliminationen und Differentiationen entscheiden. Existirt ein Zwischenintegral, so kann es durch Integration eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden werden.

Wie vom Verf. nachträglich bemerkt wird, sind die von ihm angegebenen Bedingungen in anderer Form in einer Abhandlung von

Hamburger (J. für Math. **110**, 158-176; F. d. M. **24**, 329-330, 1892) enthalten. Sh.

L. Maurer und H. Burkhardt. Continuirliche Transformationsgruppen. Encykl. d. math. Wiss. **2**, 401-436.

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. 2. Definitionen. 3. Die grundlegenden Differentialgleichungen. 4. Umformung der Differentialgleichungen. Infinitesimale Transformationen. 5. Integrabilitätsbedingungen. Zusammensetzung. 6. Untergruppen. 7. Isomorphismus. 8. Aehnlichkeit. 9. Transformation der Gruppe in sich. 10. Reciproke Gruppen. 11. Transitivität. Primitivität. 12. Invarianten. 13. Differentialinvarianten. 14. Parametergruppen. 15. Adjungirte Gruppe. 16. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Variabeln- und Parameterzahl. 17. Bestimmung aller Typen der Zusammensetzung einer Gruppe. 18. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Zusammensetzung. 19. Ueber den analytischen Charakter der Functionen $f_\nu(x|a)$. 20. Besondere Arten von endlichen continuirlichen Gruppen. 21. Gemischte Gruppen. 22. Unendliche continuirliche Gruppen. Wbg.

E. W. Rettger. On Lie's theory of continuous groups. American J. **22**, 60-95.

Der Verf. untersucht alle zwei- und dreigliedrigen projectiven Gruppen der Ebene und alle zwei- und dreigliedrigen linearen homogenen Gruppen des Raumes darauf hin, welche unter ihnen singuläre Transformationen enthalten, das heisst Transformationen, die von keiner infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt sind. Ueber die ganze Fragestellung vergleiche man das in den Referaten über die Arbeiten von Slocum Gesagte (S. 148ff. dieses Bandes). Auf alle Einzelheiten der vorliegenden Arbeit einzugehen, ist hier weder möglich noch nötig. Nur einige Punkte verdienen Erwähnung. Sind $X_1 f, \ldots, X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so kann es vorkommen, dass die Gleichungen:

$$x'_i = x_i + \sum_k e_k X_k x_i + \cdots$$

auch dann noch eine, natürlich singuläre, Transformation der Gruppe darstellen, wenn gewisse der e_k unendlich sind. Der Verf. untersucht nun die Bahncurven der infinitesimalen Transformation $\Sigma e_k X_k f$ für diesen Fall und bemerkt, dass diese Bahncurven unter Umständen zerfallen, und dass jene singuläre Transformation die Curven, in welche die einzelnen Bahncurven zerfallen, unter einander vertauscht. Hat man andrerseits eine intransitive Gruppe, so ist es wichtig, festzustellen, ob die Punkte jeder (im Sinne Lie's) kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit continuirlich in einander übergehen können, das heisst, ob jeder Punkt von allgemeiner Lage in jeden andern durch eine nicht singuläre Trans-

formation der Gruppe übergeführt werden kann. Besonders wichtig ist das bei der adjungirten Gruppe. Der Verf. hat aber noch keine adjungirte Gruppe gefunden, bei der die Ueberführung in diesem Sinne nicht möglich wäre. Am Schlusse seiner Arbeit giebt der Verf. eine Tabelle derjenigen unter den im Anfange bezeichneten Gruppen, die singuläre Transformationen enthalten. El.

T. Levi-Civita. Funzioni armoniche e trasformazioni di contatto. Ven. Ist. Atti **59** [(8), **2**], 671-675.

Der Verf. betrachtet eine Berührungstransformation der Ebene, also eine Transformation in x, y, p, bei der die Pfaff'sche Gleichung $dy - p\,dx = 0$ invariant bleibt, und setzt $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $p = p_1 - ip_2$; dadurch erhält er in den sechs Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, p_2$ eine Transformation, die das Pfaff'sche System:

$$(1)\ dy_1 - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0,\ dy_2 + p_2 dx_1 - p_1 dx_2 = 0$$

invariant lässt, und bemerkt, dass diese Transformation jedem Paare associirter harmonischer Functionen y_1, y_2 der Veränderlichen x_1, x_2 ein eben solches Paar von Functionen zuordnet. Er betrachtet nun umgekehrt eine Transformation $x'_1 = X_1, \dots, p'_2 = P_2$ in den Veränderlichen $x_1, \dots, p_2$, die das System (1) invariant lässt, setzt

$$X = X_1 + iX_2,\ Y = Y_1 + iY_2,\ P = P_1 - iP_2,$$

behauptet, was aber doch wohl eines Beweises bedurft hätte, dass dann eine Relation von der Form:

$$dY - P\,dX = \varrho\,(dy - p\,dx)$$

besteht, und beweist unter dieser Voraussetzung, dass X, Y, P nur die drei Argumente $x_1 + ix_2$, $y_1 + iy_2$, $p_1 - ip_2$ enthalten. El.

G. Kowalewski. Elementvereine und Streifenelemente im $R_n + 1$. Leipz. Ber. **52**, 91-104.

Einen Verein von ∞^1 Elementen erster Ordnung

$$z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$$

des R_{n+1} nennt Lie einen Elementstreifen. Den Inbegriff zweier unendlich benachbarten Elemente eines solchen Streifens oder allgemeiner den Inbegriff zweier unendlich benachbarten Elemente z, x, p und $z + dz$, $x + dx$, $p + dp$, die vereinigt liegen, die also die Gleichung $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ erfüllen, nennt der Verf. dem entsprechend ein Streifenelement. Die explicite Einführung dieses Begriffs und dieser Benennung erleichtert die Darstellung der Lie'schen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nicht unwesentlich. Zwei von demselben Elemente z, x, p ausgehende Streifenelemente z, x, p, dz, dx, dp und $z, x, p, \delta z, \delta x, \delta p$ nennt der Verf. conjugirt, wenn sie die Gleichung:

$\Sigma(dx_i\,\delta p_i - dp_i\,\delta x_i) = 0$ erfüllen. Diese gegenüber allen Berührungstransformationen invariante Beziehung ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Streifenelemente einem zweifach ausgedehnten Vereine von Elementen angehören. Einen ebenen Bündel von Streifenelementen durch das Element z, x, p nennt der Verf. einen Nullbündel, wenn je zwei Streifenelemente des Bündels conjugirt sind. Soll ein ebener Bündel von ∞^{m-1} Streifenelementen durch z, x, p einem m-fach ausgedehnten Verein von Elementen angehören, so ist notwendig und hinreichend, dass er ein Nullbündel ist. Zu jedem ebenen Bündel von ∞^{m-1} Streifenelementen durch z, x, p gehört ein conjugirter Bündel von ∞^{2n-m-1} Streifenelementen, die zu allen Streifenelementen des ersten Bündels conjugirt sind. Aus diesen Begriffen ergiebt sich mit grosser Leichtigkeit, dass ein Verein von Elementen nicht mehr als ∞^n Elemente enthalten kann, und dass die Gleichungen eines Vereins von ∞^n Elementen die von Lie angegebenen charakteristischen Eigenschaften besitzen. Ferner gelangt man mit der grössten Leichtigkeit zu Lie's Formulirung der Cauchy'schen Integrationsmethode. Endlich kann die vom Referenten (Leipz. Ber. 1893) gegebene Darstellung der Elemente zweiter Ordnung des R_3 für den R_{n+1} kurz so ausgesprochen werden: Die Elemente zweiter Ordnung des R_{n+1} werden durch die Nullbündel von je ∞^{n-1} Streifenelementen dargestellt. El.

Weitere Litteratur.

M. Bôcher. Some theorems concerning linear differential equations of the second order. American M. S. Bull. (2) **6**, 279-280.

Zwei Lehrsätze, deren Beweise später veröffentlicht werden sollen.

P. Cousin. Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Grenoble Ann. **11**, 199-209 (1899).

A. C. Dixon. On differential equations with two independent variables. Cambr. Trans. **19**, 1-22.

A. C. Dixon. On simultaneous partial differential equations. Lond. Phil. Trans. **195** A, 151-191.

W. Kapteyn. Over eenige bijzondere gevallen van de differentiaalvergelijking van Monge. Amst. Ak. Versl. **8**, 356-357.

W. Kapteyn. Een bijzonder geval van de differentiaalvergelijking van Monge. Amst. Ak. Versl. **8**, 620-622.

S. Lie. Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugeln-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Prace mat.-fiz. **11**, 46-98.

Polnische Uebersetzung des ersten Teils dieser Abhandlung (Math. Annalen **5**, 1872; F. d. M. **4**, 408, 1872) mit Anmerkungen von S. Rudzki.

H. Poincaré. Sur les groupes continus. Cambr. Trans. **18**, 220-255.

F. Rösch. Ueber die Irreductibilität der partiellen Differentialgleichung

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=0.$$

Diss. Heidelberg. 29 S. 8⁰ (1899).

W. Stekloff. Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. C. R. **130**, 480-483.

Folgerungen aus einer früheren Note des Verf. Wbg.

E. von Weber. Fine fundamentale Klassification der Differentialprobleme. Deutsche Math. Ver. 8_1, 221.

Kurze Inhaltsangabe eines Vortrags.

Kapitel 7.

Variationsrechnung.

A. Kneser. Lehrbuch der Variationsrechnung. (Mit 24 Textabb.) Braunschw: F. Vieweg und Sohn. XIV + 311 S. 8⁰.

Seit dem vor 40 Jahren erschienenen ausgezeichneten Lehrbuche der Variationsrechnung von Moigno und Lindelöf ist kein Werk über dieselbe erschienen, welches jenes zu ersetzen vermöchte. Viele der damals als ausreichend angesehenen Betrachtungen und Beweise vermögen aber den gesteigerten Anforderungen an Strenge, welche durch den Einfluss von Weierstrass und den seiner Schüler jetzt als notwendig angesehen werden, nicht mehr zu genügen. Eine grosse Anzahl von Arbeiten über Fragen der Variationsrechnung legt von dem Streben, die ungenügenden Schlüsse durch einwandsfreie zu ersetzen, Zeugnis ab; ganz besonders gilt dies von der Theorie der zweiten Variation. Unter den Forschern, welche sich vornehmlich bemüht haben, diese letztere den heutigen Anforderungen entsprechend zu gestalten, ist Kneser, über dessen Untersuchungen in den letzten Bänden dieses Jahrbuches von dem Referenten wiederholt berichtet ist, in erster Linie zu nennen.

Deshalb ist es mit Freude zu begrüssen, dass Kneser sich der schweren Aufgabe unterzogen hat, ein modernes Lehrbuch der Variationsrechnung zu verfassen, in welchem alle die zahlreichen einzelnen Untersuchungen zu einem einheitlichen Ganzen verarbeitet sind. Sein Werk bietet mehr als ein Lehrbuch, es ist eine Gesamtdarstellung des jetzigen Standes der Variationsrechnung, den der Leser dadurch kennen lernen kann, ohne noch durch zahlreiche einzelne Abhandlungen mit von einander abweichenden Bezeichnungen mühsam sich hindurch arbeiten zu müssen. Leicht ist freilich das Studium der Variationsrechnung auch

an der Hand des Kneser'schen Werkes nicht; dazu sind die feineren Untersuchungen auf diesem Gebiete zu schwierig, und hierin liegt es zum Teil wohl begründet, dass sich die Darlegungen des vorliegenden Werkes nicht stets leicht lesen. Zum anderen Teile bereitet die grosse Allgemeinheit, in welcher die Theorie sofort vorgetragen wird, einem Anfänger jedenfalls nicht geringe Schwierigkeiten und thut der Verwendbarkeit des Werkes als Lehrbuch entschieden Abbruch. Jedem mit den Anfangsgründen der Variationsrechnung vertrauten Leser kann aber das Studium des Kneser'schen Werkes nur empfohlen werden, da es die aufgewandte Mühe des Lesers reichlich dadurch lohnt, dass es ihn auf die Höhe der modernen Forschung führt.

Der Inhalt des Werkes zerfällt in acht Abschnitte, von denen der erste (S. 1-19) die Begriffe und Grundregeln der Variationsrechnung auseinandersetzt. Der zweite Abschnitt (S. 20-42) behandelt die einfachste der Variationsrechnung zugängliche Extremumsaufgabe und leitet demgemäss die notwendigen Bedingungen dafür ab, dass das Integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

wo $y' = dy/dx$ ist, einen extremen Wert hat. In diesem Abschnitte führt Kneser zwei neue, recht glücklich gewählte Bezeichnungen ein. Extremalen des Integrales I nennt er diejenigen Curven, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genügen. Wenn der extreme Wert von I an die Bedingung geknüpft ist, dass der Endpunkt der Extremale auf einer gegebenen Curve liegt, so wird die Lage der Extremale als transversal zu der gegebenen Curve bezeichnet.

In dem dritten Abschnitte (S. 43-116), welcher von allen Abschnitten seiner Bedeutung entsprechend den grössten Raum einnimmt, werden die hinreichenden Bedingungen dafür, dass I einen extremen Wert annimmt, entwickelt. Auch in diesem Abschnitte findet der Leser eine Reihe neuer Ausdrücke eingeführt.

Der vierte Abschnitt (S. 117-170) behandelt das einfachste relative Maximum: I soll einen extremen Wert annehmen, wenn gleichzeitig ein anderes Integral derselben Form K einen vorgeschriebenen Wert hat.

Während in den bisherigen Abschnitten die Curven, welche einen extremen Wert liefern sollen, als stetig gekrümmt vorausgesetzt wurden, werden im fünften Abschnitte (S. 171-192) auch mit Singularitäten, z. B. mit Ecken behaftete Curven zugelassen; ein Gebiet, auf welchem besonders Steiner, Weierstrass und Mayer gearbeitet haben.

Der sechste Abschnitt (S. 193-226) untersucht das Extremum von Integralen, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen höhere Ableitungen der Unbekannten enthält.

Im siebenten Abschnitte (S. 227-262) wird die Aufgabe der Variationsrechnung dahin erweitert, dass an Stelle des expliciten Integrales das Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen tritt: Die unbekannten Functionen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ von x, welche den $r+1$ Gleichungen:

$$\psi_\alpha\left(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, \frac{dy_0}{dx}, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right)=0 \ (\alpha=0, 1, 2, \ldots, r)$$

unterworfen sind, und deren Werte für $x=x_0$ sämtlich, für $x=x_1$ nur teilweise gegeben sind, sollen so bestimmt werden, dass der Wert von y_0 für $x=x_1$ ein Extremum wird.

In dem letzten Abschnitte endlich (S. 263-306) wird das Extremum von Doppelintegralen untersucht. Zur Erläuterung der Theorie dienen fünfzehn, meist klassische Aufgaben; ein besonderes Verzeichnis giebt die einzelnen Paragraphen an, in denen jede derselben behandelt ist.

Auf ausführliche historische Angaben und die Erörterung von Prioritätsfragen wird in diesem Werke nicht eingegangen, da einerseits die bekannten Werke von Todhunter und Pascal, sowie andrerseits der Artikel über Variationsrechnung für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften dies überflüssig erscheinen liessen. In das am Schlusse des Buches befindliche Litteraturverzeichnis sind nur diejenigen Arbeiten aufgenommen, welche den Leser über den Rahmen des Buches hinaus sachlich zu informiren geeignet sind. Hau.

A. Sommerfeld. Bemerkungen zur Variationsrechnung. Deutsche Math. Ver. 8_1, 188-193.

Für das von Jacobi in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen" ohne Beweis aufgestellte Kriterium, welches notwendig erfüllt sein muss, wenn ein Maximum oder Minimum eintreten soll, hatte Weierstrass in seinen Vorlesungen den ersten Beweis gegeben, indem er sich dabei auf das einfachste Variationsproblem beschränkte. Diesen Beweis hat dann H. A. Schwarz in einer seiner Vorlesungen noch erheblich vereinfacht. Aber auch in allen höheren Fällen liefert das entsprechend ausgestaltete Schwarz'sche Verfahren einen einfachen und strengen Beweis des (sinngemäss erweiterten) Jacobi'schen Kriteriums, was der Verf. für den Fall eines Doppelintegrals

$$I=\iint F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

näher ausführt. Hier bedeutet F eine analytische Function ihrer Veränderlichen, z die Unbekannte, p und q die Ableitungen von z nach x und y, und die Integration soll über irgend ein Gebiet G in der xy-Ebene erstreckt werden.

Das Jacobi'sche Kriterium lässt sich dann folgendermasssen formuliren: Für das Zustandekommen eines Extremwertes von I ist es not-

wendig, dass es keine Lösung u der Differentialgleichung $L(u) = 0$ gebe, welche in einem ganz im Innern von G gelegenen Gebiete g nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und im allgemeinen von Null verschieden ist, und welche auf der Begrenzung C derselben verschwindet. Hierbei ist:

$$L(u) = A_{00} - \frac{\partial A_{01}}{\partial x} - \frac{\partial A_{02}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$A_{00} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\ A_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2},\ A_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2},\ A_{01} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial p},$$
$$A_{02} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial q},\ A_{12} = A_{21} = \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}.$$

Der Beweis für die Notwendigkeit des obigen Kriteriums wird vollständig für den Fall erbracht, dass die Curve C nicht eine parabolische Curve für die Differentialgleichung $L = 0$ ist. Hau.

P. Duhem. Sur un point du calcul des variations. Toulouse Ann. (2) **2,** 115-136.

Die meisten statischen oder dynamischen Probleme, welche sich auf continuirliche Mittel beziehen, lassen sich mit Hülfe des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten, des d'Alembert'schen oder des Hamilton'schen Principes auf eine Aufgabe der folgenden Art zurückführen:

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass die Variation einer gewissen Function oder eines gewissen Integrales stets Null wird, wenn die dem System auferlegten Variationen die erste Variation gewisser anderer Functionen oder gewisser anderer Integrale zum Verschwinden bringen.

Um diese Aufgabe auf eine andere derselben Art, in welcher aber die dem System auferlegten Variationen keiner Bedingung unterworfen sind, zu reduciren, führt man bekanntlich constante oder veränderliche Hülfsunbekannte ein, deren Existenz man a priori zugiebt, und zeigt dann, dass man für die analytische Formulirung der Aufgabe die nötige Anzahl von Bedingungsgleichungen erhält, um diese Hülfsunbekannten zu bestimmen.

Die Schlussfolge, auf welcher diese fortwährend und ohne Bedenken angewandte Methode beruht, scheint jedoch im allgemeinen nicht die von der heutigen Mathematik geforderte Strenge zu besitzen. Nur wenn verlangt wird, dass die Variationen, welche die erste Variation eines gewissen Integrals zu Null machen, auch die erste Variation eines zweiten

Integrales zum Verschwinden bringen sollen, ist die Annahme der Existenz der unbestimmten Hülfsgrössen, welche man zur Lösung der Aufgabe benutzt, durch ein ebenso strenges als elegantes Schlussverfahren gerechtfertigt.

Dieses Schlussverfahren wird nun in der vorliegenden Abhandlung so erweitert, dass es für den dreidimensionalen Raum auf das ganz allgemeine Problem andwendbar ist und die Annahme der Existenz der in die Lösung eingeführten Hülfsgrössen völlig streng gerechtfertigt wird.

Hau.

E. P. Culverwell. On the conditions for maximum and minimum solutions in the calculus of variations when certain fluxions of the variables have finite and arbitrary variations. Dublin Proc. (3) **5**, 377-391 (1899).

Ch. J. Joly. Some applications of Hamilton's operator ∇ in the calculus of variations. Dublin Proc. (3) **5**, 666 (1899).

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

S. PINCHERLE. Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche tenute nella R. Università di Bologna, raccolte per cura del Dr. A. Bottari. Bologna: Sauer e Barigazzi. 1899-1900. XVIII u. 566 S. 4° (lith.).

Es möge hier das Inhaltsverzeichnis dieser reichhaltigen Vorlesungen kurz wiedergegeben werden:

Einleitung. 1. Die complexe Veränderliche. 2. Résumé der Eigenschaften einiger elementaren Functionen. 3. Potenzreihen. 4. Methode der unbestimmten Coefficienten; recurrirende Reihen. 5. Die Taylor'sche Reihe. 6. Analytische Functionen; die Cauchy'sche Theorie. 7. Anwendungen des Cauchy'schen Satzes. 8. Allgemeine Sätze über analytische Functionen. 9. Ganze transcendente Functionen. 10. Der Mittag-Leffler'sche Satz und die Functionen mit beschränktem Existenzbereiche. 11. Darstellung analytischer Functionen durch bestimmte Integrale. 12. Einige besondere Functionen. 13. Algebraische Functionen. 14. Die Puiseux'sche Methode. 15. Theorie der Cyklen. 16. Riemann'sche Flächen. 17.-18. Abel'sche Integrale. 19. Der Abel'sche Satz. 20. Elliptische Integrale. 21. Elliptische Functionen. 22. Construction der elliptischen Functionen nach Weierstrass. 23. Die Jacobi'schen Functionen. 24. Einiges über Multiplication, Teilung und Transformation der elliptischen Functionen; Anwendung der elliptischen Functionen auf die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Vi.

J. PUZYNA. Theorie der analytischen Functionen. II. Band. Lemberg. 673 S. 8°. (Polnisch.)

Der zweite Band dieses Lehrbuches (s. F. d. M. **29**, 329, 1898) besteht aus acht Teilen. Nachdem in dem letzten Teile des ersten Bandes die Erklärung des Begriffes einer analytischen Function und die Einteilung solcher Functionen gegeben worden sind, werden hier zunächst im ersten Teile dieses Bandes die elementaren Functionen und die ganzen transcendenten Functionen ohne Nullstellen behandelt. Der zweite Teil ist den einwertigen Functionen mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Nullstellen, der dritte den algebraischen Functionen einer Variable gewidmet. Im vierten Teile behandelt der Verf. die rationalen Functionen $R(x, y)$ der Stelle (x, y), und die Weierstrass'schen Functionen $H(x, y)_a$, $H'(x, y)_a$, $H(x, y, x', y')$. Der fünfte Teil enthält die wichtigsten Sätze aus der Analysis situs und über die Riemann'sche Fläche, der sechste die Principien der Cauchy'schen Theorie der Integrale, die Theorie der Abel'schen Integrale und der elliptischen Functionen. Der siebente Teil behandelt die Theorie der harmonischen Functionen, der achte die Schwarz'sche Ableitung und die Functionen des Dreiecks. Jeder Abschnitt enthält mehrere Beispiele und Uebungen. Dz.

A. R. FORSYTH. Theory of functions of a complex variable. Second edition. Cambridge: University Press. XXIV + 782 S.

In der zweiten Auflage (vergl. die Anzeige der ersten in F. d. M., **25**, 652, 1893) sind an hauptsächlichsten Aenderungen zu bemerken: Verbesserungen in der Darlegung des Schwarz'schen Beweises für das Existenztheorem, jedoch unter Beibehaltung der allgemeinen Gesichtspunkte. Neue Abschnitte über birationale Transformation algebraischer Gleichungen und Curven, sowie die Riemann'schen Oberflächen. Ein Beweis des Abel'schen Theorems nebst Erläuterungen. Auslassung einiger Abschnitte, in denen die Eigenschaften gewisser binomischen Differentialgleichungen erster Ordnung erörtert wurden (in die „Theory of differential equations“ eingefügt). Das Werk ist einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen, so dass manche geringfügige Versehen, die sich in die erste Auflage eingeschlichen hatten, getilgt sind. Gbs. (Lp.)

E. BOREL. Leçons sur les fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars: VI + 124 S. gr. 8°.

Das kleine Werkchen, bereits das zweite in einer ganzen Reihe von Büchlein, die Verf. über die Functionentheorie zu veröffentlichen gedenkt, ist eine dankenswerte Monographie über die ganzen Functionen. Ohne grosse Vorkenntnisse zu verlangen (es ist nach Vorlesungen redigirt worden, die Verf. 1897-98 vor Schülern des zweiten Jahres an der École Normale gehalten hat, und setzt daher aus der Functionentheorie ungefähr das voraus, was im „Cours“ von Hermite steht), bringt es infolge der weisen Beschränkung des Stoffes auf verhältnismässig kleinem Raume in elementarer genetischer Entwickelung wenigstens in grossen

Zügen fast alles, was auf diesem Gebiete bisher geleistet worden ist; es zeigt so an dem besonderen Beispiele der ganzen Functionen die Art der mathematischen Forschungsmethode und die Form, in welche sich die noch zu lösenden Probleme bringen lassen.

Im ersten Kapitel wird nach einigen allgemeinen Auseinandersetzungen über die ganzen Functionen das grundlegende Theorem von Weierstrass über die Zerlegung der ganzen Functionen in Primfactoren hergeleitet. Das zweite Kapitel behandelt die Leistungen von Laguerre, insbesondere den von ihm eingeführten Begriff des Geschlechtes, auf dem fast alle späteren Arbeiten auf diesem Gebiete basiren. Im dritten Kapitel werden die wichtigen von Poincaré gefundenen Ungleichungen entwickelt, im vierten die beiden fundamentalen Theoreme von Hadamard, bei Beschränkung auf ein endliches Geschlecht, nach Schou bewiesen und auf die Productdarstellung von $\sin z$ sowie auf die Riemann'schen Functionen $\zeta(s)$, bez. $\xi(t)$ angewandt. Im fünften Kapitel endlich wird ein bekannter Satz von Picard, wieder mit Beschränkung auf ein endliches Geschlecht, in der folgenden, von Hadamard erweiterten Form bewiesen: „Ist $F(z)$ eine ganze Function von endlichem Geschlecht, und besitzen die beiden Gleichungen

$$F(z) = P(z),\ F(z) = Q(z)$$

($P(z)$ und $Q(z)$ zwei verschiedene Polynome) eine begrenzte Anzahl von Wurzeln, so reducirt sich $F(z)$ auf ein Polynom; dieses Kapitel enthält noch andere Erweiterungen des Picard'schen Satzes und eine Anwendung desselben auf die Bestimmung der Verteilungsart der Wurzeln der Gleichung $F(z) = a$. Von dem Picard'schen Satze (ohne jene Beschränkung) findet sich bereits im ersten Kapitel ein der Theorie der Modulfunctionen entnommener Beweis; eine erste Anhangsnote giebt einen allgemeinen Beweis dieses Satzes, der von jener Theorie unabhängig ist. Eine zweite und dritte Note handeln über Functionen mit regelmässigem, bez. unregelmässigem Wachstum. — Aus dieser kurzen Inhaltsangabe geht hervor, dass das kleine Büchlein gleichzeitig eine Geschichte der Theorie der ganzen Functionen darstellt. Wbg.

R. Fricke. Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Leipzig: B. G. Teubner. IX + 520 S. gr. 8°.

Die Herausgabe der vorliegenden Vorlesungen entsprang zunächst dem Wunsche des Verf., ein deutsches Lehrbuch zu schaffen, welches, ähnlich den verschiedenen französischen „Traités de calcul", zur Einführung in diejenigen mittleren Gebiete dienen könnte, die sich unmittelbar an die Differential- und Integralrechnung anschliessen und erst in neuerer Zeit auch in deutschen Lehrbüchern Berücksichtigung zu finden beginnen, während an Büchern über die Elemente und an Specialwerken über die verschiedensten Gebiete der höheren Mathematik kein

Mangel ist. Ferner wünschte Verf., als Lehrer an einer technischen Hochschule, den daselbst Studirenden Gelegenheit zu einer weitergehenden Ausbildung in der Mathematik zu geben, insbesondere ihnen diejenigen mathematischen Disciplinen zu übermitteln, die zu einem tieferen Verständnis der Mechanik erforderlich sind und die zur Zeit eine regelmässige Pflege an technischen Hochschulen nicht finden. — Im ersten Kapitel behandelt Verf. die Fourier'schen Reihen und ihre physikalischen Anwendungen, desgl. im zweiten die Kugel- und Cylinderfunctionen, im dritten die Functionen einer complexen Variable (u. a. Lineare Functionen und Kreisverwandtschaften. Stereographische Projection der z-Ebene auf eine Kugeloberfläche. Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit in einer Ebene. Sätze von Green und Cauchy. Princip der analytischen Fortsetzung. Natur der irregulären Punkte. Laurent'sche Reihe. Productdarstellung ganzer transcendenter Functionen. Γ-Function. Riemann'sche Fläche.) Im vierten Kapitel werden die elliptischen Functionen behandelt, und zwar unter Voranstellung der Weierstrass'schen Functionen, denen erst in der zweiten Hälfte des Kapitels Jacobi's Functionen angereiht werden. Hieran schliessen sich im fünften Kapitel die Anwendungen der elliptischen Functionen (Poncelet'sche Polygone. Sphärische Trigonometrie und elliptische Functionen. Geodätische Linien auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid. Confocale Flächen zweiter Ordnung und elliptische Coordinaten. Anwendung auf die Wärmetheorie. Sphärisches Pendel. Drehung eines starren Körpers um einen Punkt). Das sechste Kapitel enthält die linearen Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen, insbesondere auch die hypergeometrische Differentialgleichung und die Abbildung der zum Integralquotienten $\eta(z)$ gehörenden Riemann'schen Fläche auf ein Netz von Kreisbogendreiecken. Im siebenten Kapitel endlich behandelt Verf. die Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren Variabeln, und zwar einerseits Systeme simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen, andererseits partielle Differentialgleichungen; den Schluss bilden das Theorem von Poisson und die Differentialgleichungen der Dynamik.

Das Buch ist klar und verständlich geschrieben; besonderes Gewicht hat Verf. auf die geometrische Veranschaulichung und auf die Anwendungen gelegt. Die Beweisführung ermangelt zuweilen der nötigen Strenge. Den einzelnen Disciplinen ist stets eine kurze historische Uebersicht vorangestellt, und es sind eine Anzahl von Uebungsaufgaben sowie reichliche Litteraturnachweise zu weiterer Orientirung vorhanden. Recht nützlich sind die Tafeln der Kugelfunctionen und der elliptischen Functionen, die Verf. den Werken von Byerly und L. Lévy entlehnt hat. — Das vom Teubner'schen Verlage opulent ausgestattete Buch kann den Studirenden der Mathematik und der technischen Wissenschaften zum Studium empfohlen werden. Wbg.

C. Arzelà. Sulle serie di funzioni. Bologna Mem. (5) **8**, 131-186, 701-744.

Diese Abhandlung ist teils eine Zusammenfassung, teils auch eine Vervollständigung des Inhaltes von früheren Arbeiten des Verfassers, die hier angeführt werden mögen:

Un' osservazione intorno alle serie di funzioni. Bologna Rend. 1882-83, 142-159.

Intorno alle continuità della somma di infinite funzioni continue. Bologna Rend. 1883-84, 79-84.

Un teorema intorno alle serie di funzioni. Rom. Acc. L. Rend (4) **1**, 262-267. [F. d. M. **17**, 407, 1885.]

Sull' integrabilità di una serie di funzioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) **1**, 321-326. [F. d. M. **17**, 256, 1885.]

Sulla integrazione per serie. Rom. Acc. L. Rend. (4) **1**, 532-537, 566-569. [F. d. M. **17**, 256, 1885.]

Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche. Rom. Acc. L. Rend (4) **1**, 637-640. [F. d. M. **17**, 223, 1885.]

Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili. Bologna Rend. 1888-89, 16-22. [F. d. M. **21**, 272, 1889.]

Sulle funzioni di linee. Bologna Mem. (5) **5**, 225-244. F. d. M. **26**, 454, 1895.]

Sull' integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie. Bologna Mem. (5) **5**, 257-270. [F. d. M. **26**, 342, 1895.]

Sull' esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie. Bologna Mem. (5) **6**, 131-140. [F. d. M. **27**, 238, 1896.]

Sull' integrazione per serie. Rom. Acc. L. Rend. (5) **6**$_2$, 290-292. [F. d. M. **28**, 252, 1897.]

Es wird daher genügen, auf die behandelten Gegenstände ganz kurz hinzuweisen; es sind folgende:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Summe einer unendlichen Reihe von stetigen Functionen eine stetige Function ist. — Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$ eine für $n=\infty$ und für jeden in einem gegebenen Intervalle liegenden Wert von x stetige Function von n und x ist. — Gleichartig stetige Functionen. — Grenzfunction einer Functionenfolge. — Notwendige und hinreichende Bedingung für die gliedweise Integrirbarkeit, bezw. Derivirbarkeit einer Reihe von Functionen. — Notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit, bezw. Derivirbarkeit eines von einem Parameter abhängigen bestimmten Integrals. Vi.

C. Arzelà. Sulle serie di funzioni. Bologna Rend. **4**, 123-124.

A. De Stefano. Sopra alcuni punti della teoria delle funzioni di variabili reali. Batt. G. **38**, 178-209.

Zuerst giebt der Verfasser eine von der Volterra'schen (siehe: V. Volterra: Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. Batt. G. **19**, 76-86; F. d. M. **13**, 339, 1881) verschiedene Methode zur Construction einer nirgends dichten perfecten linearen Punktmenge von nicht verschwindendem Inhalte. Ist dann in einem Intervalle $(a\,b)$ eine solche Menge S vorhanden, so ist eine in $(a\,b)$ stetige, streckenweise constante Function $\varphi(x)$ durch die Formel $\varphi(x) = x - a - F(x)$ gegeben, wo $F(x)$ die Summe derjenigen Teilstrecken von $(a\,x)$ bezeichnet, die keinen Punkt von S enthalten.

Aus jeder stetigen, streckenweise constanten Function entsteht eine nicht oscillirende (monotone), mit einer überall dichten Menge von Unstetigkeitspunkten behaftete Function, oder auch eine total oscillirende stetige Function, und umgekehrt.

Die Theorie der nirgends dichten Mengen hängt auch mit Integrirbarkeitsfragen zusammen. Auf Grund derselben stellt der Verfasser die, freilich schon bekannte (A. Schoenflies: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Deutsche Math. Ver. **8**$_2$, 1-250; Bericht auf S. 70 dieses Bandes; vgl. insbesondere S. 182-183 und 180), notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass eine Function ein überall verschwindendes Integral besitzt, oder dass eine Function überhaupt integrirbar ist. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine punktweise unstetige Function nicht integrirbar ist, besteht darin, dass die Menge der Stellen, in welchen Sprünge stattfinden, die grösser als eine beliebig kleine Grösse sind, nirgends dicht und von nicht verschwindendem Inhalt ist. Endlich bildet der Verfasser eine in keinem Intervalle integrirbare punktweise unstetige Function. Vi.

G. Kowalewski. Einige Bemerkungen zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. Leipz. Ber. **52**, 214-219.

Die kurze Note enthält einen Beweis des Rolle'schen Satzes über die Wurzeln der Derivirten $f'(x) = 0$, welche zwischen zwei Wurzeln α und β der Gleichung $f(x) = 0$ gelegen sind; ferner einen Beweis des Mittelwertsatzes und einen Beweis des Satzes, dass die Ableitung einer stetigen Function, wie jede stetige Function, die Eigenschaft hat, beim Uebergang von einem Werte zu einem andern jeden zwischenliegenden Wert anzunehmen. Es ist die Absicht des Verf., die Beweise so zu formuliren, dass damit zugleich eine Construction der betreffenden Nullstelle, bezw. des entsprechenden Wertes $f'(x)$ gegeben ist. Sr.

E. B. Christoffel. Ueber die Vollwertigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke. Math. Ann. **53**, 465-492.

Diese Arbeit ist die letzte, welche der nun verewigte Verf. noch abgeschlossen und der Veröffentlichung übergeben hat. Sie behandelt das

Problem der Stetigkeit analytischer Ausdrücke unter einem neuen Gesichtspunkte und bringt zur Klärung dieses viel behandelten Begriffes einen wertvollen Beitrag. Der Regel nach wird eine Function

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

in einem Punkte als continuirlich bezeichnet, wenn ihre Schwankungen in einem angebbaren, jenen Punkt umfassenden Gebiete von beliebig vorgeschriebener Kleinheit sind. Diese Definition setzt aber bereits voraus, dass die Function in allen Punkten des Gebietes einen bestimmten Wert annimmt, während doch die Coordinaten eines Punktes gewöhnlich solche Zahlen sind, welche der numerischen Rechnung nicht unmittelbar, sondern erst durch eine Folge von Annäherungswerten mit stufenweise und unbegrenzt steigender Genauigkeit zugänglich sind. Es setzt also die eindeutige Bestimmtheit der Function $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für ein numerisch nicht unmittelbar verwendbares Wertsystem voraus, dass die verschiedenen Processe der Annäherung zu demselben Endergebnisse der Rechnung führen; aber selbst wenn das Wertsystem numerisch verwendbar ist, so kann es ebenfalls durch eine Folge von Annäherungswerten ersetzt und sodann die Frage gestellt werden, ob sich bei jedem dieser Annäherungsprocesse derselbe Functionswert wie durch directes Einsetzen ergiebt. Unter diesem Gesichtspunkte untersucht der Verf. sowohl endliche als unendliche analytische Ausdrücke und nennt dieselben vollwertig, sobald sie in jedem Punkte $(x^{(0)})$ eines Grössengebietes E einen völlig bestimmten Wert besitzen und dieser Wert sich aus den Nachbarwerten von f durch das „erste Hauptverfahren", d. h. durch Einsetzen einer unendlichen Folge numerisch verwendbarer Annäherungswerte von unbegrenzt steigender Genauigkeit ergiebt. Als notwendige und hinreichende Bedingung findet er bei endlichen Ausdrücken die Stetigkeit in dem Gebiete ΔE, welches durch die Ungleichungen

$$x_\mu^{(0)} - \alpha_\mu < x_\mu < x_\mu^{(0)} + \beta_\mu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots, n \\ \alpha_\mu, \beta_\mu \geqq 0 \end{pmatrix}$$

charakterisirt ist, während bei unendlichen Ausdrücken die Bedingung der gleichmässigen Convergenz in dem Schwankungsgebiete ΔE hinzutritt. Hierbei ist die Stetigkeit im wesentlichen so wie üblich, aber unter Beschränkung auf die numerisch verwendbaren Werte definirt. Auch für die Umformungen analytischer Ausdrücke durch einwandsfreie Rechnungen ist ihre Vollwertigkeit Voraussetzung, wenn nicht auf die numerische Verwendbarkeit der Analysis verzichtet werden soll. Das Hauptresultat der Abhandlung lässt sich nach Meinung des Referenten auch dahin aussprechen, dass bei Zulassung aller möglichen Zahlenwerte für die Variabeln zufolge der Bedingungen, unter welchen eine Zahlenrechnung möglich ist, überhaupt nur stetige Functionen einen Sinn haben, die Stetigkeit also eine Bedingung nicht bloss für die Ununterbrochenheit der Functionswerte, sondern für die Existenz der Function selbst ist; für Functionen, die durchaus unstetig sind, muss das Zahlenreich, auf welches die Variabeln zu beschränken sind, in jedem einzelnen Falle besonders festgestellt werden.

Lsg.

E. GOURSAT. Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy. American M. S. Trans. **1**, 14-16.

Verf. zeigt, dass das Cauchy'sche Theorem nur die Stetigkeit der Function und die Existenz ihrer Ableitung, nicht aber die Stetigkeit der Ableitung erfordert. Wbg.

H. MOORE. A simple proof of the fundamental Cauchy-Goursat theorem. American M. S. Trans. **1**, 499-506.

In zwei Noten (Acta Math. **4**, 197-200; F. d. M. **16**, 236, 1884; vergl. das vorangehende Referat) hat Goursat den Cauchy'schen Integralsatz $\int_C f(z)\,dz = 0$ bewiesen, ohne die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ in dem von der Curve C umschlossenen Gebiete vorauszusetzen. Der zweite Beweis stützt sich auf ein gewisses Lemma, an das inzwischen Pringsheim [American M.S. Trans. **2**, 413-421] ausführliche Bemerkungen geknüpft hat.

Während Goursat das in Rede stehende Integral durch ein directes Verfahren auswertet, zeigt Moore in dem vorliegenden Aufsatze durch ein indirectes Verfahren, dessen wesentliche Elemente in Goursat's erster Arbeit enthalten sind, dass das Integral für alle „gewöhnlichen“ Curven den Wert Null hat; er vermeidet also die Benutzung des erwähnten Lemmas. Gz.

A. KÖPCKE. Ein Satz über Functionen mit Oscillationen in jedem Intervall. Hamb. Mitt. **3**, 376-379 (1899).

„Eine Function mit Oscillationen in jedem Intervall nimmt in jedem Intervall mindestens einen Wert unendlich oft an“ (vergl. Math. Ann. **29**, 123-140; F. d. M. **19**, 371, 1887). Lp.

S. PINCHERLE. Sulla continuità delle funzioni. Bologna Rend. (2) **4**, 99-101.

E. Steinitz (Stetigkeit und Differentialquotient. Math. Ann. **52**, 58-69; F. d. M. **30**, 265, 1899) hat bemerkt, dass eine stetige Function, welche für alle Punkte einer in einem Intervalle überalldichten Menge gegeben ist, im ganzen Intervall bestimmt ist. Hierauf erinnert Pincherle daran, dass er diesen Satz seit 1893 ausgesprochen hatte (Sull' interpolazione. Bologna Mem. (5) **3**, 293-318; F. d. M. **25**, 399, 1893-94). Es ist aber zu beachten, dass der Satz, wenigstens für reelle Functionen, schon von E. Heine (Die Elemente der Functionenlehre. J. für Math. **74**, 172-188; F. d. M. **4**, 187, 1872) gegeben worden ist; vgl. A. Schoenflies: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Deutsche Math. Ver. $\mathbf{8}_2$, 1-250; Bericht S. 70 dieses Bandes), S. 119. Vi.

S. Pincherle. Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica. Annali di Mat. (3) 4, 219-280.

Die umfangreiche Arbeit bildet einen Beitrag zur Untersuchung der Abhängigkeit einer durch ein Functionenelement

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

definirten analytischen Function $f(x)$, der sogenannten „erzeugenden" Function, von der durch die Coefficientenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ gebildeten (aber dadurch noch nicht vollständig definirten) „determinirenden" Function $a(t)$, welche für $t = 0, 1, 2, \cdots$ die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ liefert. Und zwar richtet Verf. sein Augenmerk auf die Singularitäten von $f(x)$, deren Zahl, Lage und Beschaffenheit von der Coefficientenfolge, d. h. von der determinirenden Function $a(t)$ abhängt.

Um die Abhängigkeit der erzeugenden und der determinirenden Function zu studiren, untersucht Verf. gewisse distributive Operationen, welche geeignet sind, der erzeugenden Function Singularitäten bestimmter Art hinzuzufügen oder zu entziehen; infolge dieser Operationen erfährt auch die determinirende Function Veränderungen der Art, dass man daraus die Natur der eingeführten oder beseitigten Singularität erkennen kann, und umgekehrt. Von den drei Kapiteln der Arbeit sind die beiden ersten besonderen Untersuchungen über die distributiven Operationen gewidmet, während das dritte und letzte den eigentlichen Gegenstand der Arbeit behandelt. Verf. leitet hier zunächst bekannte Sätze von Hadamard, Darboux u. s. w. in seiner Weise (mit dem Operationscalcul) her und giebt dann weitere Untersuchungen sowie Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen, über welche sich nicht in Kürze referiren lässt.

Gz.

R. Baire. Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues. S. M. F. Bull. 28, 173-179.

Verf. hatte in seiner Dissertation [Annali di Mat. (3) 3, 1-123; F. d. M. 30, 359-360, 1899] den wichtigen Satz bewiesen: Damit eine Function einer Variable durch eine Reihe stetiger Functionen dargestellt werden könne, ist notwendig und hinreichend, dass die Function in jeder perfecten Menge punktirt unstetig sei. Dieser Satz war durch ein besonderes Verfahren von Lebesgue [C. R. 128, 811-813; F. d. M. 30, 380, 1899] auf Functionen mehrerer Variablen ausgedehnt worden. In vorliegender Abhandlung giebt Baire einen neuen, kürzeren und mehr synthetischen Beweis dieses Satzes, der sich ausserdem direct auf den Fall mehrerer Variablen anwenden lässt. Gz.

G. Vitali. Sui limiti per $n = \infty$ delle derivate n^{me} delle funzioni analitiche. Palermo Rend. 14, 209-216.

Eine analytische Function, deren n-te Ableitung für $\lim n = \infty$

einen endlichen Grenzwert hat, ist eine ganze Function, und der Grenzwert ihrer n-ten Ableitung ist ae^z, wo a eine Constante bezeichnet.

Sind p Functionen $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_p(z)$ von der angegebenen Beschaffenheit vorhanden, und ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^n u_r(z)}{dz^n} = a_r e^z \qquad (r = 1, 2, \ldots, p),$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_p$ constante Grössen bezeichnen, so stellt:

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_p(z) = U(z)$$

eine Function von derselben Beschaffenheit dar, und es ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^n U(z)}{dz^n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p) e^z.$$

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_p$ solche Functionen, dass ihre n-ten Ableitungen in Bezug auf $h_1 z, h_2 z, \ldots, h_p z$ (wo $h_1, h_2, \ldots, h_p$ complexe Constanten bezeichnen) für $\lim n = \infty$ endliche Grenzwerte besitzen, so gilt dasselbe von dem Producte $v_1 v_2 \ldots v_p$, sobald die Argumente von $h_1, h_2, \ldots, h_p$ sämtlich gleich sind; im entgegengesetzten Falle findet dies nicht immer statt. Vi.

L. Fejér. Sur les fonctions bornées et intégrables. C. R. **131**, 984-987.

Wenn die Function $f(x)$ in dem Intervall $(0 \ldots 2\pi)$, die Grenzen eingeschlossen, integrabel ist und ihre Werte in endlichen Schranken liegen, so kann die zugehörige Fourier'sche Reihe divergent sein. Bezeichnet man aber die Summe ihrer ersten n Glieder mit s_{n-1}, so existirt

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

für alle diejenigen Punkte x, in deren Nähe $f(x)$ links und rechts stetig ist, wobei aber $f(x+0)$ nicht gleich $f(x-0)$ zu sein braucht, und der Grenzwert ist gleich $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Hieraus folgt, dass eine Function der betrachteten Art sich in eine Reihe

$$\Sigma f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

entwickeln lässt, deren allgemeines Glied eine endliche Fourier'sche Reihe ist; diese Reihe convergirt gleichmässig im Innern eines jeden Intervalles, in dem $f(x)$ unbedingt stetig (also $f(x+0) = f(x-0)$) ist. Man vergleiche hierzu eine Note von Picard, über die in F. d. M. **23**, 412, 1891, berichtet worden ist. St.

M. Lerch. Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques. Torino Atti **35**, 54-59.

Wenn die Grössen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ so beschaffen sind, dass die Summe $C_\nu = c_1 + c_2 + \cdots + c_\nu$ die m endlichen, bestimmten Grenzwerte:

$$\lim_{\mu=\infty} C_{\varrho+m\mu} = A_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

ergeben, und die Differenzen $C_{\varrho+m\mu} - A_\varrho = B_{\varrho+m\mu}$ der Bedingung genügen, dass die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

in einem Intervall $(x_0 \ldots x_1)$ gleichmässig convergirt, das ganz innerhalb des Intervalles $(0 \ldots 1)$ liegt, so hat für diejenigen Werte x des Intervalles $(x_0 \ldots x_1)$, für die mx keine ganze Zahl ist, die Ableitung der Function

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i}$$

zum Wert den Ausdruck:

$$f'(x) = \frac{\sin x\pi}{\sin m x\pi} \cdot 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho e^{(2\varrho+1-m)x\pi i}$$
$$+ 4\pi \sin x\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{(2\nu+1)x\pi i}.$$

St.

M. Lerch. Ueber eine neue Gattung analytischer Ausdrücke. Rozpravy **9**, No. 6, 17 S. (Böhmisch).

Die Arbeit steht im engen Zusammenhange mit derjenigen, welche in Acta Math. **22** erschienen ist (F. d. Math. **30**, 400, 1899). Dort wird eine Function betrachtet, die durch ein bestimmtes Integral definirt ist und in naher Beziehung zum Periodenparallelogramm $(1, \sigma)$ der elliptischen Functionen steht. Die vorliegende Arbeit stellt sich die Frage, wie sich gewisse Ausdrücke der ersteren Abhandlung modificiren, wenn man das complexe Periodenverhältnis σ ins Reelle übergehen lässt. Man kommt so auf Ausdrücke merkwürdiger Structur. Das Resultat ist dieses: Bedeuten σ und w reelle Grössen, und zwar $0 < w < 1, \sigma > 1$, so wird der Ausdruck

$$\frac{\sigma w}{\pi^2} \sin\frac{\pi}{\sigma} \int_0^\infty \frac{\log x \, dx}{\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1 + x^\sigma)},$$

vermindert um $\frac{\log w}{\pi}$, durch einen Ausdruck vollständig neuer Art, ein sogenanntes „Reihenpaar“, dargestellt, nämlich

$$\Sigma \left(\frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi} + (-w)^m \frac{1}{\sigma} \cot\frac{m\pi}{\sigma} \right).$$

Ist hier σ eine algebraische Irrationalzahl, so convergirt jede der durch Summation der ersten und der zweiten Glieder entstehenden Reihen

$(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$, und in diesem Falle liefert unser Ausdruck nichts Neues. Für gewisse transcendente Werte von σ werden aber beide Reihen divergent; hier lassen sich jedoch die Zahlen m und n so in Paare gruppiren, dass sich die allzu gross werdenden Glieder gegenseitig herabdrücken und eine gut brauchbare Approximation gewonnen wird.

Für rationale σ hat das Reihenpaar zunächst keinen Sinn; aber man gelangt vermöge eines Grenzübergangs durch rationale Werte zu einem exacten Resultat. Lh.

M. Lerch. Bemerkung zur Functionenlehre. Rozpravy **9**, No. 8, 5 S. (Böhmisch.)

Es wird zunächst der Hülfssatz bewiesen, dass eine zu allen Graden gliedweise-differentiirbare trigonometrische Reihe

$$\sum\left(a_\nu \cos\frac{2\nu x\pi}{l} + b_\nu \sin\frac{2\nu x\pi}{l}\right),$$

wenn sie bloss für reelle Werte x convergirt, in jedem Intervalle $(x_0 \ldots x_0 + l)$ singuläre Stellen haben muss, falls sie eine analytische Function definirt.

Dieser Satz dient dann zur Construction von unbeschränkt differentiirbaren, nicht analytischen Functionen; der Ausdruck $\sum\cos(2a^n x\pi)/n!$, welchen der Verf. im J. für Math. **103** behandelte (F. d. M. **20**, 380, 1888), und dessen Einführung in der Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaft irrtümlich Pringsheim zugeschrieben ist, tritt hier als ein ganz specieller Fall auf. Lh.

M. Lerch. Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches analytischer Functionen. Rozpravy **9**, Nr. 9, 8 S. (Böhmisch.)

Erschien im wesentlichen auch in den Monatsheften. Lh.

I. Zignago. Estensione di due problemi di Cauchy. Rom. Acc. P. d. N. L. **58**, 139-149.

Im V. Capitel des Cours d'analyse behandelt Cauchy als die beiden ersten Aufgaben die Lösung der Functionalgleichungen

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

Diese Aufgaben werden in vorliegender Notiz zu folgendem Problem verallgemeinert: Es sei $\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$, $\varphi(x+y) = w$; die Function φ zu bestimmen, welche zwischen zwei beliebigen Grenzen von x stetig ist und für alle reellen Werte von x die Gleichung befriedigt:

$$w = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + a_2 u^{m-2} v^2 + \cdots + a_{m-1} u v^{m-1} + a_m v^m.$$

Antwort: Drei Fälle: $\varphi(x) = c$, $\varphi(x) = ax$, $\varphi(x) = \frac{1}{a} A^x$, wo bezw.

c, a, a und A willkürliche Constanten bedeuten, und zwar $c \neq 0$, $a < 0$. [In der Abhandlung wird unvermittelt f statt des ursprünglichen φ gebraucht, und später erscheint φ in neuer Bedeutung!] Gz.

D. N. SEILIGER. Ueber eine Functionalgleichung. Kasan Ges. (2) **9**, No. 2, 187-190. (Russisch.)

Lösung der Aufgabe: zwei Functionen zu bestimmen, welche die Gleichung $\varphi^2(y) - \varphi^2(x)\Theta(y-x) = \varphi(y+x)\cdot\varphi(y-x)$ befriedigen. Si.

J. PEXIDER. Eine Studie über die Functionalgleichungen. Časopis **29**, 153-195. (Böhmisch.)

Drei Aufgaben, betreffend die Bestimmung der Functionen, welche gewissen Bedingungen entsprechen. Vier Aufgaben, betreffend die Bestimmung der Integrale von Functionen, welche gewissen Bedingungen entsprechen. Sda.

J. ANDRADE. Sur l'équation fonctionnelle de Poisson. S. M. F. Bull. **28**, 58-64.

Verf. vervollständigt die analytische Behandlung der Poisson'schen Functionalgleichung $F(x+y) + F(x-y) = 2\,F(x)\,F(y)$ derart, dass nur die Stetigkeit von F, nicht aber die Existenz der ersten beiden Ableitungen dieser Function vorausgesetzt zu werden braucht. Wbg.

T. HAYASHI. On a functional equation treated by Abel. Tokio Math. Ges. **8**, 129-134.

Nach einer Bemerkung zu der von Stäckel gegebenen Ergänzung des Abel'schen Beweises für die Bestimmung aller Functionen, welche zugleich commutativ und associativ sind [Zeitschr. für Math. und Phys. **42**, 323-326; F. d. M. **28**, 353, 1897], erweitert Verf. das Abel'sche Ergebnis auf Functionen beliebig vieler Variablen. Gz.

J. J. ARISTOW. Ueber Iteration der Functionen. Kasan Ges. (2) **10**, No. 1, 15-49; No. 2, 85-131. (Russisch.)

Einfache und klare Darstellung der wichtigsten Resultate der Iterationstheorie. Am ausführlichsten sind die Untersuchungen von Koenigs, weniger die von Leau, Farkas, Grévy (K. II, III) besprochen. Im Kapitel II combinirt der Verf. die geometrische Interpretation der Iteration im Falle reeller Veränderlichen mit den analytischen Kriterien von Netto (Vorlesungen über Algebra I, 302 u. ff.). Kapitel IV behandelt die Methode von Korkine, Kapitel V die Anwendung der Iteration auf die Lösung

der Gleichung $x - \varphi(x) = 0$. (Vergl. den Bericht von A. Wassilieff, Kasan Univ.) Si.

E. Jaggi. Sur les substitutions uniformes et le problème de Babbage. Nouv. Ann. (3) **19**, 483-489.

Das Theorem von Leau, dass eine eindeutige Function $f_1(x)$, deren n-fache Iteration zur Einheit $f_n(x) = x$ führt, eine lineare Function von x ist, wird in der Art verallgemeinert, dass endliche oder unendliche Gruppen von ein- oder mehrdeutigen Substitutionen untersucht werden. So ergeben sich z. B. die Sätze: Eine endliche oder unendliche Gruppe von eindeutigen Substitutionen, welche aus einer begrenzten Anzahl von Fundamentalsubstitutionen hervorgehen, enthält nur lineare Substitutionen. Eine endliche Gruppe von Substitutionen enthält nur algebraische Substitutionen. Die Beweise dieser allgemeineren Sätze sind ebenso einfach wie die der specielleren. Lsg.

G. Mittag-Leffler. Ueber eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe. Gött. Nachr. 1900, 194-205.

G. Mittag-Leffler. On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series. Lond. M. S. Proc. **32**, 72-78.

G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Seconde et troisième note.) Acta Math. **24**, 183-244.

Da Mittag-Leffler den Inhalt der beiden ersten Abhandlungen in seine zweite Note aufgenommen hat, genügt es, über diese und die dritte zu berichten.

Nachdem an die Definition des Sternes A mit dem Mittelpunkte a erinnert worden ist, der später zum Unterschiede gegen andere, neu eingeführte Sterne den Namen eines „Hauptsterns" erhält, wird das Haupttheorem der ersten Note (F. d. M. **29**, 358-361, 1898; **30**, 364-366, 1899) mittels des Begriffes des Grenzausdruckes in folgende Fassung gebracht: Es sei

$$F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$$

eine Reihe von Constanten, die der Cauchy'schen Bedingung dafür genügen, dass

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

convergirt. Man bilde die Polynome:

$$G_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \times F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

Alsdann ist der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$$

gleichmässig convergent für jedes Gebiet im Innern des Sternes A, der in bekannter Weise durch die gegebenen Constanten eindeutig bestimmt ist, dagegen niemals gleichmässig convergent für ein Continuum, das eine Ecke von A enthält. Er definirt ferner im Innern von A den eindeutigen Zweig $FA(x)$ einer monogenen Function, die im Innern von A regulär ist, aber an den Ecken von A singulär wird. Dieser Zweig besitzt endlich die Eigenschaft, dass

$$\lim_{x=a} \frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu} = F^{(\mu)}(a)$$

wird für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Die Polynome $G_n(x|a)$ lassen sich auf unendlich viele Arten durch andere Polynome $g_n(x|a)$ ersetzen, die zu einem Grenzausdrucke

$$\lim_{n=\infty} g_n(x|a)$$

derselben Beschaffenheit führen.

Der Grenzausdruck $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ kann, bei geeigneter Wahl der Constanten $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$, auch ausserhalb des Sternes A convergiren. Dadurch geht die Analogie mit der Taylor'schen Reihe verloren, die ausserhalb des Convergenzkreises überall divergirt, ein Uebelstand, der jedoch zu ertragen sein würde, wenn $\lim_{n=\infty} G_n$ ausserhalb des Sternes A, falls Convergenz stattfindet, eine Fortsetzung des Zweiges $FA(x)$ darstellte. Das kann allerdings eintreten; es braucht aber nicht der Fall zu sein, so dass es also bei geeigneter Wahl der Constanten Gebiete ausserhalb A giebt, in denen $\lim_{n=\infty} G_n$ gleichmässig convergirt und eine analytische Function darstellt, die keine Fortsetzung des Zweiges $FA(x)$ ist.

Diesem Mangel stehen Vorzüge des Grenzausdruckes $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ gegenüber: 1. Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl von unabhängigen Veränderlichen liegt auf der Hand, 2. die Coefficienten der Polynome $G_n(x|a)$ haben eine ausserordentlich einfache Form, 3. der Beweis des Haupttheorems ist unabhängig von der Wahl der von dem Punkte a ausgehenden Vectoren, die keine geraden Linien, sondern auch Curven sein können, welche nur gewissen leicht ersichtlichen Beschränkungen unterworfen sind, 4. die Darstellung von $FA(x)$ durch $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ hängt aufs engste zusammen mit einer Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe, die auseinanderzusetzen der Zweck der zweiten Note ist.

Unter den Sternen, die dem Hauptsterne A eingeschrieben sind, befindet sich auch der Kreis C mit dem Mittelpunkte a, der durch die

dem Punkte a am nächsten liegende Ecke des Sternes A geht, und zu ihm gehört der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

also die Taylor'sche Reihe, die dieselben wesentlichen Eigenschaften besitzt wie der Grenzausdruck $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$, mit der Ausnahme, dass bei A jede Ecke ein singulärer Punkt ist, während man von dem Umfange des Kreises C nur weiss, dass auf ihm mindestens ein singulärer Punkt liegt. Dafür besitzt, wie schon erwähnt wurde, die Taylor'sche Reihe den Vorzug, ausserhalb C zu divergiren.

Mittag-Leffler zeigt nun, dass man zwischen C und A unendlich viele Zwischensterne K einschalten kann, von denen jeder dem vorhergehenden umgeschrieben ist, und zu deren jedem ein Grenzausdruck gehört, der in Bezug auf seinen Stern alle Eigenschaften besitzt, die der Taylor'schen Reihe in Bezug auf C zukommen.

Die Darstellung der gesuchten Ausdrücke beruht auf der Einführung des Begriffes n-fach unendlicher Summen, der von dem Begriffe n-facher Summen durchaus verschieden ist. Der Wert einer n-fachen Summe

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

wird erhalten, indem man eine einfache Summe bildet, deren Glieder aus den verschiedenen Functionen $f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$ bestehen, die den ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet werden. Dagegen erhält man den Wert f einer n-fach unendlichen Reihe, indem man der Reihe nach die Summen bildet

$$f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}, \quad f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}},$$

. . . .

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2}, \quad f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1},$$

wobei die Convergenz aller dieser Summen für ein System der Werte der in den $f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$ enthaltenen Veränderlichen oder auch für ein Gebiet von Systemen dieser Werte vorausgesetzt wird.

Mit Hülfe des Begriffes der n-fach unendlichen Reihen ergiebt sich nun das Theorem: Es sei X irgend ein im Innern von A enthaltener Bereich. Dann kann man stets eine kleinste ganze positive Zahl $\bar{n}$ so bestimmen, dass für $n \geqq \bar{n}$ die n-fach unendliche Reihe

$$(\mathfrak{M}) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_n!} \times F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

in X gleichmässig convergent ist und $FA(x)$ darstellt.

Für den wahren Convergenzbereich der Reihe ($\mathfrak{M}$) stellt sich die merkwürdige Thatsache heraus, dass die Fälle $n = 1, 2, 3$ und $n > 3$ vollständig zu trennen sind.

In dem ersten Fall ist der wahre Convergenzbereich ein Stern $E^{(n)}$, den man auf folgende Art erhält. Man fixire einen Vector l, der von a ausgeht, und trage auf ihm von a aus die Strecke $(n-1)r$ ab, wo r eine so kleine Grösse bedeutet, dass jeder Kreis vom Radius r, der um irgend einen Punkt der aufgetragenen Strecke beschrieben ist, dem Sterne A angehört. Ist ϱ die obere Grenze von r, und trägt man auf dem Vector l die Strecke $n\varrho$ von a aus ab, so findet man einen Punkt der Grenze des Sternes $E^{(n)}$, und indem man l eine Drehung um a ausführen lässt, ergiebt sich die ganze Grenze. Das gilt, wie auch die Constanten $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ gewählt sein mögen, zu denen der Stern A gehört.

In dem zweiten Fall giebt es keinen solchen Stern $E^{(n)}$ als wahren Convergenzbereich; man kann vielmehr die Constanten so wählen, dass die Reihe ($\mathfrak{M}$) in einem Punkte x' convergirt, ohne in einem anderen Punkte x'' zu convergiren, der auf dem Vector zwischen a und x' liegt.

Hieraus entsteht die Frage, ob man nicht n-fach unendliche Reihen construiren kann, die für jeden Wert von n die Eigenschaft haben, die der Reihe ($\mathfrak{M}$) für $n = 1, 2, 3$ zukommt, die also einen „wahren Convergenzstern" besitzen. Das gelingt in der That. Setzt man nämlich

$$S_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} \times F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \cdot (x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

wo $c_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$ gewisse numerische Coefficienten bezeichnen, die unabhängig sind von den Constanten $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ sowie von a und x, so lassen sich diese Coefficienten stets so bestimmen, dass $S_n(x|a)$ einen Convergenzstern $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ von folgender Beschaffenheit besitzt. Für jedes innerhalb $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ gelegene Gebiet convergirt die Reihe gleichmässig und divergirt für jeden Punkt ausserhalb $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Der Stern $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ ist dem Hauptstern A eingeschrieben und enthält, wenn n nur gross genug gewählt wird, jedes endliche in A enthaltene Gebiet. Für $n = \infty$ geht $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ in A über, und es wird bewiesen, dass $\lim_{n=\infty} S_n(x|a)$ den Stern A zum wahren Convergenzbereich hat und für ihn $FA(x)$ darstellt.

Dasselbe Problem wird in der dritten Note behandelt, jedoch nach einer ganz anderen, offenbar aus tief liegenden Betrachtungen geschöpften Methode, über deren Ursprung Mittag-Leffler jedoch nichts mitteilt.

Setzt man

$$\frac{z-a}{x-a}=\frac{u}{r}e^{\int_r^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-a}-1\right]\frac{du}{u}}=f(u|\alpha),$$

wo x als constant angesehen wird und α und r positive echte Brüche bedeuten, so entspricht dem um den Punkt $u=0$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreise in der z-Ebene eine herzförmige Figur, die den Vector von a nach x zur Symmetrieaxe hat. Beschreibt ferner u einen concentrischen Kreisumfang vom Radius r, so wird durch die entsprechende Curve eine Figur Z begrenzt, die ganz im Innern der herzförmigen Figur liegt. Die Figur Z heisst die erzeugende Figur, die Function $f(u|\alpha)$ die erzeugende Function eines Sternes $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$, der aus irgend einem zum Punkte a gehörigen Sterne $\mathfrak{E}$ entsteht, indem man einen Vector l sich um a drehen lässt und von seinen Punkten x immer den Punkt $\bar{x}$ wählt, bei dem $|\bar{x}-a|$ die obere Grenze der Werte von $|x-a|$ ist, für welche die entsprechende Figur Z einen Teil von $\mathfrak{E}$ bildet.

Da die Grösse r noch zur Verfügung steht, kann man der erzeugenden Function noch die Bedingung auferlegen, dass der Stern $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ für hinreichend kleines α in seinem Innern irgend einen gegebenen Bereich enthält, der nur im Innern von $\mathfrak{E}$ liegen muss. Es ist ferner zu bemerken, dass $\mathfrak{E}^{(1)}$ der dem Sterne $\mathfrak{E}$ eingeschriebene Kreis mit dem Mittelpunkte a wird.

Nach diesen Vorbereitungen wird die Reihe betrachtet:

$$S_\alpha(x|a)=F(a)+\sum_{\nu=1}^{\infty}G_\nu(x-a),$$

wo

$$G_\nu(x-a)=\frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{1!(\nu-1)!}F^{(1)}(a)\cdot(x-a)$$
$$+\frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{2!(\nu-2)!}F^{(2)}(a)\cdot(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{h_1^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!\,1!}F^{(\nu-1)}(a)\cdot(x-a)^{\nu-1}+\frac{h_0^{(\nu)}}{\nu!\,0!}F^{(\nu)}(a)\cdot(x-a)^\nu$$

zu setzen ist (die Formel für $G_\nu(x-a)$ auf S. 224 enthält einige Druckfehler); dabei sind die

$$h_{\nu-\mu}^{(\mu)}\begin{pmatrix}\mu=1,2,\ldots,\nu\\ \nu=1,2,\ldots,\infty\end{pmatrix}$$

bestimmte positive Constanten, die nur von der erzeugenden Function $f(u|\alpha)$ abhängen. Durch geeignete Wahl der erzeugenden Function lässt sich alsdann erreichen, dass die Reihe $S_\alpha(x|a)$ einen wahren Convergenzstern $A^{(\alpha)}$ besitzt, der aus dem Hauptstern A ebenso hervorgeht, wie der Stern $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ aus $\mathfrak{E}$, dass ferner im Innern von $A^{(\alpha)}$ überall die Gleichung

$$FA(x)=S_\alpha(x|a)$$

gilt, und dass endlich die Reihe $S_a(x|a)$ für $\alpha = 1$ in die Taylor'sche Reihe übergeht, während $\lim_{\alpha=0} S_a(x|a)$ den Hauptstern zum wahren Convergenzstern hat und in dessen Innerem ebenfalls $FA(x)$ darstellt.

Zwischen der Taylor'schen Reihe und den Reihen $S_\alpha(x|a)$ bestehen noch weitere Analogien. Erstens kann durch geeignete Festsetzungen für die erzeugende Function $f(u|\alpha)$ erreicht werden, dass bei gegebenem α die obere Grenze der Häufungsstellen von

$$\left|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}\right| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

gleich eins ist, wenn x dem Innern von $A^{(\alpha)}$ angehört, und grösser als eins, wenn x ausserhalb $A^{(\alpha)}$ liegt. Liegt ferner der Punkt x im Innern des Hauptsternes A, so giebt es stets eine Grösse $\alpha_0 < 1$, so dass für $\alpha < \alpha_0$ die obere Grenze der Häufungsstellen der absoluten Beträge jener ν-ten Wurzeln gleich eins ist, während bei einem x ausserhalb A diese Grenze stets grösser als eins ist, wobei α beliebig sein darf. Es ist klar, dass dieses Theorem ein wertvolles Mittel giebt, um die Ecken des Sternes A zu ermitteln, ein Gegenstand, über den Mittag-Leffler weitere Mitteilungen in Aussicht stellt.

Zweitens lässt sich durch geeignete Wahl der erzeugenden Function erreichen, ohne dass die vorhergehenden Theoreme ihre Gültigkeit verlieren, dass auch noch die Ungleichheiten gelten

$$|G_\nu(x-a)| < g \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

in denen g die obere Grenze von $|FA^{(\alpha)}(x)|$ bedeutet, wenn x den Umfang eines Sternes E durchläuft, der zu dem Sterne $A^{(\alpha)}$ ähnlich und ähnlich gelegen ist und dem Innern von $A^{(\alpha)}$ angehört; für $\alpha = 1$ ergeben sich hieraus die bekannten Cauchy-Weierstrass'schen Ungleichheiten:

$$\left|\frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a)\right| < g r^{-\nu},$$

in denen r eine positive Grösse bezeichnet, die kleiner als der wahre Convergenzradius der Reihe

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^\nu$$

ist, während g die obere Grenze von $F(x)$ für den Umfang des Kreises bedeutet, der um den Punkt a mit dem Radius r beschrieben ist.

St.

G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle. (Extrait d'une lettre à M. Émile Picard.) Palermo Rend. **14**, 217-224.

Der Beweis, den Weierstrass für die näherungsweise Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen durch Polynome gegeben hat (F. d. M. **17**, 384-388, 1885), ist von Runge (F. d. M. **18**, 344, 1886), Picard (F. d. M. **23**, 412, 1891), Volterra

(F. d. M. **28**, 1897) und Lebesgue (F. d. M. **29**, 352, 1898) durch andere, einfachere Herleitungen ersetzt worden. Noch einfacher ist der Beweis, den Mittag-Leffler mitteilt. Er beruht auf der Betrachtung der ganzen transcendenten Function

$$\chi_n(x) = 1 - 2^{1-(1+x)^n},$$

die, je nachdem die reelle Veränderliche x (> -1) positiv, Null, negativ ist, sich für $n = \infty$ der Grenze $+1, 0, -1$ nähert. Versteht man nun unter $F(x)$ eine reelle Function der reellen Veränderlichen x, die in dem Intervall

$$B > b \geqq x \geqq a > A$$

reell und stetig ist, so lassen sich stets zwischen die Werte $a = a_0$ und $b = a_{r+1}$ Werte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ in der Weise einschalten, dass die Function $F(x)$ in dem Intervall $x = (a \ldots b)$ mit beliebiger Genauigkeit durch die aus den $r+1$ geradlinigen Strecken:

$$y_\mu = F_\mu(x) = F(a_{\mu-1}) + [F(a_\mu) - F(a_{\mu-1})]\frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$
$$(a_{\mu-1} \leqq x \leqq a_\mu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, r+1)$$

gebildete Polygonallinie ersetzt wird. Diese Polygonallinie aber lässt sich mit beliebiger Genauigkeit darstellen durch die Gleichung:

$$y_\mu = \tfrac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}[F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\,\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

deren rechte Seite eine ganze transcendente Function von x ist und daher wiederum mit beliebiger Genauigkeit durch ein Polynom in x ersetzt werden kann.

Diese Methode des Beweises hat den Vorzug, dass sie mit Leichtigkeit auf reelle Functionen von mehreren reellen Veränderlichen ausgedehnt werden kann, eine Verallgemeinerung, die zuerst von Picard veröffentlicht worden ist. Allerdings hat Weierstrass, wie Mittag-Leffler bemerkt, bereits im Jahre 1884 in einer Vorlesung seinen Satz auf Functionen von mehreren reellen Veränderlichen ausgedehnt. Der Referent möchte hinzufügen, dass Weierstrass auch in einer Vorlesung über ausgewählte Kapitel der Functionentheorie während des Sommersemesters 1886 in aller Ausführlichkeit diese Ausdehnung seines Theorems auseinandergesetzt hat. Leider scheint eine Veröffentlichung dieser auch nach anderer Richtung sehr wichtigen Vorlesung nicht in Aussicht zu stehen. St.

E. Phragmén. Sur la représentation analytique des fonctions réelles, données sur un ensemble quelconque de points. (Extrait d'une lettre à M. G. B. Guccia). Palermo Rend. **14**, 256-261.

Im Anschluss an die vorhergehende Note von Mittag-Leffler berichtet Phragmén über Untersuchungen, die einer seiner Schüler,

Settenberg, über Functionen von zwei Veränderlichen angestellt hat, welche für irgend eine Punktmenge definirt sind. Im besonderen handelt es sich um den Beweis des Satzes, dass, wenn eine Function φ in den Punkten einer in einem Quadrate C enthaltenen Punktmenge E definirt und in E gleichmässig stetig ist, es immer möglich ist, eine Function Φ in C zu definiren, die in allen Punkten der Menge E gleich φ und die in C stetig ist. St.

É. Borel. Sur les séries de fractions rationnelles. C. R. **130,** 1061-1064.

Der Satz, dass jede eindeutige analytische Function sich für jeden Punkt innerhalb des Bereiches, der von der Gesamtheit aller Punkte regulären Verhaltens gebildet wird, durch eine Summe von rationalen Functionen darstellen lässt, hat dadurch an Interesse verloren, dass man nach Painlevé Summen rationaler Functionen bilden kann, die in jedem von beliebig viel gegebenen Bereichen, die nur keine gemeinsamen Teile haben dürfen, eine für den betreffenden Bereich beliebig vorgeschriebene eindeutige analytische Function darstellen. Einen wesentlich anderen Charakter hat die Darstellung einer eindeutigen analytischen Function als Summe von rationalen Functionen, die Mittag-Leffler für den Fall gegeben hat, dass die singulären Stellen der Function eine abzählbare Menge bilden, indem dadurch die Pole der Function in Evidenz gesetzt werden. Borel hatte bereits in seiner These (F. d. M. **26,** 429-430, 1895) Verallgemeinerungen dieser Darstellung gegeben, indem er Ausdrücke der Form

$$\Sigma \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}}$$

betrachtete, wo die Pole a_n beliebig verteilt sein dürfen. Jetzt legt er Ausdrücke der Form

$$\Sigma \frac{P_n(z)}{R_n(z)}$$

zu Grunde, wo $P_n(z)$ und $R_n(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten, und giebt Bedingungen für die Functionen $R_n(z)$ an, unter denen für die allgemeineren Summen die früheren Sätze gelten. Es ist zu bemerken, dass dadurch wirklich eine neue Einsicht gewonnen wird, indem die angegebenen Verallgemeinerungen nicht etwa durch Zerlegung in Partialbrüche auf die früheren Theoreme zurückgeführt werden können. St.

É. Borel. Sur la généralisation du prolongement analytique. C. R. **130,** 1115-1118.

Eine Function $F(x)$ der reellen Veränderlichen x heisst eine Function (M) in einem Intervall AB, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1. Sie besitzt für jeden Punkt a des Intervalles Ableitungen jeder Ordnung.
2. Function und Ableitungen lassen sich in der Form darstellen:

$$F^{(h)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(h)}(x-a, a) \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

wo der Ausdruck $G_n(\xi, a)$ für jeden Wert ξ und a des Intervalles AB durch die Gleichungen definirt wird:

$$G_0(\xi, a) = g_0(\xi, a) = F(a),$$
$$G_n(\xi, a) = g_n(\xi, a) - g_{n-1}(\xi, a) \qquad (n > 0),$$
$$g_n(\xi, a) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \times F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

3. Alle diese Reihen convergiren, wenn h und a feste Werte haben, unbedingt und gleichmässig für jedes innerhalb des Intervalles AB gelegene Intervall.

Es giebt solche Functionen (M); denn nach einem Satze von Mittag-Leffler definirt jede analytische Function $f(z)$ auf jeder geradlinigen Strecke AB, die keinen singulären Punkt von $f(z)$ enthält, eine Function (M). Mit den so erhaltenen Functionen sind jedoch die Functionen (M) noch nicht erschöpft, vielmehr existiren, wie Borel an einem Beispiel zeigt, Functionen (M), die in einem Intervall AB nicht analytisch sind. Trotzdem kann man für die Functionen (M) eine Theorie aufstellen, die der Weierstrass'schen Theorie der Fortsetzung analytischer Functionen entspricht.

Wie eine analytische Function ist eine Function (M) vollständig bestimmt durch die Werte, die sie selbst und ihre Ableitungen an einem bestimmten Punkte haben. Ist für einen Punkt a der Ebene der complexen Veränderlichen x eine Reihe von Werten $F(a), F'(a), F''(a), \ldots$ gegeben, so betrachte man die durch ihn gehenden Geraden. Die Reihe jener Werte kann dann auf einzelnen der Geraden Functionen (M) definiren. Auf einer von ihnen nehme man einen Punkt b an und untersuche, ob zu den Werten $F(b), F'(b), F''(b), \ldots$ eine Function (M) gehört, die auf einer von b ausgehenden, von ab verschiedenen Geraden definirt ist, u. s. w. Auf diese Weise gelangt man dazu, von dem „Functionselement" $F(a), F'(a), F''(a), \ldots$ ausgehend, die betreffende Function (M) in ihrer ganzen Ausdehnung zu definiren. Man erkennt leicht, dass die so erhaltene Theorie die Weierstrass'sche als besonderen Fall enthält; allerdings ist dabei der Begriff der eindeutigen Function mit Vorsicht zu definiren, ein Umstand, auf den Borel schon bei einer anderen Gelegenheit aufmerksam gemacht hat (F. d. M. **26**, 430, 1895).

Den Gedanken einer „linearen Fortsetzung" auf Grund der Polynome $g_n(\xi, a)$, die bereits in einer früheren Abhandlung von Mittag-Leffler

aufgetreten waren (F. d. M. **30**, 364-366, 1899), hat dieser, unabhängig von Borel, in der zweiten Note ausgesprochen, über die S. 404 dieses Bandes berichtet wird. Gleichzeitig hat er auf einen Umstand aufmerksam gemacht, der für die Beurteilung des Wertes dieser Verallgemeinerung des Begriffes der Fortsetzung von entscheidender Bedeutung ist, nämlich dass die Polynome $g_n(\xi, a)$ auf unendlich viele Arten durch andere Polynome ersetzt werden können, die für den Zweck der Fortsetzung zwar dasselbe bieten wie die $g_n(\xi, a)$, die aber zu ganz anderen Fortsetzungen führen als jene. Mithin ist die lineare Fortsetzung abhängig von der Wahl der Darstellung der Function, und darin liegt ein so wesentlicher Unterschied gegenüber der Fortsetzung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, dass die lineare Fortsetzung mehr das Interesse einer Curiosität hat, als einen wirklichen Fortschritt der Functionentheorie bedeutet. St.

É. Borel. **Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique.** C. R. **131**, 830-832.

Ist eine Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

vorgelegt, so bilde man die associirte Function

$$u(a) = u_0 + u_1 \frac{a}{1!} + u_2 \frac{a^2}{2!} + u_3 \frac{a^3}{3!} + \cdots.$$

Wenn dann die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^k u(a)}{d a^k} \right| \cdot e^{-a} \, da$$

für $r = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ sämtlich einen Sinn haben, heisst die gegebene Reihe „absolut summirbar". Wird diese Definition zu Grunde gelegt, so gilt der Satz, dass die Taylor'sche Reihe

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \cdots$$

für jeden Punkt im Innern des „Polygons der Summirbarkeit" (vergl. F. d. M. **27**, 197-199, 1896) absolut summirbar ist, dagegen nicht absolut summirbar für jeden Punkt ausserhalb; die Grenze bleibt zweifelhaft. Diese Eigenschaft bildet einen wichtigen Unterschied zwischen dem Polygon der Summirbarkeit und dem Stern von Mittag-Leffler und dessen Verallgemeinerung (vergl. diesen Band, S. 404-409). St.

F. G. Teixeira. **Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée.** J. für Math. **122**, 97-123.

Vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Abschnitte. Im ersten zeigt Verf., dass die Formeln von Lagrange, Bürmann und Laurent

Specialfälle einer Formel sind, welche die Entwickelung einer Function $f(x)$ nach positiven und negativen Potenzen einer anderen Function $\Theta(x)$ liefert; die Formel lautet:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta^n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\Theta^n(x)};$$

$$A_n=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)}{\Theta^{n+1}(z)}dz,\quad B_n=\frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz.$$

Dabei ist S die äussere, s die innere Begrenzung des Gebietes, innerhalb dessen $f(z)$ holomorph ist; x ist ein Punkt dieses Gebietes und $\Theta(z)$ ist innerhalb S holomorph und besitzt darin eine Nullstelle a. Für den Fall, dass $f(z)$ innerhalb s eine endliche Anzahl von Polen besitzt, wird noch näher erläutert, wie die auftretenden Integrale zu berechnen sind.

Die übrigen Abschnitte enthalten Anwendungen dieser Formel, und zwar werden im zweiten Entwickelungen nach Potenzen von $\dfrac{x-a}{x-b}$ betrachtet. Verf. zeigt zunächst, dass, wenn eine Function innerhalb eines von zwei nichtconcentrischen Kreisen begrenzten Ringgebietes holomorph ist, die Grössen a und b so bestimmt werden können, dass die Function in eine für das bezeichnete Gebiet convergente, nach Potenzen von $(x-a)/(x-b)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Mittels Reihen dieser Form lassen sich, wie darauf gezeigt wird, Functionen entwickeln, welche innerhalb eines von Geraden oder von Geraden und Kreisbogen begrenzten Gebietes holomorph sind. Dies führt u. a. zu einem Satze, welcher ein Theorem von Appell [Acta Math. **1**, 111] umfasst, nämlich: „Jede Function, welche in einem Gebiet holomorph ist, dessen äussere Begrenzung aus Geraden und Kreisbogen, dessen innere Begrenzung aus Kreisbogen besteht, lässt sich in eine Reihe folgender Gestalt entwickeln:

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right) + \sum P_m(x-c'_m)+\sum G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

wenn die Geraden und Kreisbogen das Gebiet nicht schneiden.“ Dabei sind $c'_1, c'_2, \ldots$ die Mittelpunkte der äusseren, $c_1, c_2, \ldots$ die der inneren Kreisbogen, x ist ein Punkt des betrachteten Gebietes, ebenso b. Als eine Folgerung dieses Satzes und ähnlicher ergiebt sich z. B., dass die elliptischen Functionen auf unendlich viele Weisen in einfache, in einem Periodenparallelogramm convergente Reihen entwickelt werden können, deren Glieder rationale Functionen von x sind.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit Reihen, welche nach Potenzen von $\sin x$ fortschreiten; es wird gezeigt, dass die vom Verf. früher [J. für Math. **116**, 14; F. d. M. **27**, 304, 1896] gegebene Methode der Coefficientenbestimmung auf Functionen mit Polen anwendbar ist.

Als letzte Anwendung der betrachteten Formel wird im vierten Abschnitt die Entwickelung nach Potenzen von $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$ behandelt. Verf. liefert insbesondere einen neuen Beweis der Fourier'schen Formel für eine periodische Function einer complexen Variable; auch dehnt er diese Formel auf den Fall aus, dass die Function nicht periodisch ist. Gz.

C. Severini. Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi. Palermo Rend. **14**, 157-179.

In einigen früheren Arbeiten (Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale. Torino Atti **33**, 1002-1023; **34**, 325-345, 518-534; F. d. M. **29**, 354, 1898; **30**, 360, 1899) zeigte der Verfasser, dass jede in einem Intervalle (ab) gegebene Function, deren Unstetigkeitspunkte eine unausgedehnte Menge bilden, in allen Punkten einer endlichen Menge von Teilintervallen, deren Summe von (ab) beliebig wenig abweicht, durch eine absolut und gleichmässig convergirende Reihe von Polynomen darstellbar ist. Später bestimmte R. Baire (Sur les fonctions de variables réelles. Annali di Mat. (3) **3**, 1-123; F, d. M. **30**, 359, 1899) die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer solchen, für das ganze Intervall gültigen Darstellung. In der vorliegenden Note vergleicht der Verfasser seine eigenen Resultate mit den Baire'schen und zeigt, wie seine Methode zur Bildung einer für das ganze Intervall gültigen Polynomenreihe unter gewissen Umständen führen kann; ferner dehnt er seine Untersuchungen auf Functionen von zwei reellen Veränderlichen aus. Vi.

L. Désaint. Sur la représentation des fonctions non uniformes. C. R. **130**, 1296-1298.

Wenn eine Function $f(z)$ im Innern eines Kreises vom Radius $r<1$ ausser dem Nullpunkte als einzigen Punkt „de non-uniformité" keine anderen Unstetigkeiten hat, so kann sie in die Reihe

$$(1) \qquad f(z)=\Sigma A_n\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{2\log r}\right)^n$$

entwickelt werden. Den vielfachen Bestimmungen von $\log z$ entsprechen dabei vielfache Bestimmungen der Function.

Wird diese Picard'sche Entwickelung als das fundamentale Element „de non-uniformité" bezeichnet, so handelt es sich um die Aufgabe:

Die analytische Function $f(z)$ habe den Nullpunkt als einzigen Punkt der non-uniformité und sei durch ihr fundamentales Element der non-uniformité bekannt; es soll eine Function $\omega(z)$ bestimmt werden, so dass $f(z)=\omega(z)$ für alle Werte von z im Existenzbereich von $f(z)$ und für alle Zweige von $f(z)$ ist. Wz.

P. Painlevé. Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles. C. R. **131,** 489-492.

Ist $x = 0$ eine isolirte kritische Stelle der analytischen Function $y(x)$, dann nähert sich $y(x)$ entweder einem bestimmten endlichen oder unendlich grossen Werte, falls x auf beliebigem Wege zu $x = 0$ übergeführt wird, oder es ist $y(x)$ unbestimmt. Diese Unbestimmtheit kann aber verschiedener Art sein, und zwar entspricht, wie Verf. zeigt, jedem singulären Punkte einer analytischen Function $y(x)$, für welchen der Functionswert nicht bestimmt ist, ein gewisses Gebiet der Unbestimmtheit von y. Umfasst das Gebiet die ganze Ebene der y, so nennt Verf. den Punkt $x = a$ eine Stelle vollständiger Unbestimmtheit; wenn das Gebiet aber nur einen Teil jener Ebene umfasst, so heisst $x = a$ ein Punkt „unvollständiger Unbestimmtheit". Beispiel: $y = (\lg x)^i$; das Gebiet der Unbestimmtheit besteht in diesem Falle in der y-Ebene aus einem Kreisringe, dessen Begrenzung die beiden mit den Radien $e^{\frac{\pi}{2}}$ und $e^{\frac{3\pi}{2}}$ um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreise bilden.

Auf Grund dieser Definitionen ist Verf. zu drei bemerkenswerten Sätzen über algebraische Differentialgleichungen der ersten drei Ordnungen gelangt, die er ohne Beweis mitteilt, und die sich auf die Natur der Singularitäten der Integrale solcher Differentialgleichungen beziehen.

Gz.

E. Holmgren. Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies. (Extrait d'une lettre adressée à M. Volterra.) Torino Atti **35,** 570-580.

Die Abhandlung enthält Bemerkungen und Ergänzungen zu einer Arbeit von Volterra: Sulla inversione degli integrali definiti. [Torino Atti **31,** 231-243, 286-294, 389-399, 429-444; F. d. M. **27,** 309, 1896; vergl. auch F. d. M. **30,** 355-356, 1899.] Gz.

C. Neumann. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, insbesondere über die Vervollkommnungen, welche die betreffenden Poincaré'schen Untersuchungen in letzter Zeit durch die Arbeiten von A. Korn und E. R. Neumann erhalten haben. Math. Ann. **54,** 1-48.

Die Methode des arithmetischen Mittels, mit deren Hülfe es dem Verf. bekanntlich zum ersten Male gelang, Functionen zu construiren, welche im Innen- oder Aussenraum einer gegebenen geschlossenen Fläche ohne Ecken und Kanten stetig sind, die Laplace'sche Gleichung befriedigen, an der Fläche in vorgeschriebene Werte übergehen und deren Ableitungen in irgend welcher Entfernung von der Fläche stetig sind, setzt voraus, dass die Fläche überall convex ist und die auf der Fläche vor-

geschriebenen Randwerte stetig sind. Nach den späteren Untersuchungen von Poincaré ist es sehr wahrscheinlich, dass die beschränkende Voraussetzung der Convexität nicht notwendig ist; auch hat Korn nach dieser Richtung wichtige Fortschritte erzielt [Lehrbuch der Potentialtheorie, 1899; F. d. M. **30**, 690-692, 1899] und die mehr oder weniger provisorischen Ergebnisse Poincaré's zum Teil bestätigt, ohne dabei das bedenkliche Dirichlet'sche Princip heranzuziehen.

In der gegenwärtigen Arbeit sucht nun Verf. den Korn'schen Untersuchungen eine etwas anschaulichere Gestaltung und namentlich auch gewissen Teilen derselben durch Anwendung zweier von E. R. Neumann gefundenen Sätze ein etwas strengeres Gefüge zu verleihen. Seine Abhandlung charakterisirt Verf. selbst durch folgenden Satz: „Das im vorliegenden Aufsatz aufgeführte theoretische Gebäude ist einstweilen nur als ein vorläufiges Gerüst zu bezeichnen, welches in seinen einzelnen Teilen noch mühsamer und sorgfältiger Durchforschungen dringend bedarf. Immerhin aber dürfte zu erwarten sein, dass dieses provisorische Gerüst durch solche tiefer gehende Forschungen, durch mancherlei Determinationen und Rectificationen, schliesslich in ein wirklich festes Gebäude sich verwandeln werde.“ Gz.

A. Korn. Ueber Lösungen des Dirichlet'schen Problems, welche durch eine Combination der Methoden von Neumann und Schwarz gefunden werden. Math. Ann. **53**, 593-608.

Dass unter gewissen Bedingungen das Dirichlet'sche Problem durch eine Combination der Methoden von Neumann und Schwarz gelöst werden kann, hat Verf. in seinem Lehrbuche der Potentialtheorie nachgewiesen. In der vorliegenden Abhandlung wird diese Betrachtung ergänzt und erweitert durch eine Untersuchung, die zu folgendem Ergebnis führt:

Die Combination der Methoden von Neumann und Schwarz liefert für den Innen- und Aussenraum einer beliebig geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω Lösungen des Dirichlet'schen Problems, und zwar wirkliche Potentialfunctionen des Innen- und Aussenraumes bei folgenden Bedingungen A oder B für die Randwerte f:

A) Es existirt eine Function F eines von ω und einer ω beliebig nahen geschlossenen ganz innerhalb (ganz ausserhalb) verlaufenden Fläche ω_i (ω_a) begrenzten Raumes, die in demselben mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, endliche zweite Ableitungen hat und an der Fläche ω die Randwerte f besitzt.

B) Es existirt eine Potentialfunction F des von ω und ω_i (ω_a) begrenzten Raumes, welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt.

Die Bedingungen B lassen sich noch etwas verallgemeinern.

Gz.

D. Hilbert. Ueber das Dirichlet'sche Princip. Deutsche Math. Ver. 8_1, 184-188.

D. Hilbert. Sur le principe de Dirichlet. (Traduit par L. Laugel.) Nouv. Ann. (3) **19**, 337-344.

Unter dem Dirichlet'schen Princip versteht Hilbert diejenige Schlussweise auf die Existenz einer Minimalfunction, die Gauss (1839), Thomson (1847), Dirichlet (1856) und andere Mathematiker zur Lösung sogenannter Randwertaufgaben angewandt haben, und deren Unzulässigkeit zuerst von Weierstrass erkannt worden ist. In seinem Vortrage zeigt er, dass dieses Princip dennoch zur Auffindung von strengen und einfachen Existenzbeweisen dienen kann, oder vielmehr das allgemeinere Princip, dass „eine jede Aufgabe der Variationsrechnung eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemässe Erweiterung erfährt."

Die von ihm ausgebildete Schlussweise wird von Hilbert an zwei Beispielen auseinandergesetzt.

1. Auf einer gegebenen Fläche $z = f(x,y)$ zwischen zwei gegebenen Punkten P und $P^{(1)}$ die kürzeste Linie zu ziehen. Aus der Gesamtheit der Curven, die auf der Fläche liegen und P und $P^{(1)}$ verbinden, sondere man eine Schar von Curven C_n $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ aus, deren Längen L_n für $n = \infty$ als Grenze die untere Grenze l der Längen aller Curven auf der Fläche zwischen P und $P^{(1)}$ besitzen. Man trage von P aus auf C_n die Länge $\frac{1}{2} L_n$ ab, bis zum Punkt $P_n^{(\frac{1}{2})}$. Dann besitzen die Punkte $P_n^{(\frac{1}{2})}$ eine Verdichtungsstelle $P^{(\frac{1}{2})}$, wo $P^{(\frac{1}{2})}$ wiederum ein Punkt der Fläche ist. Dasselbe Verfahren wende man auf die Punkte P und $P^{(\frac{1}{2})}$ an und erlange dadurch einen Punkt $P^{(\frac{1}{4})}$, ebenso auf $P^{(\frac{1}{2})}$ und $P^{(1)}$, wodurch $P^{(\frac{3}{4})}$ erlangt werde. Indem man dieses Verfahren unbegrenzt fortsetzt, erhält man eine unendliche Punktmenge $P^{(a)}$, von der sich, wenn $f(x,y)$ nebst den ersten Ableitungen nach x und y stetig ist, zeigen lässt, dass sie überall dicht ist und daher eine stetige Curve definirt, welche die gesuchte kürzeste Linie ist.

2. Eine Potentialfunction $z = f(x,y)$ zu finden, die auf einer gegebenen Randcurve in der xy-Ebene gegebene Randwerte annimmt. Der Einfachheit halber wird dabei angenommen, dass die gegebene Randcurve eine stetige Tangente und Krümmung, die gegebene Randfunction eine stetige Ableitung besitzt. Auf der xy-Ebene errichte man in den Punkten der Randcurve Lote, auf denen man die betreffenden Randwerte abtrage. Man erhält so eine Raumcurve, durch die man sich alle möglichen Flächen gelegt denke. Existirt dann eine Fläche $z = f(x,y)$, für die das Integral

$$J(f) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

ein Minimum ist, so ist sie notwendig eine Potentialfläche, und damit ist

die Randwertaufgabe gelöst. Um die Existenz einer solchen Fläche nachzuweisen, denkt sich Hilbert wieder aus der Gesamtheit der Flächen, deren Rand durch die Raumcurve gebildet wird, eine Schar $z = F_n(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ausgesondert, deren zugehörige Integralwerte $J_n = J(F_n)$ sich der unteren Grenze i des Integralwertes J für alle Flächen als Grenze nähern. Jede dieser Flächen lässt sich, wie leicht zu zeigen, durch eine Fläche $z = \bar{F}_n(x, y)$ ersetzen, so dass der zu $z = \bar{F}_n(x, y)$ gehörige Integralwert $J(\bar{F}_n)$ kleiner oder gleich dem zu $z = F_n(x, y)$ gehörigen Integralwert J_n wird, und zugleich $z = F_n(x, y)$ an keiner Stelle eine Tangente besitzt, deren Winkel mit der xy-Ebene grösser als ein gewisser der Raumcurve eigentümlicher Winkel φ ausfällt. Aus der Reihe der Functionen $\bar{F}_n(x, y)$ sondere man eine solche Reihe von Functionen $f_n(x, y)$ aus, dass der Grenzwert $\lim_{n=\infty} f_n(x, y)$ für alle diejenigen Punkte x, y innerhalb der gegebenen ebenen Randcurve existirt, deren Coordinaten x, y rationale Zahlen sind. Man beweist dann leicht, dass die unendliche Reihe von Functionen $f_n(x, y)$ für das Innere der Curve einschliesslich des Randes gleichmässig convergirt, woraus folgt, dass $\lim_{n=\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ eine stetige Function der Veränderlichen x und y ist. Die Fläche $z = f(x, y)$ ist dann die gesuchte Potentialfläche.

Den Hauptvorteil der neuen Methode erblickt Hilbert darin, „dass sie nur die Minimums-Eigenschaft benutzt und von der speciellen Natur der Aufgabe, d. h. von den besonderen Eigenschaften der geodätischen Linie, bezw. der Potentialfunction keinen Gebrauch macht; das Schlussverfahren ist daher auch auf allgemeinere Probleme der Flächentheorie und der mathematischen Physik anwendbar." In der That ist diese neue Methode in zwei Göttinger Dissertationen aus dem Jahre 1901 von Noble für die Extreme von einfachen bestimmten Integralen, von Hendrick für gewisse Fälle von Doppelintegralen angewandt worden.

St.

S. Zaremba. Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. Journ. de Math. (5) **6**, 47-72.

Poincaré hat in seiner wichtigen Untersuchung „Sur les équations de la physique mathématique" (Palermo Rend. **8**, 51-156, 1894; vergl. auch das sehr ausführliche Referat: F. d. M. **25**, 1526-1532) unter anderem eine Reihe von Sätzen aufgestellt, welche sich auf gewisse (harmonische) Functionen U_p beziehen, die an der geschlossenen Grenzfläche S eines Gebietes D verschwinden und in D den Differentialgleichungen

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen (k_p positive Constanten, $k_p \leq k_{p+1}$), sowie Sätze, welche die Gleichung $\Delta u + \xi u + f = 0$ betreffen. Darin ist ξ eine willkürliche Constante (Parameter), f eine gegebene Function von x, y, z, und u verschwindet an S und erfüllt vorstehende Gleichung innerhalb D.

Ueber die Function $f(x, y, z)$ führt Verf. nun, in Erweiterung des Poincaré'schen Ergebnisses, den Nachweis, dass jede Function $f(x, y, z)$, wenn sie auf S verschwindet, und wenn Δf existirt, in eine im ganzen Gebiete D gleichmässig convergente Reihe nach Functionen entwickelt werden kann, deren jede eine lineare und homogene Combination mit constanten Coefficienten einer endlichen Anzahl harmonischer Functionen ist. Es wird nur vorausgesetzt, dass die Fläche S, welche auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen kann, in jedem ihrer Punkte Hauptkrümmungsradien besitze, welche nicht unterhalb einer festen Länge sind. Gz.

W. F. Osgood. **On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region.** American M. S. Trans. **1**, 310-314.

Das Problem, das Innere eines einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes T conform auf das Innere eines Kreises abzubilden, erfordert bekanntlich den Nachweis der Existenz der dem Gebiete T entsprechenden Green'schen Function. Die bisherigen Beweise (Schwarz, Paraf, Painlevé u. s. w.) setzen eine besondere Beschaffenheit der Grenzcurve voraus. Unter Verwendung einer Methode, die im Grunde mit einer von Poincaré benutzten [S. M. F. Bull. **11**] übereinstimmt, liefert Verf. in vorliegender Arbeit den erforderlichen Existenznachweis der Green'schen Function für das allgemeinste einfach zusammenhängende ebene Gebiet. Gz.

L. de Sanctis. **Alcuni nuovi teoremi sulle funzioni armoniche a tre variabili.** Annali di Mat. (3) **4**, 161-197.

Angeregt durch Appell's Abhandlung über die Functionen dreier reellen Variablen $F(x, y, z)$, welche der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügen, sogenannte „harmonische" Functionen, [Acta Math. **4**, 313-374; F. d. M. **16**, 373, 1884], leitet Verf. vorliegender Arbeit zunächst für diese Functionen einen Satz her, welcher eine Erweiterung des Cauchy'schen Satzes $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-t} dz$ über Functionen einer complexen Variable darstellt. Alsdann zeigt er, dass man die Mittag-Leffler'schen Untersuchungen über Functionen einer complexen Veränderlichen ebenfalls auf jene harmonischen Functionen ausdehnen kann. Diese Ausdehnung des Mittag-Leffler'schen Satzes wird darauf benutzt, um in einer Weise, die von der Appell's verschieden und allgemeiner ist, die Existenz einer eindeutigen harmonischen Function zu erweisen, welche in allen Raumpunkten regulär ist mit Ausnahme der Ecken eines Netzes von Parallelepipeden, in denen sie Pole erster Ordnung mit dem Residuum $+1$ besitzt; zugleich wird die Function wirklich gebildet. Diese Function spielt, was schon Appell bemerkt, in

der Theorie der Functionen $F(x, y, z)$ eine ähnliche Rolle wie die Weierstrass'sche Function $\zeta(z)$ in der Theorie der elliptischen Functionen. Gz.

DESAINTS. Sur la représentation générale des fonctions analytiques quelconques. C. R. **130,** 999-1002.

Zur Darstellung beliebiger Functionen durch einfache und mehrfache Integrale giebt der Verf. eine neue Methode an und erzielt dadurch neue Resultate, deren ausführliche Begründung einer späteren Arbeit vorbehalten bleibt. Sh.

J. LE ROUX. Sur une inversion d'intégrale double. C. R. **130,** 882-884.

Im Anschluss an frühere Untersuchungen über die Integration partieller Differentialgleichungen behandelt der Verf. folgende Aufgabe. Das Doppelintegral

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

erstreckt über die Fläche des Dreiecks, das durch die Coordinatenaxen und die variable Gerade $x/u + y/v - 1 = 0$ gebildet wird, ist eine Function $F(u, v)$ der Coordinaten dieser Geraden. Ist nun umgekehrt eine Function u, v gegeben, die sich in der Umgebung des Punktes $u = 0, v = 0$ regulär verhält und für $u = 0, v = 0$ verschwindet, so soll eine solche Function $f(x, y)$ gefunden werden, dass, bei demselben Integrationsgebiet wie vorher,

$$F(u, v) = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

ist. Ein ähnliches Problem war bereits 1839 von Liouville behandelt worden. St.

W. F. OSGOOD. Zweite Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. **53,** 461-464.

In der ersten Note (F. d. M. **30,** 1899, 380) hatte Osgood den Satz bewiesen: Ist die Function $F(x, y)$ für jede Stelle des Bereiches T, der durch die Ungleichheiten $|x| \leqq R$, $|y| \leqq S$ erklärt wird, eindeutig definirt, und genügt sie den Bedingungen, dass 1. $F(x, y)$ für jeden festen, im Kreise $|x| = R$ gelegenen Wert von x eine im Kreise $|y| = S$ analytische Function von y und für jeden festen im Kreise $|y| = S$ gelegenen Wert von y eine im Kreise $|x| = R$ analytische Function von x ist, und 2. $F(x, y)$ im Bereiche T endlich bleibt, so ist $F(x, y)$ eine analytische Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Osgood hatte nun die Frage aufgeworfen, ob der Satz noch bestehen bleibt, wenn man die zweite Bedingung weglässt. Wenn es ihm auch nicht gelungen ist, die Frage zu erledigen, so giebt doch folgender von ihm gefundener Satz eine wertvolle Einsicht in das Wesen

der Sache. Es möge x_0, y_0 ein beliebiger Punkt des Bereiches T sein, während bezüglich der Function $F(x, y)$ bloss die Voraussetzung 1. gelten soll. Dann existirt in jeder Umgebung von x_0, y_0 ein Punkt x_1, y_1, in dem $F(x, y)$ analytisch ist, und zwar umfasst der Definitionsbereich dieser Function mindestens den Bereich

$$|x-x_1|<h, \ |y-y_1|<S_1-|y_0| \qquad (0<S_1<S),$$

beziehungsweise

$$|y-y_1|<h, \ |x-x_1|<R_1-|x_0| \qquad (0<R_1<R),$$

wo h eine passend zu wählende Grösse bedeutet. Die Frage, ob es in T einen Punkt x_0, y_0 giebt, in dem $F(x, y)$ nicht analytisch zu sein braucht, wird also dann und nur dann zu verneinen sein, wenn folgender Satz richtig ist. Es möge $\Phi(x, y)$ eine Function sein, die der Bedingung 1. genügt und ausserdem im Bereiche $|x|<R$, $|y|<k<S$ eine analytische Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Dann ist $\Phi(x, y)$ auch im ganzen Bereiche T analytisch. Ob dieser Satz richtig ist, bleibt jedoch unentschieden. St.

G. Vitali. Sulle funzioni analitiche sopra le superficie di Riemann. Palermo Rend. **14,** 202-208.

Ausdehnung des Mittag-Leffler'schen Satzes auf die analytischen Functionen der Punkte einer Riemann'schen Fläche. Dasselbe ist, wie der Verf. freilich erkennt, schon längst, wenn auch auf anderem Wege, von P. Appell (Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x,y). Acta Math. **1,** 109-131, 132-144; F. d. M. **15,** 333, 1883) geleistet worden. Vi.

D. Pizzarello. Sulle funzioni trascendenti intere. Messina. Tipografia dell' Epoca. 70 S. 8°.

Eine Zusammenfassung der hauptsächlichsten Eigenschaften der ganzen transcendenten Functionen erster Klasse, mit Hinzufügung einiger neuen Sätze, von welchen der folgende als Beispiel angeführt werden möge:

Ist $f(z)$ eine einfache ganze Function vom Geschlechte 1, und liegen ihre sämtlichen Wurzelpunkte auf einer Geraden, so liegen sämtliche Wurzelpunkte von $f'(z)$ auf derselben Seite dieser Geraden wie der Coordinatenursprung. Vi.

G. Landsberg. Zur Theorie der algebraischen Functionen zweier Veränderlicher. Berl. Ber. 1900, 296-302.

Für die Behandlung der algebraischen Functionen von zwei (und mehr) Veränderlichen sind einerseits die von Dedekind und Kronecker geschaffenen arithmetischen Theorien der Zahlkörper, andererseits die functionentheoretischen Anschauungen Riemann's vorbildlich. — Führt

man, von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y ausgehend, durch eine algebraische Gleichung $F(x, y, z) = 0$ z als algebraische Function von x und y ein, so wird der aus der Gesamtheit aller rationalen Functionen von x und y bestehende Körper durch Adjunction von z zu einem Körper algebraischer Functionen von x und y erweitert. Derselbe besteht aus allen rationalen Functionen von x, y, z und heisst Körper n-ten Grades, wenn die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in Bezug auf z vom n-ten Grade ist. Innerhalb dieses Körpers kann zwischen ganzen und gebrochenen Functionen unterschieden werden, und es gelingt, durch Einführung der idealen Divisoren die Gesetze der Teilbarkeit und Zerlegung, welche im Bereiche der rationalen Zahlen oder Functionen herrschen, in vollem Umfange herzustellen. Bei der Behandlung dieser Fragen wird das von Kronecker geschaffene Hülfsmittel der Formen mehrerer Variabeln benutzt.

Man kann aber den Functionenkörper nach Riemann noch von einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachten, indem man, zunächst die Unterscheidung zwischen x, y als den unabhängigen und z als der abhängigen Veränderlichen aufhebend, das algebraische Gebilde ins Auge fasst, welches aus der Gesamtheit der Lösungstripel von $F(x, y, z) = 0$ besteht. Jede rationale Function von x, y, z hat an jeder Stelle des Gebildes einen bestimmten Wert. Es lassen sich ferner auf mannigfache Weise drei rationale Functionen ξ, η, ζ angeben, aus denen jede Function des Körpers rational zusammengesetzt werden kann, und welche demgemäss an die Stelle von x, y, z treten können. Bei dieser Betrachtung verlieren x, y, z die führende Rolle, welche sie unter den Functionen des Körpers innegehabt. Zugleich werden manche Unterscheidungen, wie die zwischen ganzen und gebrochenen Functionen, aufgehoben. Dagegen ist der Begriff des (idealen) Divisors unabhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen. Diese Thatsachen liegen dem zweiten Teil der Abhandlung zu Grunde, welcher sich mit den Methoden beschäftigt, die in neuerer Zeit von Hensel zur Begründung der Theorie der algebraischen Functionen zweier Veränderlichen geschaffen wurden. Zunächst wird gezeigt, wie man für ein vorgegebenes Primideal $\mathfrak{P}$ die Functionen des Körpers so auf einen Körper algebraischer Functionen einer Veränderlichen abbilden kann, dass mod. $\mathfrak{P}$ congruenten Functionen dasselbe Bild entspricht und alle rationalen Beziehungen erhalten bleiben. Im Anschluss hieran ergiebt sich die Entwickelung jeder Function u des Körpers für das Primideal $\mathfrak{P}$ in eine Reihe, welche nach Potenzen einer durch $\mathfrak{P}$, aber nicht $\mathfrak{P}^2$ teilbaren Function π des Körpers fortschreitet.

Die im letzten Teil der Abhandlung gegebenen Begriffsbestimmungen: die Einteilung der Primideale in gewöhnliche und solche, welche den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche bei Functionen einer Veränderlichen analog sind, der Begriff des Verzweigungsdivisors und des Divisors der Doppelcurve, sind zwar von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen x, y abhängig; doch erweist sich ihre Betrachtung auch bei der Erforschung solcher Eigenschaften des Körpers als vorteilhaft, welche gegenüber der Transformation dieser Veränderlichen invariant

bleiben. Es wird eine allgemeine Formel aufgestellt, aus welcher eine Reihe solcher Eigenschaften abgeleitet werden kann. Stz.

K. Hensel. Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln. Deutsche Math. Ver. 8_1, 221-231.

K. Hensel. Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln. Acta Math. **23**, 339-416.

Die erste Arbeit ist eine Zusammenfassung der Resultate, zu denen der Verfasser in der Untersuchung der algebraischen Functionen zweier Veränderlichen bisher gekommen ist, die zweite eine ausführliche Darstellung der neuen Reihenentwickelungen, auf welchen sich seine Theorie aufbaut.

Es werden in der zweiten zunächst die rationalen Functionen von x und y in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges $y_0 = \mathfrak{P}(x|\alpha)$ untersucht, welcher durch eine nach ganzen Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitende Potenzreihe dargestellt wird; es ergiebt sich, dass eine solche Function in eine nach ganzen Potenzen von $(y-y_0)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, deren Coefficienten mit y_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen sind, und welche in einem bestimmten Bereiche gleichmässig convergirt. In ähnlicher Weise lassen sich aber auch die algebraischen Functionen von x und y entwickeln. Ist nämlich z durch die Gleichung n-ten Grades mit ganzen Functionen von x und y als Coefficienten:

$$(1)\qquad f(z;x,y) = A_n(x,y)\,z^n + A_{n-1}(x,y)\,z^{n-1} + \cdots + A_1(x,y)\,z + A_0(x,y) = 0$$

definirt und der Curvenzweig l_0 durch die Potenzreihe

$$(2)\qquad y_0 = \mathfrak{P}(x|\alpha) = \beta_0 + \beta_1(x-\alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x-\alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \cdots$$

gegeben, so kann man stets n Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Form

$$(3)\qquad e_h(x|\alpha)\,(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h-1}(x|\alpha_0)\,(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

finden, welche in der Umgebung von l_0 convergiren und der Gleichung genügen. Die Coefficienten $e_h, e_{h+1}, \ldots$ sind algebraische Functionen, welche sämtlich auf einer und derselben Riemann'schen Fläche R_ν von ν Blättern eindeutig ausgebreitet werden können, auf welcher auch y_0 eine eindeutige Function des Ortes ist. Zu ihrer Bestimmung und zur Berechnung der Exponenten der Reihenglieder (also vor allem auch der Zahl b) dient ein Verfahren, welches eine Verallgemeinerung des bereits von Newton und Puiseux in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variable angewendeten Diagrammes ist, welches aber hier eine principielle Bedeutung gewinnt und in gleicher Weise zur Grundlage der

Behandlung der algebraischen Zahlen und algebraischen Functionen gemacht werden kann. Ist nämlich

$$A_h(x, y) = a_h(x|\alpha)\ (y - y_0)^{\varrho_h} + \cdots \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

construirt man ferner die $n+1$ Punkte $\mathfrak{A}_h = (h, \varrho_h)$, und ist $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_t$ eine Gerade, auf welcher zwei oder mehr Punkte $\mathfrak{A}_i$ gelegen sind, während alle übrigen Punkte $\mathfrak{A}_i$ darüber fallen, so ist die Steigung

$$\varepsilon_0 = -(\varrho_s - \varrho_t)/(s - t)$$

ein möglicher Anfangsexponent, und der zugehörige Coefficient e_0 ist aus der Gleichung $(t-s)$-ten Grades zu berechnen:

$$a_t(x|\alpha)\, e^{t-s} + \cdots + a_s(x|\alpha) = 0,$$

in welcher nur diejenigen Glieder $a_i(x|\alpha)\, e^{i-s}$ auftreten, deren zugehörige Punkte $\mathfrak{A}_i = (i, \varrho_i)$ auf die Begrenzungssehne $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_t$ fallen.

Im allgemeinen schreitet die Reihe (3) nach ganzen Potenzen $y - y_0$ fort; schreitet sie nach gebrochenen Potenzen fort, so ist die Curve $y = y_0$ eine Verzweigungscurve und ein Teiler der Discriminantencurve $D(x, y) = 0$, für deren Punkte zwei oder mehrere Wurzeln einander gleich werden. Die Primteiler der Discriminantencurve sind entweder Doppelcurven oder Verzweigungscurven.

Wenn die Coefficienten $e_h, e_{h+1}, \ldots$ auf einer ν-blättrigen Fläche R_ν eindeutig sind, y_0 aber nur die Ordnung μ hat, so ist $\nu = \lambda\mu$, und es gehören zu y_0 λ conjugirte Coefficientensysteme und Reihen, welche vermöge einer Gleichung λ-ten Grades aus y_0 hervorgehen. Daher lässt sich aus der Reihe (3) allgemein ein Cyklus von λb Wurzeln der Gleichung (1) ableiten. Ist $y = y_0$ eine Wurzel der irreduciblen Gleichung $P(y, x) = 0$, und besitzt diese ausserdem noch zwei weitere Wurzeln, zu denen resp. ein Cyklus von $\lambda' b'$ und $\lambda'' b''$ verschiedenen Entwickelungen von t gehören, so ist

$$\lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' = n,$$

und die Function $P(y, x)$ enthält drei verschiedene Primteiler p, p', p'', welche sich den Riemann'schen Flächen $R_\nu, R_{\nu'}, R_{\nu''}$ zuordnen lassen, und deren Verzweigungsordnungen resp. $b-1, b'-1, b''-1$ sind.

Mit Hülfe dieser Definition der Primdivisoren lässt sich jeder beliebigen algebraischen Function ζ des Körpers $K(z; x, y)$ ein völlig bestimmter Divisor

$$\mathfrak{D} = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

zuordnen, dessen Exponenten $k_1, k_2, \ldots, k_r$ die Ordnungszahlen von $\mathfrak{D}$ in Bezug auf die Primdivisoren $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sind. Der Divisor $\mathfrak{D}$ bestimmt die Function bis auf einen constanten Factor, wie in Riemann's Theorie eine Function durch ihre Nullstellen und Pole bis auf einen Factor bestimmt ist. Die Rechnung mit den Divisoren geschieht genau so wie in der Theorie der algebraischen Zahlen.

Zu diesen in der zweiten Arbeit ausführlich dargelegten Thatsachen fügt die erste noch einige Ergänzungen hinzu, deren Begründung später

erfolgen soll. Stellt man ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Functionen des Körpers auf, d. h. für diejenigen, welche nur für $x = \infty$ oder $y = \infty$ unendlich werden, so besteht dasselbe im Gegensatze zu einer Behauptung Kronecker's aus nur n Elementen $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)}$. Das Determinantenquadrat

$$\Delta(x, y) = |Z_i^{(k)}|^2 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist die Körperdiscriminante und enthält jeden Primteiler P in der Multiplicität ϱ, wobei unter den früher getroffenen Voraussetzungen über $P(x,y)$ $\varrho = \lambda(b-1) + \lambda'(b'-1) + \lambda''(b''-1) = n - (\lambda + \lambda' + \lambda'') = n - l$ ist. Zu jedem endlichen Divisor $\mathfrak{D}$ gehört ebenfalls ein Fundamentalsystem $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)}$ von n Elementen; reciproke Fundamentalsysteme

$$(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)}) \text{ und } (\overline{U^{(1)}}, \overline{U^{(2)}}, \ldots, \overline{U^{(n)}})$$

gehören zu zwei Divisoren $\mathfrak{D}$ und $\bar{\mathfrak{D}}$, welche an die Gleichung

$$\mathfrak{D}\bar{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\mathfrak{z}}$$

gebunden sind, wobei

$$\mathfrak{z} = \Pi\, p^{b-1}$$

den Verzweigungsdivisor bedeutet. Lsg.

R. Ziegel. Eine allgemeine Eigenschaft der algebraischen Functionen. Zeitschr. f. Math. **45,** 338.

„Zu jeder algebraischen Function lässt sich eine rationale Verbindung aus der Function selbst und ihrer ersten Ableitung bilden, deren Wert gleich der unabhängigen Variable ist.“ Wbg.

J. Ptaszycki. Sur la réduction d'un problème algébrique. C. R. **130,** 105-107.

Ein Problem der Reduction Abel'scher Integrale ist von Goursat (C. R. **108,** 515-517; vergl. F. d. M. **25,** 806, 1894) auf folgende algebraische Aufgabe zurückgeführt worden: Wenn auf einer algebraischen Curve $F(x, y) = 0$ vom Geschlechte p $2q$ Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_q$ und $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_q$ gegeben sind, so soll festgestellt werden, ob es eine rationale Function von x und y giebt, welche nur die Punkte A zu m-fachen Nullstellen und nur die Punkte A zu m-fachen Polen besitzt.

Diese Frage bringt der Verf. durch folgende Methode zur Entscheidung, welche ein Kettenbruch-Verfahren von Abel verallgemeinert: man bilde eine rationale Function $\Theta_1(x, y)$ von möglichst niedriger Ordnung mit den einfachen Nullpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_q$ und Polen $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_q$; diese mag ausserdem in $C_1', C_2', \ldots$ verschwinden und in $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots$ unendlich werden. Sodann bilde man eine Function

$\Theta_2(x, y)$ von möglichst niedriger Ordnung mit den Nullpunkten A_1 A_2, $\dots, A_q, \Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots$ und den Polen $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_q, C'_1, C'_2, \dots$, welche ebenfalls im allgemeinen weitere Nullpunkte und Pole hat, und so fortgehend die Functionenfolge: $\Theta_1, \Theta_2, \dots$.

Dann ist die Ordnung jeder Function höchstens $q+2p$, und damit die obige Aufgabe eine Lösung besitze, ist es notwendig und hinreichend, dass die Functionenfolge $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ periodisch ist. Lsg.

Ch. Michel. Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. C. R. **130**, 885-888.

Es werden zwei neue Formen des Abel'schen Theorems abgeleitet, die sich auf Integrale zweiter und dritter Gattung beziehen, und davon Anwendungen gemacht auf die Flächenräume, die entstehen, wenn zwei sich in allen ihren unendlich fernen Punkten osculirende Curven durch eine variable Curve geschnitten werden, und auf die Flächenräume, die entstehen, wenn eine Curve mit lauter Inflexions-Asymptoten durch eine variable Curve geschnitten wird, deren Gleichung ganz und rational von einem Parameter abhängt. Es ergeben sich so Analoga zu Theoremen, die Humbert für Bogenlängen bewiesen hatte (F. d. M. **26**, 660, 1895). St.

É. Picard. Sur une classe de transcendantes nouvelles. Acta Math. **23**, 333-337.

Es wird eine wichtige Ergänzung zu der ersten Abhandlung (F. d. M. **25**, 713-714, 1894) gegeben, in der gezeigt worden war, dass es Systeme von m eindeutigen Functionen $f_1(x), \dots, f_m(x)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $x=\infty$ giebt, die die Periode $\omega' i$ haben und, wenn x durch $x+\omega$ ersetzt wird, den Gleichungen genügen:

$$f_1(x+\omega)=R_1(f_1(x), \dots, f_m(x)),\ f_2(x+\omega)=R_2(f_1(x), \dots, f_m(x)),$$
$$\dots,\ f_m(x+\omega)=R_n(f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

wo die rationalen Functionen $R_1, R_2, \dots, R_m$ so beschaffen sind, dass

$$f'_1=R_1(f_1, \dots, f_m), \dots, f'_m=R_m(f_1, \dots, f_m)$$

eine birationale Transformation darstellt. Bei dem Beweise der Existenz musste vorausgesetzt werden, dass weder m noch die zu einem Doppelpunkte dieser Transformation gehörigen Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ gleich $e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}$ sind, wo ν eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Picard zeigt jetzt, wie man diese Einschränkungen beseitigen kann, indem man den Existenzbeweis passend ändert, nämlich statt der Polynome $Q_1, \dots, Q_n$ unendliche Reihen nimmt. Auf diese Weise fällt die Beschränkung für m sofort weg, während die Beschränkung für $\mu_1, \dots, \mu_m$ dadurch gehoben wird, dass das Problem durch die Sub-

stitution $f_a(x) = \lambda(x) F_a(x)$, wo $\lambda(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Multiplicatoren 1 und a bedeutet, auf ein ähnliches zurückgeführt wird, bei dem statt der Constanten $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die Constanten $\mu_1/a, \ldots, \mu_m/a$ erscheinen. Da nun a ganz beliebig ist, kann man darüber so verfügen, dass keine singulären Werte auftreten. St.

A. Pringsheim. Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen. Münch. Ber. **30,** 541-552.

Jacobi's Beweis, dass eine Function $f(u)$, die in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Perioden besitzt, höchstens doppeltperiodisch sein kann, leidet an dem Mangel, dass die Existenz primitiver Perioden nicht vollständig in Evidenz gesetzt wird. Deshalb ist es zweckmässiger, wie das Weierstrass für den Fall mehrerer Veränderlichen gethan hat, zunächst die Existenz primitiver Perioden festzustellen, woraus alsdann der Satz von Jacobi als unmittelbare Folgerung resultirt. Pringsheim, der sich auf den Fall einer Veränderlichen beschränkt, hat ebenfalls diesen Weg eingeschlagen, jedoch seiner Darstellung eine etwas andere, principiell einfachere Auswahl der primitiven Perioden zu Grunde gelegt, die einen genauen Ueberblick über die verschiedenen Möglichkeiten bezüglich der Anzahl und der Grössenverhältnisse der primitiven Perioden gestattet.

Zunächst wird gezeigt, dass alle einer Function vom Charakter $f(u)$ zukommenden Perioden Ω, welche gegenseitig in reellem Verhältnisse stehen, sich als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω_1 darstellen lassen. Sind alsdann ω und ω' Perioden von $f(u)$ mit nichtreellem Verhältnisse und ausserdem von der Beschaffenheit, dass ausser $h = \omega$ und $h = \omega'$ keine Zahl von der Form

$$h = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' \quad (\varepsilon, \varepsilon' \geqq 0, \varepsilon + \varepsilon' \leqq 1)$$

eine Periode von $f(u)$ bildet, so lässt sich jede Periode Ω in der Form darstellen $\Omega = m\omega + m'\omega'$, wo m und m' ganze Zahlen (einschliesslich der Null bedeuten); ω und ω' heissen alsdann primitive Perioden. Jetzt ergiebt sich weiter: Giebt es unter den Perioden Ω von $f(u)$ solche mit nichtreellem Verhältnisse, und bezeichnet man mit ω_1 irgend ein Ω, für welches $|\omega_1|$ unter allen möglichen $|\Omega|$ ein Minimum ist, sodann mit ω_2 ein anderes Ω, für welches $|\omega_2|$ unter allen nach Ausscheidung von $\Omega = \nu\omega_1$ $(\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ übrig bleibenden $|\Omega|$ gleichfalls ein Minimum ist (wobei also $|\omega_2| \geqq |\omega_1|$ wird): so sind ω_1 und ω_2 primitive Perioden. Dieser Lehrsatz wird endlich durch den Beweis ergänzt, dass es, abgesehen von dem noch willkürlichen Vorzeichen, höchstens drei Minimalperioden giebt, d. h. drei paarweise in nichtreellem Verhältnisse zu einander stehende, noch nach Willkür mit beliebigen Vorzeichen zu versehende Perioden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, die der Bedingung genügen: $|\omega_1| \leqq |\omega_2| = |\omega_3|$, während ausser $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$ keine Periode existirt, für die $|\Omega| \leqq |\omega_2|$ ist. Zugleich stellt sich heraus,

dass ausser ω_1, ω_2 und ω_1, ω_3 auch ω_2, ω_3 ein primitives Periodenpaar bilden. St.

G. Humbert. Sur les fonctions à quatre paires de périodes. C. R. **130,** 483-486.

Die hyperelliptischen Functionen, zu denen das Jacobi'sche Umkehrungsproblem für Curven vom Geschlechte 2 führt, sind eindeutige Functionen von zwei Veränderlichen mit den vier Periodenpaaren $(1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g')$; dabei ist, wenn g_1, h_1, g'_1 die rein imaginären Bestandteile von g, h, g' bezeichnen, $h_1^2 - g_1 g'_1$, wesentlich negativ. Humbert zeigt, dass es auch eindeutige Functionen von zwei Veränderlichen giebt, bei denen $h_1^2 - g_1 g'_1$ positiv ist, sobald nur die Relation von Appell:

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten besteht und

$$4AC + 4DE - B^2$$

wesentlich negativ ist, ebenso, dass auch das vierte Periodenpaar die Form (h', g') haben kann, wo h' von h verschieden ist, sobald nur die Relation von Appell

$$Ag + Bh + B'h' + Cg' + D(hh' - gg') + E = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten besteht und

$$(AC + DE - BB')(h_1 h'_1 - g_1 g'_1)$$

wesentlich negativ ist. Endlich ergiebt sich, dass in beiden Fällen die betrachteten Functionen sich durch Thetafunctionen darstellen lassen, und dass sie für die Theorie der von Humbert untersuchten hyperelliptischen Flächen von Wichtigkeit sind. St.

R. Fricke. Die Ritter'sche Primform auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche. Gött. Nachr. 1900, 314-321.

J. Wellstein. Ueber Primformen auf Riemann'schen Flächen. Gött. Nachr. 1900, 380-396.

Als Ritter die Theorie der automorphen Functionen beliebigen Geschlechtes p vermöge algebraischer Mittel neu zu begründen unternahm, hat er zunächst die Theorie der Klein'schen Primformen Ω einer wesentlichen Ausgestaltung unterzogen und im besonderen das Verhalten von $\log \Omega$ bei beliebigen Umläufen der Stelle x auf der Riemann'schen Fläche klargestellt. Durch Division mit einer „Mittelform" gelangte er von den Klein'schen Primformen zu den von Fricke nach Ritter benannten Primformen P, die sich dadurch auszeichnen, dass sie bei den Umläufen einen von x unabhängigen Factor aufnehmen (während bei den Formen Ω eine Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals als Factor hinzutritt). Die Durchführung der Discussion der Primformen P gelang Ritter nur vermöge einer ausgedehnten Kette schwieriger Be-

trachtungen, die, wie Fricke bemerkt, zwar der bewunderungswürdigen Kraft ihres leider so früh dahingeschiedenen Verfassers das rühmendste Zeugnis ausstellen, die jedoch bei der fundamentalen Bedeutung, die den Primformen P für die Theorie der automorphen Functionen zukommt, eine Vereinfachung der Theorie sehr wünschenswert machen.

Eine solche Vereinfachung zu finden, ist Fricke gelungen, der in der vorliegenden Note in höchst eleganter Weise Formeln für die Multiplicatoren der Ritter'schen Primformen herleitet. Einem geschlossenen Umlaufe der Stelle x, die sich auf z im positiven Sinne gemeinte Umläufe um den Punkt $x = \infty$ zusammenziehen lässt, entspricht nämlich die Abänderung des Logarithmus der Ritter'schen Primform $P(x, e)$:

$$\overline{\log} P(x, e) = \log P(x, e) + 2\pi i \frac{\sigma + \tau}{m} - 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \nu_k W_k^e,$$

wenn der Umlauf die Schnitte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (die von e aus nach den als verschieden vorausgesetzten m Stellen $x = \infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_m$ der m-blättrigen Riemann'schen Fläche des Geschlechtes p laufen) insgesamt σ Male öfter von links nach rechts als von rechts nach links überschreitet und desgleichen die kanonischen Schnitte $b_1, b_2, \ldots, b_p$ von links nach rechts $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ Male öfter als in der entgegengesetzten Richtung, während die Integrale erster Gattung W_k^e mit den zu dem kanonischen Querschnittsystem gehörenden Normalintegralen erster Gattung $j_1, j_2, \ldots, j_k$ durch die Gleichungen

$$W_k^e = \frac{1}{m} (j_k^{e, \infty_1} + j_k^{e, \infty_2} + \cdots + j_k^{e, \infty_m})$$

bei den Integrationswegen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ verbunden sind.

Für Fricke dient, wie für Ritter, die transcendent normirte Klein'sche Primform Ω als Durchgangspunkt der Betrachtung. Da aber die Form Ω durch die Form $P(x, e)$ vollkommen entbehrlich gemacht wird, muss es auch möglich sein, direct zu der Aufstellung und den Eigenschaften der Ritter'schen Primformen zu gelangen. Eine solche independente Darstellung hat Wellstein gegeben, indem er von der Primform

$$P_z(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = \sqrt[m]{(xz)}\, e^{R_z(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})}$$

ausging, wo $R_z(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ ein Integral dritter Gattung bezeichnet, das nur in $\mathfrak{p}$ und in m conjugirten Punkten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m$ der Riemann'schen Fläche logarithmisch unendlich wird. Für das Integral $R_z(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$, das für $q_1, q_2, \ldots, q_m = \infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_m$ in das Christoffel'sche Integral $R(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ übergeht, giebt der Verf. eine ganz allgemein gültige Darstellung, bei der über die Beschaffenheit der irreduciblen Grundgleichung nichts vorausgesetzt zu werden braucht. Zum Schluss wird der Fall besprochen, dass die Unstetigkeiten von $R_z(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ nach $\mathfrak{p}$ und den dazu conjugirten Punkten fallen. St.

R. Fricke. Die automorphen Elementarformen. Gött. Nachr. 1900, 303-313.

In den beiden letzten Paragraphen seiner Abhandlung über eindeutige automorphe Formen vom Geschlechte Null (F. d. M. **24**, 391-393, 1892) hat Ritter die Theorie der automorphen Elementarformen behandelt, die bereits bei Poincaré als „éléments simples" aufgetreten waren, d. h. solche automorphe Formen $\Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$ von ζ_1, ζ_2, die nur an einer Stelle ξ_1, ξ_2 des Fundamentalbereiches von der ersten Ordnung mit dem Coefficienten 1 unendlich werden. Die Wichtigkeit der Elementarformen besteht darin, dass man jede automorphe Form von geeignetem positiven Grade mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen als Summe von Elementarformen ihrer einzelnen Unendlichkeitsstellen darstellen kann. Wie Fricke bemerkt, ist Ritter noch nicht überall zu der einfachsten Gestalt der Theorie der Elementarformen durchgedrungen, und seine Entwickelungen sind auch nicht an allen Stellen einwurfsfrei, indem er es unterlässt, das Verhalten der durch eine Poincaré'sche Reihe

$$\sum_k \varrho_k^{-1} \frac{\varphi_{R+1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}{(\zeta^{(k)}, \xi)\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)}$$

dargestellten Elementarformen für den Fall klarzustellen, dass entweder ζ oder ξ in eine feste Polygonecke rückt. Vor allem handelt es sich deshalb in der vorliegenden Abhandlung darum, das analytische Bildungsgesetz von Ω in den parabolischen Zipfeln zu ermitteln. Die Untersuchung wird unter der Beschränkung auf $p = 0$ durchgeführt; jedoch bleiben, wie Fricke bemerkt, die ihr zu Grunde liegenden Gedanken in der Hauptsache auch für $p > 0$ gültig. St.

A. C. Dixon. Notes on the theory of automorphic functions (continued). Lond. M. S. Proc. **32**, 353-376.

Fortsetzung der Abhandlung, über die in F. d. M. **30**, 383, 1899, berichtet worden ist. Der Verf. hatte sich dort die Aufgabe gestellt, die fundamentalen Sätze von Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale mit Hülfe der Poincaré'schen Reihen abzuleiten, war jedoch genötigt gewesen, um einen strengen Beweis zu erhalten, an einer Stelle zu der älteren Methode zurückzukehren. Jetzt zeigt er, wie man auf Grund von Sätzen über die Bildung Theta-Fuchs'scher Reihen mit gegebenen Polen diese Lücke ausfüllen kann. St.

F. Lindemann. Zur Theorie der automorphen Functionen II. Münch. Ber. 1900, 493-510.

R. Fricke hatte dem Verfasser mitgeteilt, dass das von ihm in seiner ersten Abhandlung gefundene Theorem in Widerspruch stehe mit

einem Satze von Ritter, auf den auch der Referent F. d. M. **30**, 381, 1899, hingewiesen hatte. Der Verf. giebt zu, dass seine erste Darstellung Fehler enthalte (Verwechselung von $\frac{d_i}{c_i}$ mit $\frac{c_i}{d_i}$, irrtümliche Angabe über die Anzahl der Nullstellen der Function $\Theta_i(\zeta)$), hält jedoch sein Endergebnis aufrecht und will deshalb den Beweis mit grösserer Ausführlichkeit und unter Hinzufügung von Ergänzungen wiederholen, sowie den Widerspruch mit dem Satze von Ritter aufklären.

Den Satz von Ritter, dass $\Sigma|f_i'(z)|$ divergirt, wenn die Grenzpunkte sich längs einer Curve häufen, erkennt Lindemann ausdrücklich als richtig an. Damit ist jedoch die von ihm behauptete absolute Convergenz von $\Sigma f_i'(z)$ schlechterdings unverträglich; denn auf den Wert einer unbedingt convergenten Reihe hat die Reihenfolge der Summation keinen Einfluss, und das gilt auch, entgegen der Behauptung von Lindemann, wenn man aus einer unbedingt convergenten Reihe unendliche Teilreihen herausnimmt, für sich summirt und dann die Teilsummen zusammenfasst (vergl. Pringsheim, Berichte, München 1897, und Encykl. d. math. Wissenschaften, I. 99). Die von ihm gebotene Aufklärung kann daher nicht befriedigen, und so bleibt nur übrig anzunehmen, dass auch sein zweiter Beweis nicht ausreichend ist.

In der That giebt der Beweis zu Bedenken Anlass: 1. Aus der Gleichung $|f_k'(z)|=|f_\lambda'(z)|$ folgt nicht, dass $c_k=c_\lambda$ und $d_k=d_\lambda$ sein muss (S. 496). 2. In der Gleichung (16) kann man β nicht so bestimmen, dass die eckige Klammer von Null verschieden ist, da es wegen der Bedingung $g'(\zeta)=0$ darin gar nicht vorkommt (S. 497). 3. Die Convergenz der abgeleiteten Reihe (16) hätte untersucht werden müssen (S. 497). 4. Dass $\lim_{i=\infty}\Theta_i(\zeta)=H(\zeta)$ ist, bedarf eines Beweises (S. 498). 5. Die Einschränkungen für die Wahl der Stelle ζ (S. 498) sind nicht genau präcisirt; sie sind überdies mit der Behauptung unverträglich, dass $\Sigma f_i'(z)$ im ganzen Fundamentalbereiche convergire. 6. Daraus, dass (S. 499) in

$$Q_i=\sum_{k=j+1}^{\infty}H'(f_k(\zeta))\left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i+1}$$

der absolute Betrag von $f_k'(\zeta)$ kleiner ist als der absolute Betrag von $f_j'(\zeta)$, folgt nicht, dass die absoluten Beträge der Grössen $Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2},\dots$ beständig abnehmen; denn es ist z. B. $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$, obwohl $\frac{7}{8}<1$, $\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$ ist. Ohne Zweifel würde sich die Anzahl solcher Bedenken noch beträchtlich vermehren lassen. St.

Weitere Litteratur.

H. F. Baker. On the theory of functions of several complex variables. Cambr. Trans. 18, 408-443.

F. Beer. Kriterien für die Irrationalität von Functionalwerten. Diss. Göttingen. 61 S. 8⁰ (1899).

G. BORNEMANN. Analytische Studien. Chemnitz. 28 S. 4°.

E. HOLMGREN. Sur l'inversion des intégrales définies. Stockh. Akad. Bihang 25, No. 3, 19 S. [F. d. M. 30, 355, 1899.]

B. VON LUDWIG. Ueber die Notwendigkeit der Beschränkung des Jacobi'schen Umkehrproblems auf Abel'sche Integrale erster Gattung. Diss. Halle. 94 S. 8°.

J. LÜROTH. Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander. Erlang. Ber. 31, 86-91 (1899).

G. MITTAG-LEFFLER. On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function. Cambr. Trans. 18, 1-11.

É. PICARD. Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. Rev. générale des sc. 11, 589-597.

É. PICARD et G. SIMART. Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Vol. II. Fascicule I. Paris: Gauthier-Villars. IV + 206 S. gr. 8°.

Kapitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihe).

TH. VAHLEN. Beweis des Lindemann'schen Satzes über die Exponentialfunction. Math. Ann. 53, 457-460.

Dieser arithmetisch-algebraische Beweis beruht auf den Eigenschaften der ganzen rationalen Zahl $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) =$

$$\Sigma(-1)^{h+i+k+\cdots}\binom{p}{h}\binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots\frac{[(\nu+1)p-h-i-k-\cdots-1]!}{(p-1)!}\alpha^h\beta^i\gamma^k\cdots$$
$$(h, i, k, \ldots = 0, 1, \ldots, p),$$

wo die ν Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ conjugirte ganze algebraische Zahlen ν-ter Ordnung sind und p eine hinreichend grosse Primzahl ist.

Dem Lindemann'schen Satze kann man, wie der Verf. zum Schluss hervorhebt, die besondere Fassung geben:

„Die Summe $\Sigma_x e^x$, bezogen auf alle Wurzeln x einer ganzzahligen Gleichung: $c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$, jede in ihrer richtigen Vielfachheit genommen, ist eine charakteristische Invariante der Gleichung, für jede Gleichung von anderem Werte, so dass durch die eine Zahl $\Sigma_x e^x$ die sämtlichen Coefficienten der Gleichung bestimmt sind."

Hau.

V. JAMET. Sur un théorème de M. Lindemann. Marseille Ann. **11**, Sep.-Abdr. 1-10.

Die vorliegende Arbeit besteht in einer Verallgemeinerung der von Hurwitz (Math. Ann. **43**, 1893) befolgten Methode, um die Transcendenz der Zahl e zu beweisen; dieser benutzte in seinem Beweise die sogenannte Formel der endlichen Zuwächse für den besonderen Fall einer reellen Veränderlichen. Darboux (Journ. de Math. (3) **2**, 291) und Mansion (Brux. S. sc. 1885/86) haben diese Formel auf den Fall einer complexen Veränderlichen ausgedehnt. Mit Hülfe dieser Erweiterung beweist Verf. den Lindemann'schen Satz über die Unmöglichkeit der Gleichung

$$N + N_a(e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n}) + N_b(e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_p}) \\ + N_h(e^{h_1} + e^{h_2} + \cdots + e^{h_r}) = 0,$$

wo die N ganze Zahlen bedeuten und die in derselben Klammer vorkommenden Exponenten Wurzeln einer und derselben Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sind, und leitet daraus in bekannter Weise die Transcendenz von e und π ab. Verf. bewegt sich dabei in dem Ideenkreise von Hermite, Gordan und Hilbert. Wbg.

V. JAMET. Sur la transcendance des nombres e et π. Ens. math. **2**, 355-362.

Für den Nachweis der Transcendenz der Zahlen e und π hatte Lindemann den Satz aufgestellt:

Der Ausdruck

$$A_0 + A_1(e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n}) + A_2(e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_q}) + \cdots \\ + A_m(e^{l_1} + e^{l_2} + \cdots + e^{l_r}),$$

in welchem $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ganze Zahlen bezeichnen und die in derselben Klammer stehenden Exponenten der Potenzen von e die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sind, kann niemals den Wert Null haben.

Den Beweis dieses Satzes hat Gordan auf Betrachtungen elementarer Art zurückgeführt. Eine leichte Vereinfachung der Gordan'schen Methode teilt Jamet in der vorliegenden Veröffentlichung mit. Hau.

B. KAGAN. Neuer Beweis der Transcendenz von e und π. Spaczinski's Bote No. 286, 223-231; No. 287, 251-266; No. 290, 25-35; No. 291, 56-63. (Russisch.)

Historische Uebersicht und Beweis von Th. Vahlen. Si.

C. Störmer. Sur les logarithmes des nombres algébriques. C. R. **130**, 1603-1605.

Bei der Kettenbruchentwickelung von $\log A/\log B$, wo A und B positive algebraische Zahlen > 1 sind, existirt eine ähnliche Ungleichung, wie sie Liouville in seinem Journal Bd. **16** für algebraische Zahlen gefunden hat. Aus dieser folgt die Existenz transcendenter Zahlen, die nicht gleich dem gemeinen Logarithmus einer positiven algebraischen Zahl sind, was sich übrigens auch aus der Cantor'schen Mengenlehre ergiebt.
Wbg.

M. Lazzarini. Ricerche sopra una nuova espressione di π in funzione di soli numeri primi e sulla fattoriale di un numero. Periodico di Mat. (2) **3**, 49-68.

Der Verf. schreibt die Wallis'sche Formel in der Gestalt:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)}$$

und untersucht die gemeinschaftlichen Functionen des Zählers und Nenners dieses Ausdrucks. Nach Fortheben derselben bleiben natürlich nur Primzahlen übrig. Zuletzt werden Betrachtungen über die Fehlergrenzen bei numerisch gegebenem n angestellt. Tabellen für $2^x, 3^x, 5^x, 7^x$ bis $x = 50$, sowie für $x!$ bis $x = 25$ machen den Beschluss. Lp.

H. Laurent. Note sur les logarithmes. Ens. math. **2**, 450-451.

Im Anschluss an einen früheren Artikel (Ens. math. **1**, 381-419; F. d. M. **30**, 62, 1899) wird die Existenz der Logarithmen bewiesen.
Wz.

P. Barbarin. Les fonctions hyperboliques dans l'enseignement moyen. Ens. math. **2**, 443-447.

Der Verf. betont die Wichtigkeit eines eingehenderen Studiums der hyperbolischen Functionen; als Beispiel behandelt er die Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ und $x^3 + px + q = 0$ mittels derselben.
Wz.

M. Pétrovitch. Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationnelles de la fonction exponentielle. Palermo Rend. **14**, 22-27.

Der Verfasser bestimmt die Form der Coefficienten der Potenzreihenentwickelung einer rationalen Function von e^{ax}. Vi.

H. R. G. Opitz. **Die Kramp-Laplacesche Transcendente und ihre Umkehrung.** Pr. (No. 101) Königstädt. Realgym. Berlin. 29 S. 4°.

Unter der Kramp-Laplace'schen Transcendente ist die bekannte, durch die Gleichung

$$\sqrt{\pi} \cdot \Phi(x) = 2\int_0^x e^{-u}\, dt$$

definirte eindeutige analytische Function $\Phi(x)$ der reellen Veränderlichen x zu verstehen. Für diese Function $\Phi(x)$ waren zunächst verschiedene Tafeln berechnet, in welchen die Argumente um 0,01 wachsen, und später, als sich das Bedürfnis nach genaueren Tafeln ergab, solche, in welchen die Argumente um 0,0001, bez. für besondere Fälle um 0,00001 wachsen. Diese Tafeln wurden bisher stets auch benutzt, um umgekehrt die Gleichung $\Phi(x) = a$ zu lösen, d. h. für einen gegebenen Functionswert a den zugehörigen Argumentwert x zu bestimmen. Dieses Verfahren erfordert natürlich zeitraubende Interpolationen, weshalb es vorteilhafter erscheint, eine directe Methode zur Lösung der genannten Gleichung zu entwickeln und eine Tafel für die Umkehrung der Transcendente $\Phi(x)$ herzustellen. Der Lösung dieser Aufgabe ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

Die Schrift zerfällt in zwei Teile. In dem ersten Teile sind zunächst die wichtigsten Eigenschaften und Methoden zur Berechnung der Kramp-Laplace'schen Transcendente zusammengestellt. Der zweite Teil giebt dann die Lösung der vorliegend gestellten Aufgabe; der Verf. leitet eine gewisse Function Ω ab, welche eine directe Lösung der Gleichung $\Phi(x) = a$ ermöglicht. Am Schlusse dieses Teiles wird als Beispiel die sogenannte Encke'sche Constante ϱ, welche den wahrscheinlichen Fehler einer bestimmten Gattung von Beobachtungen giebt und durch die Gleichung $\Phi(\varrho) = \frac{1}{2}$ bestimmt ist, auf zehn Decimalstellen genau berechnet.

Im Anhange findet man eine Zusammenstellung der bekanntesten Tafeln für die Function $\Phi(x)$ und mit ihr zusammenhängende Integrale und ferner eine Tafel für die oben erwähnte Function Ω für die im Abstande von 0,01 auf einander folgenden Werte des Arguments von 0 bis 1.

Hau.

E. B. Elliott. **Question 14164.** Ed. Times 72, 89-90.

Wenn a und b positive Moduln sind, $\alpha - \beta$ zwischen 0 und 2π liegt, $f(z)$ eine Function der complexen Variable $z = re^{i\Theta}$ ist, die sich bestimmten Grenzen $f(0)$ und $f(\infty)$ nähert, wenn z unendlich klein und unendlich gross innerhalb des Sectors von $\Theta = \beta$ bis $\Theta = \alpha$ wird, und die innerhalb und auf den Grenzlinien des Sectors mit Ausschluss einfacher Pole $c_1, c_2, \ldots, c_n$ im Innern des Sectors holomorph ist, so gilt die Frullani'sche Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{f(ae^{i\alpha}x)-f(be^{i\beta}x)=\{f(\infty)-f(0)\}\{\log a/b+i(\alpha-\beta)\}\right.$$
$$-2\pi i\sum_{r=1}^{r=n}\left[(z-c_r)\frac{f(z)}{z}\right]_{(z=c_r)}.$$

Beweise von G. H. Hardy, H. W. Curjel. Lp.

H. Renfer. Die Definitionen der Bernoulli'schen Function und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist. Diss. Bern: K. J. Wyss. 100 S. 8° + 4 Tafeln.

Ausser Raabe, welcher die Bernoulli'sche Function zuerst in die Analysis eingeführt hat, haben vornehmlich noch Schlömilch, Schläfli, J. W. L. Glaisher sich mit dieser Function eingehend beschäftigt. Wahrscheinlich hat sogar Schläfli, welcher seine Untersuchungen nicht veröffentlicht hatte, diese Function früher als Raabe entdeckt, ohne sie aber Bernoulli'sche Function zu nennen (vgl. diesen Band S. 321-322). Jeder dieser Autoren benutzt aber eine andere Definition der Bernoulli'schen Function, Glaisher hat sogar selbst mehrere von einander abweichende Definitionen aufgestellt.

Es entsteht daher die Aufgabe, den Zusammenhang der verschiedenen Definitionen der Bernoulli'schen Function zu ermitteln und zu entscheiden, welche dieser Definitionen die für die Theorie geeignetste ist. Zu dem Zwecke war es notwendig, zunächst die einzelnen Definitionen eingehend zu behandeln, was der Reihe nach mit den Definitionen der oben genannten Autoren geschieht. Die hierdurch gebildeten vier Abschnitte sind im wesentlichen gleichartig gegliedert (Herleitung der Definition, Derivirte, Function mit inversem und negativem Argument, Discussion der Definition, Entwickelung in Reihen, die Function als bestimmtes Integral, bez. in bestimmten Integralen).

Der fünfte Abschnitt endlich enthält die Beantwortung der oben gestellten Aufgabe. Der Verf. gelangt zu dem Resultate, dass die von Schläfli benutzte Definition der Bernoulli'schen Function die für die Theorie geeignetste ist, weil sie die allgemeinste ist, ihr Convergenzgebiet sich am weitesten ausdehnt, alle Formeln einfachere Gestalt annehmen und sich die ganze Theorie am einheitlichsten aufbaut. Hau.

J. C. Kluyver. Verallgemeinerung einer bekannten Formel. Nieuw Archief (2) 4, 284-291.

Aus der Function $\sum\limits_1^\infty e^{-ny}=\varphi(y;0)$, welche, im Bereiche von $y=0$ entwickelt, die Definitionsgleichung der Bernoulli'schen Zahlen liefert, ergeben sich durch Differentiation die Functionen:

$$\varphi(y;s) = \sum_{0}^{\infty} m^s e^{-my}.$$

Der Verf. giebt vermittelst Riemann'scher ζ-Functionen eine für positive und negative Werte gültige Darstellung der Functionen $\varphi(y;s)$ und weist die Singularität der Punkte $\pm 2\pi i m$ nach. Die erhaltenen Formeln ermöglichen die Herstellung von Recursionsformeln, welche zur Ermittelung der Functionswerte $\zeta(2m+1)$ benutzt werden können und auf einen gewissen, wenn auch ziemlich verwickelten Zusammenhang von $\zeta(2m+1)$ mit den Bernoulli'schen Zahlen und mit π schliessen lassen. Ot.

J. Deruyts. Rapport sur un Mémoire de M. Beaupain intitulé: „Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de Jacques Bernoulli.“ Belg. Bull. Sciences 1900, 255-257.

Untersuchung gewisser Zahlen $B_{2n-1,p}$, die in der Entwickelung des ersten Euler'schen Integrales $B(p+q, p-q)$ in eine Potenzreihe vorkommen. Mn. (Lp.)

F. J. Studnička. Ueber ein Analogon der Euler'schen Zahlen. Prag. Ber. 1900, No. 9, 8 S.

Die Abhandlung trägt Eulen nach Athen. Die Tangentencoefficienten sind als Analoga zu den Euler'schen Zahlen längst und genau bekannt, wie z. B. auch die „Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen“ von L. Saalschütz, welche der Verf. selbst citirt, zeigen. Dort ist auch zu lesen, dass nicht nur die ersten 32, wie der Verf. behauptet, sondern bereits die ersten 62 Bernoulli'schen Zahlen (von Adams) berechnet sind. Han.

F. J. Studnička. Ueber neue Fermat'sche Lehrsätze. Časopis 29, 257-261. (Böhmisch.)

Unter Zuhülfenahme der Coefficienten der Reihen für tg$x$ und sec$x$ gelangt der Verfasser zu neuen unabhängigen Formeln, welche es ermöglichen, die Euler'schen Zahlen E mit Hülfe der mit denselben analogen Zahlen A auszudrücken, auf welche letzteren als „Analoga der Euler'schen Zahlen“ von dem Verf. in Prag. Ber. 1900 aufmerksam gemacht wurde. (Vergl. den vorangehenden Bericht.) Sda.

Ch. Hermite. Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Pincherle. Annali di Mat. (3) 5, 57-72.

In dem ersten Briefe (vom 10. Mai 1900) leitet Hermite die Formel ab:

$$\log \Gamma(a+x) - \log \Gamma(a) = x \log a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta \log a + \cdots$$
$$+ \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \Delta^{n-1} \log a + \cdots,$$

welche für alle positiven Werte von a gilt und für alle positiven Werte von x convergirt. Als speciellen Fall liefert sie:

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \log 2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\log 3 - 2 \log 2)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\log 4 - 3 \log 3 + 3 \log 2) + \cdots,$$

welcher Ausdruck für $\log \Gamma(1+x)$ einen völlig anderen Charakter hat, als der durch die bekannte Formel

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{S_2 x^2}{2} - \frac{S_3 x^3}{3} + \cdots$$
$$\left(S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\right)$$

gegebene Ausdruck.

Aber nicht nur für $\log \Gamma(1+x)$ gilt eine derartige Entwickelung, sondern allgemeiner für jede Function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y) e^{xy} + x \cdot \varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy$$

ist, wie Hermite in den beiden folgenden Briefen (vom 19. Mai und 8. Juni 1900) zeigt, für positive Werte von a die analoge Reihenentwickelung

$$\Phi(a+x) - \Phi(x) = \frac{x}{1} \cdot \Delta \Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \Phi(a) + \cdots,$$

gültig und für alle positiven Werte von x convergent. Als Beispiel betrachtet Hermite das Integral

$$J(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{xy} \frac{e^y(y-2)+y+2}{2y^3(e^y-1)}\, dy$$

der Stirling'schen Formel und ermittelt ferner den asymptotischen Wert von $\Phi(a)$ für sehr grosse Werte von a.

In dem vierten Briefe (vom 10. Aug. 1900) wendet Hermite die obige Reihenentwickelung auf die Function

$$R(a, s) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \frac{1}{(a+2)^s} + \cdots \qquad (|s| > 1)$$

an und findet:

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}} + \frac{1}{2a^s} + \frac{1}{2^{s-1}\, a^{s-1}} \left[\frac{s}{1} J_1 + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} J_2 + \cdots\right],$$

wo

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2n\varphi}{\cos^2\varphi\,(e^{2\pi\cdot a \operatorname{tg}\varphi} - 1)}\,d\varphi$$

gesetzt ist.

Der letzte Brief (vom 24. Aug. 1900) beschäftigt sich noch näher mit diesen Integralen J_n. Hau.

N. Jörgensen. Et Integraludtryk for $\frac{1}{\Gamma(\mu)}$. Nyt. Tidss. for Math. 11 B, 34-40.

Du Bois-Reymond hat bewiesen, dass die Formel

$$M(\mu) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}\,\Gamma(\mu)}$$

gilt, wenn μ reell und $2 > \mu > 0$. Es wird hier bewiesen, dass die Formel richtig ist, auch wenn μ imaginär, in allen Fällen, in welchen das Integral convergent ist, und dass dieses stattfindet, wenn nur $2 > R(\mu) > 0$.

Braucht man die Lipschitz'sche Bezeichnung

$$\zeta(v, b, \mu) = \lim_{N=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=N} \frac{e^{-2\nu\pi t}}{(v+\nu)^\mu},$$

so erhält man:

$$\int_0^\pi \sin x \cdot \zeta\left(\frac{x}{\pi}, \pm(2\nu+1)\frac{i}{2}, \mu\right) dx = \frac{\frac{1}{2}\pi(\mu+1)}{\sin\frac{\pi\mu}{2}\cdot\Gamma(\mu)},$$

eine Formel, die immer richtig ist, wenn das Integral überhaupt einen Sinn hat. V.

N. Nielsen. Om visse Generalisationer af den Prym'ske Function $P(x)$. Nyt Tidss for Math. 11 B, 73-77.

Der Verf. betrachtet die Functionen

$$f_k(x) = \int_0^1 \varphi_k(z)\, z^{x-1}\,dz,\; g_k(x) = \int_0^1 \psi_k(z)\, z^{x-1}\,dz,$$

wo $R(x) > 0$, und wo

$$\varphi_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu\, x^{n\nu+k-1}}{(n\nu+k-1)!},\quad \psi_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{x^{n\nu+k-1}}{(n\nu+k-1)!}.$$

Durch partielle Integration erhält man hieraus

$$f_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=k-1} (-1)^\nu \varphi_{k-\nu}(1) F_{\nu+1}(x)$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-k-1} (-1)^\nu \varphi_{n-\nu}(1) F_{k+\nu+1}(x),$$
$$g_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=k-1} (-1)^\nu \psi_{k-\nu}(1) G_{\nu+1}(x)$$
$$+ (-1)^k \sum_{\nu=0}^{\nu=n-k-1} (-1)^\nu \psi_{n-\nu}(1) G_{k+\nu+1}(x),$$

wo

$$F_r(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu(n-1)}}{x(x+1)\cdots(x+\nu n+\nu-1)},$$
$$G_r(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu n}}{x(x+1)\cdots(x+\nu n+\nu-1)}.$$

Die Functionen $f_k(x)$ und $g_k(x)$ sind also lineare Functionen von den $F(x)$ und $G(x)$. Betrachtet man umgekehrt die Functionen $F_p(x)$ und $G_p(x)$ als unbekannt, so findet man, dass die Determinante der Gleichungen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ist, und dass sie leicht als lineare Functionen von den $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt werden können. Setzt man nun endlich

$$\varDelta(f) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \cdots & f_n \\ -f_n & f_1 & f_2 \cdots & f_{n-1} \\ -f_{n-1} & -f_n & f_1 \cdots & f_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -f_2 & -f_3 & -f_4 \cdots & +f_1 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet durch $E(f)$ dieselbe Determinante, wenn nur die negativen Vorzeichen fortfallen, so ergiebt sich:

$$\varDelta(F) = \varDelta(f) \text{ für } n \text{ gerade},$$
$$E(F) = \varDelta(f) \text{ für } n \text{ ungerade},$$

und

$$E(G) = E(g) \text{ für } n \text{ gerade},$$
$$\varDelta(G) = E(g) \text{ für } n \text{ ungerade}.$$

V.

E. W. Barnes. The theory of the double gamma function. Lond. R. S. Proc. 66, 265-266.

Soviel sich aus dem ganz kurzen Auszug (Inhalt eines Vortrages) entnehmen lässt, handelt es sich um Functionen, die definirt sind durch einen Teil des unendlichen Products, das die Weierstrass'sche Sigmafunction definirt. Es werden einige Eigenschaften solcher Functionen angeführt.

Br.

M. B. Porter. **Note on the enumeration of the roots of the hypergeometric series between zero and one.** American M. S. Bull. (2) **6,** 280-282.

Vereinfachung des vom Verf. früher (vergl. F. d. M. **28,** 381, 1897) angewandten Schlussverfahrens mit Hülfe des Satzes: Ist $S(x) = \Sigma a_n x^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ divergent für $x = r$, aber convergent für $|x| < r$, und divergirt $S(x)$ nach $+\infty\,(-\infty)$, wenn x an r heranrückt, so ist $\lim S_n(r)$ für unendliches n gleich $+\infty\,(-\infty)$, wo $S_n(r)$ gleich $\Sigma a_n r^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$. Lp.

U. Ch. Ghosh, H. A. Webb, Sanjána. **Question 14078.** Ed. Times **72,** 87-88.

Ghosh hatte die Summe der unendlichen Reihe verlangt

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(5)} + \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(7)} + \cdots;$$

diese Reihe ist aber, wie von Webb und Sanjána leicht gezeigt wird, divergent. Dagegen ist

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) - \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(5)} - \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(7)} + \cdots = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Lp.

Weitere Litteratur.

A. Aubry. Théorie de la fonction logarithmique. J. de math. spéc. **24,** 10-16, 29-31, 42-44, 54-61, 72-74.

A. Aubry. Errata et addenda relatifs à l'article sur la théorie de la fonction logarithmique. J. de math. élém. **25,** 105-107.

L. Moreau. Variation du rapport $a^z : z$ d'un nombre à son logarithme. J. de math. spéc. **25,** 170-173.

L. Saalschütz. Ueber eine gemischte, stets convergente Entwickelung des Arcustangens. Königsb. Phys.-ökon. Ges. **40,** 28-36 (1899).

G. Fontené. Démonstration géométrique du théorème de l'addition des fonctions hyperboliques. Mathesis (2) **10,** 241-243.

W. E. Heal. Expression of Riemann's P-function. Amer. Math. Monthly **7,** 155-160.

W. McF. Orr. On divergent hypergeometric series. Cambr. Trans. **19,** 151-155.

B. Elliptische Functionen.

G. Vivanti. Lezioni sulla teoria delle funzioni ellittiche tenute nella R. Università di Messina. Messina: Trimarchi. 313 S. 8° (lith.)

Erster Teil. Allgemeine Theorie der analytischen Functionen (im Auszug). — Potenzreihen. Abgeleitete Potenzreihe. Analytische Functionen. Singuläre Punkte. Laurent'scher Satz. Verhalten einer Function in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes. Klassification der analytischen Functionen. Functionen mit lauter Polen. Ganze transcendente Functionen. Functionen mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte. Mittag-Leffler'scher Satz.

Zweiter Teil. Elliptische Functionen. — Die Functionen σz, ζz, $\wp z$. Darstellung von σz durch ein einfach unendliches Product. Definition und allgemeine Eigenschaften der elliptischen Functionen und verschiedene Darstellungen derselben. Eigenschaften der $\wp$-Functionen. Das elliptische Integral erster Gattung. Ausartung der elliptischen Functionen. Die Cofunctionen $\sigma_1 z$, $\sigma_2 z$, $\sigma_3 z$. Die Θ-Functionen und die älteren elliptischen Functionen. Das elliptische Integral zweiter und dritter Gattung.

Dritter Teil. Transformationstheorie. — Das allgemeine Transformationsproblem. Die rationale Transformation; Zurückführung derselben auf zwei besondere Transformationen P, Q. Die Landen'sche Transformation und ihre Anwendung auf die Berechnung des vollständigen Integrales K. Multiplication und Teilung der elliptischen Functionen.

Vi.

Résumé des principales formules de la théorie des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (3) **19**, 2-11; auch sep. Gauthier-Villars.

Den „Candidats à l'Agrégation de Mathématiques" ist gestattet worden, sich für die schriftlichen Arbeiten einer Sammlung von Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen zu bedienen, die im Verlage von Gauthier-Villars erschienen ist und in den Nouvelles Annales abgedruckt wird. Die Sammlung enthält der Reihe nach zuerst die wichtigsten Formeln der Weierstrass'schen Theorie, nämlich die Entwickelungen in unendliche Producte und Reihen von $\sin u$, $\cot u$, $\frac{1}{\sin^2 u}$, σu, ζu, $\wp u$, $-\frac{1}{2}\wp' u$, Entwickelung in Potenzreihen von σu, ζu, $\wp u$, Relationen zwischen $\wp u$ und seinen Ableitungen, Homogeneitätsgleichungen, Ausartungen, Periodicität und Additionstheoreme, Gleichungen für e_1, e_2, e_3, Formeln für $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, Verlauf von $\wp u$, wenn ω und $i\omega'$ reell sind. Es folgen aus Jacobi's Theorie Gleichungen für $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$, die Beziehungen zwischen diesen Functionen und den σ-Functionen, eine Reihe von Formeln für $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$, und zum Schluss gelangen erst die Functionen $\vartheta_0(v|\tau)$, $\vartheta_1(v|\tau)$, $\vartheta_2(v|\tau)$, $\vartheta_3(v|\tau)$ zur Geltung.

St.

K. Bohlin. **Tables des fonctions elliptiques.** Stockholm: P. A. Norstedt & Söner. 23 S. 8°.

Die sehr compendiösen Tafeln enthalten 1. die numerischen Werte des elliptischen Integrals erster Gattung

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

für jeden Grad der Amplitude φ und für jeden fünften Grad des Winkels ϑ, der durch die Gleichung $k = \sin \vartheta$ bestimmt ist, 2. dasselbe für das elliptische Integral zweiter Gattung

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

3. die Briggs'schen Logarithmen der vollständigen Integrale erster Gattung K für Werte von ϑ, die um je $\frac{1}{10}$ Grad fortschreiten, 4. dasselbe für das vollständige Integral zweiter Gattung E, 5. die Briggs'schen Logarithmen von $q = e^{-\pi K'/K}$ für dasselbe Intervall von $\frac{1}{10}$ Grad. Während die Tafeln 3, 4, 5 nur lineare Interpolation erfordern, sind bei den Tafeln 1 und 2 auch die zweiten Differenzen zu berücksichtigen. Hätten diese vermieden werden sollen, so würde für die Tafeln eine beträchtlich grössere Ausdehnung erforderlich gewesen sein. Die Berücksichtigung der zweiten Differenzen bedeutet jedoch nur eine geringe Erschwerung der Rechnung, wenn man die von den Astronomen gebrauchte Methode der Interpolation anwendet, die der Verf. in der Einleitung auseinandersetzt.

Da die Legendre'schen Tafeln schwer zugänglich sind, wird das vorliegende Heftchen vielen Rechnern willkommen sein; denn die Tafeln, die dem Précis von L. Lévy (Paris 1898) beigefügt sind, geben zwar $\log q$ für das Intervall $\frac{1}{12}$ Grad (für $\vartheta = 1^\circ 30'$ muss es 5,63187 statt 5,68187 heissen), sogar mit 5 statt 4 Decimalen, ferner das Integral erster und zweiter Gattung für dieselben Intervalle, wie die Tafeln 1 und 2 von Bohlin (beide Tafeln mit 5 Decimalen), dagegen findet sich dort (S. 227) nur eine ganz kleine Tabelle der Werte von K und E, so dass Bohlin erheblich weiter gegangen ist. St.

H. Stahl. **Bemerkungen zu Bernhard Riemann's Vorlesungen über elliptische Functionen.** Zeitschr. f. Math. **45**, 216-228.

Es handelt sich um Ergänzungen zu den von Stahl herausgegebenen Vorlesungen Riemann's über elliptische Functionen (vergl. F. d. M. **30**, 394-396, 1899), nämlich darum, bekannte Sätze aus der Theorie dieser Functionen in einer Form darzustellen, die erkennen lässt, dass und wie sie die in der Theorie der Abel'schen Functionen vorzunehmende Verallgemeinerung gestatten; angedeutet waren diese Betrachtungen übrigens bereits in der Einleitung zu der von Stahl herausgegebenen Theorie der

Abel'schen Functionen (Leipzig, 1896). Den Schluss bildet ein Verzeichnis von Druckfehlern in den Riemann'schen Vorlesungen. St.

P. M. POKROVSKY. Ueber rationale Functionen des elliptischen Gebildes. Mosk. Math. Samml. 21, 387-430. (Russisch.)

Der früh verstorbene P. M. Pokrovsky beschäftigte sich fast ausschliesslich mit der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen. Er beabsichtigte in letzter Zeit, in einer Reihe von Monographien die Lehre von den elliptischen Transcendenten nach Weierstrass darzustellen und die Entwickelung der Methode desselben klar zu machen. Nur die erste Abhandlung wurde aber abgeschlossen. Sie enthält eine vollständige Discussion der rationalen Functionen des elliptischen Gebildes, sowie eine Darstellung der zugehörigen Integrale durch Weierstrass'sche Elemente. Si.

O. BOLZA. The elliptic σ-functions considered as a special case of the hyperelliptic σ-functions. American M. S. Trans. 1, 53-65.

Eine Skizze der Theorie der elliptischen Functionen, wie sie sich gestaltet, wenn man sie durch die Annahme $p=1$ aus der der hyperelliptischen ableitet. Kr.

P. MANSION. Sur l'enseignement de la théorie des fonctions elliptiques. Brux. S. sc. 24 A, 34-37.

E. JAGGI. Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. Nouv. Ann. (3) 19, 443-450.

Die Methode, die Darboux für die Integration der Euler'schen Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0$$

angegeben hat [Ann. de l'Éc. Norm. (1) 4 (1867)], wird in einer für Vorlesungen geeigneten Weise auseinandergesetzt. St.

J. DOLBNIA. Remarque sur l'inversion des intégrales elliptiques. Nouv. Ann. (3) 19, 390-392.

Wenn man Invarianten g_2 und g_3 und die absolute Invariante g_2^3/g_3^2 aus den beiden elliptischen Integralen

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad u=\int\frac{dx}{\sqrt{k^2x^4-(1+k^2)x^2+1}}$$

berechnet, so ergiebt sich für die absolute Invariante jedesmal eine andere Form. Es wird nun gezeigt, wie durch die Landen'sche Transformation des Integrals die Formen auf einander zurückführbar sind.

Sr.

E. M. Lémeray. Exposition géométrique de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce. Nouv. Ann. (3) **19**, 255-275, 289-306.

Obwohl die Theorie der Curven dritter Ordnung, wenn man auf geometrischem Wege vorgehen will, den naturgemässen Eingang in die Lehre von den elliptischen Functionen liefert, werden doch immer wieder Versuche gemacht, durch Betrachtung anderer Curven eine Einführung zu gewinnen, ohne dass dabei ein befriedigendes Ergebnis erzielt würde. Das gilt auch von dem vorliegenden Versuche; denn eine Untersuchung, die von der „gegebenen" Curve vierter Ordnung

$$y = \frac{a\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} + x\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}$$

ausgeht, muss, wenn sie auch sinnreich durchgeführt und durch die Discussion der Ausartungen bei $k=0$ und $k=1$ vorbereitet wird, als künstlich, nämlich für den Novizen unmotivirt und unmotivirbar bezeichnet werden.

St.

M. Lerch. Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Functionen. Monatsh. f. Math. **11**, 107-113.

Es handelt sich darum, zu beweisen, dass die Function

$$\varphi(\omega) = \prod_{\mu=1}^{\infty}(1 - e^{2\mu\omega\pi i})$$

der complexen Veränderlichen $\omega = x + iy$ nur in der oberen Halbebene existirt, in der y positiv ist, dass also $\varphi(\omega)$ nicht über die reelle Axe in die untere Halbebene fortgesetzt werden kann. Zu diesem Zwecke wird die Function

$$\psi(\omega) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\log(1 - e^{2\nu\omega\pi i})$$

betrachtet, die mit $\varphi(\omega)$ durch die Gleichung

$$\frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = -2i\log\varphi(\omega)$$

zusammenhängt und daher denselben Existenzbereich wie $\varphi(\omega)$ besitzt.

Der rein imaginäre Bestandteil von $\psi(\omega)$ ist gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{-2\nu y\pi}\sin 2\nu x\pi}{1 - e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi}.$$

Dieser Ausdruck behält auch für $y=0$ einen Sinn, wenn x irrational ist. Er convergirt alsdann gegen

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-R(\nu x)}{\nu^2},$$

wenn $R(\nu x)$ den kleinsten positiven Rest von νx bedeutet.

Würde sich nun der Existenzbereich von $\psi(\omega)$ über die reelle Axe hinaus in die untere Halbebene erstrecken, so müsste der rein imaginäre Bestandteil von $\psi(\omega)$ wenigstens auf einem endlichen Stücke der reellen Axe eine stetige Function von x sein. Da er aber für alle irrationalen Werte von x mit $f(x)$ übereinstimmt, so müsste er für rationale Werte von x gleich $\lim\limits_{h=0} f(x+h)$ sein, wo h irrational ist. Nun findet man aber, wenn p und q zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten, dass

$$f\left(\frac{p}{q}+0\right)-f\left(\frac{p}{q}-0\right)=\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{q^2}$$

wird, so dass die Annahme der Fortsetzbarkeit von $\psi(\omega)$ über die reelle Axe hinaus auf einen Widerspruch führt.

Zum Schluss bemerkt Lerch, ihm sei erst während des Druckes bekannt geworden, dass seine Ausführungen implicite bereits in Riemann's Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen (Werke, 2. Aufl. S. 453) enthalten seien. St.

J. Sterba. Ueber eine Jacobi'sche Gleichung. J. für Math. **122**, 198-204.

Die merkwürdige Relation Jacobi's (Ges. Werke **1**, 336):

$$\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(u+a+b)-\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b)$$
$$=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(u+a+b),$$

der Richelot (ebendaselbst S. 337) die Form

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)+\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)+\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)$$
$$=k^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)$$

gegeben hat, wird verallgemeinert, indem noch ein viertes Element δ hinzutritt, und daraus eine Reihe weiterer Formeln hergeleitet. St.

E. Jaggi. Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en une intégrale circulaire. Nouv. Ann. (3) **19**, 537-547.

Die Function $\sin\operatorname{am}(x, k)$ ist, wie man ohne Mühe beweist, eine eindeutige Function von $y=\sin\frac{\pi x}{2K}$, die der Verf. mit $\varphi(y)$ bezeichnet.

In sehr breiter Darstellung entwickelt er die Eigenschaften der Functionen $\varphi(y)$, die im Grunde alle auf der unmittelbar ersichtlichen Gleichung

$$\varphi(y) = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} \cdot y \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2 + 4q^{2n}y^2}{(1-q^{2n-1})^2 + 4q^{2n-1}y^2}$$

beruhen. Dass durch die Betrachtung der Function $\varphi(y)$ irgend eine neue Einsicht in das Wesen der elliptischen Functionen gewonnen werde, hat der Referent ebenso wenig finden können, als er die von Jaggi vorgeschlagene Einführung der Function $v = \cos\mathrm{am}\, x/\Delta\mathrm{am}\, x$ als gleichberechtigt neben $u = \sin\mathrm{am}\, x$ für einen Fortschritt halten kann (vergl. F. d. M. **29**, 383, 1898). St.

W. J. C. Sharp. Question 10902. Ed. Times **73**, 65-66.

$$\int \mathrm{dn}\, x\, dx = \mp \log(\mathrm{cn}\, x \pm i\, \mathrm{sn}\, x),$$

$$\int \mathrm{cn}\, x\, dx = \pm (ki)^{-1} \log(\mathrm{dn}\, x \pm ki\, \mathrm{sn}\, x),$$

$$\int \mathrm{sn}\, x\, dx = \pm k^{-1} \log(\mathrm{dn}\, x \mp k\, \mathrm{cn}\, x).$$

Beweise von H. W. Curjel. Lp.

G. B. M. Zerr. Integration of elliptic integrals. Amer. Math. Monthly **6**, 258-261, 302-306; **7**, 67-69, 100-102.

A. C. Dixon. A formula in the theory of single theta-functions. Lond. M. S. Proc. **32**, 62-71.

Ist $\vartheta(u)$ eine ganze transcendente Function, die den Gleichungen:

$$\vartheta(u+2\omega) = e^{au+\beta}\,\vartheta(u), \quad \vartheta(u+2\omega') = e^{a'u+\beta'}\,\vartheta(u)$$

genügt und in dem Periodenparallelogramm nur die eine einfache Nullstelle $u=0$ besitzt, und setzt man $\vartheta_{rs}(u)$ gleich

$$e^{-\left(\frac{ra}{m}+\frac{sa'}{n}\right)\left(u+\frac{r\omega}{n}+\frac{s\omega'}{n}\right)+\frac{r}{m}(a\omega-\beta)+\frac{s}{n}(a'\omega'-\beta')} \times \vartheta\left(u+\frac{2r\omega}{m}+\frac{2s\omega'}{n}\right),$$

wo r, s, m, n ganze Zahlen sind, m, n positiv, so gilt, wenn die $m.n$ Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_{mn}$ der Bedingung

$$\sum_{a=1}^{mn} u_a \equiv (mn-1)\,(n\omega+m\omega') \quad (\text{modd. } 2\omega, 2\omega')$$

genügen, die Identität:

$$\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{rs+rn(m-1)+sm(n-1)}\cdot\prod_{\alpha=1}^{mn}\vartheta_{rs}(u_\alpha)=0.$$

Diese Formel enthält implicite das Additionstheorem für $mn-1$ Argumente bei Functionen von dem Typus $\vartheta_{rs}(u):\vartheta(u)$. Zum Schluss werden die besonderen Fälle $m=n=2$ und $m=3, n=1$ genau discutirt. St.

M. U. Wilkinson. On the differentiation of single theta-functions. Lond. M. S. Proc. **32**, 404-418.

Abweichend von der üblichen Bezeichnungsweise definirt der Verf. die 4 Thetafunctionen durch die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_0(x)}=\operatorname{sn}x,\quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_0(x)}=\operatorname{cn}x,\quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_0(x)}=\operatorname{dn}x$$

mit der Bedingung, dass $\vartheta_0(x)$ eine der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\log\vartheta_0}{dx^2}=C-k^2\operatorname{sn}^2x$$

genügende gerade Function sein soll; $\vartheta_0(x)$ ist daher eine Function von x und den drei Constanten $\vartheta_0(0)$, C und k^2. Alsdann wird das Differentiationssymbol eingeführt:

$$M^n(XX^1)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{d^rX}{dx^r}\frac{d^{n-r}X^1}{dx^{n-r}}.$$

Bezeichnen die Indices $\alpha,\beta\,\gamma,\delta$ die Zahlen 0, 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge, so ist

$$M^n(\vartheta_\alpha\vartheta_\beta)=W_{\alpha\beta}\cdot\vartheta_\gamma\vartheta_\delta,$$

wo $W_{\alpha\beta}$ nur von den Constanten $\vartheta_0(0)$, C und k^2 abhängt; ähnlich, aber etwas anders sehen die Gleichungen für $M^n(\vartheta_\alpha\vartheta_\alpha)$ aus. Der Bestimmung der Ausdrücke $W_{\alpha\beta}$ sind die Bemühungen des Verfassers gewidmet. St.

O. Biermann. Ueber die Discriminante einer in der Theorie der doppelt-periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung. Erste Mitteilung. Wien. Ber. **109**, 849-863.

Es werden die Lösungen der zu einem ungeraden Transformationsgrade ohne quadratischen Teiler zugehörigen Gleichung für das Verhältnis des transformirten Integralmoduls und Multiplicators entwickelt. Hierauf wird die Discriminante dieser Gleichung gebildet, wobei diejenigen die Discriminanten von Modulargleichungen betreffenden Darstellungen zu Grunde gelegt werden, die Koenigsberger in seinen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen gegeben hat. Eine Untersuchung der Discriminante selbst wird noch nicht vorgenommen. St.

W. Lewicki. Beitrag zur Theorie der Modulgruppe. Monatsh. f. Math. 11, 118-124.

Aus den Fundamentalsubstitutionen $S = z + 1$, $T = -1/z$ der Modulgruppe entspringen im besonderen durch n-malige Wiederholung der Transformation $TS^a = -1/(1+z)$ die Transformationen

$$U = TS^a\, TS^a \dots TS^a = -\varphi_n(z),$$

wo man $\varphi_n(z)$ sofort in Form eines Kettenbruches hinschreiben kann. Als Wert des Kettenbruchs ermittelt der Verfasser:

$$\varphi_n(z) =$$
$$2\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)\,(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)\,(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)\,(a+\sqrt{a^2-4})^{n}\;+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)\,(a-\sqrt{a^2-4})^{n}},$$

wenn $a > 2$ ist; für $a = 2$ ergiebt sich direct

$$\varphi_n(z) = \frac{(n-1)\,z+n}{nz+(n-1)}.$$

Aus diesen Formeln folgt, um einen von dem Verfasser höchst unklar ausgedrückten Satz präcis zu formuliren, dass man für $a > 2$ durch wiederholte Anwendung der Substitution TS^a jeden Punkt der positiven Halbebene dem Punkte $z = -2$ beliebig nahe bringen kann, für $a = 2$ aber dem Punkte $z = -1$.

Aehnliche Sätze werden auch für die Transformation $S^a U$ entwickelt. St.

G. B. Mathews. The complex multiplication of the Weierstrassian lemniscate functions. Quart. J. 32, 257-265.

Ebenso wie in den Abhandlungen von Schwering (F. d. M. 23, 476, 1891; 24, 437, 1892; 25, 782, 1893/94) handelt es sich bei Mathews um die praktische Lösung des Problems der Multiplication der lemniskatischen Functionen. Während jener die Jacobi'sche Function $\sin\operatorname{am} u$ betrachtet, legt dieser die Weierstrass'sche Function $\wp u$ zu Grunde, bei der $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ ist, wie er das bereits in einer Abhandlung über die Teilung der Lemniskate (F. d. M. 27, 354, 1896) gethan hatte.

Bedeutet μ eine ganze Zahl der Form $a + ib$ mit der Norm m, so wird

$$\wp(\mu u) = \frac{A_\mu(\wp u)}{B_\mu(\wp u)},$$

wo A_μ und B_μ ganze rationale Functionen von $\wp$ bez. vom Grade m und $m-1$ sind; wird der Coefficient von $\wp^m$ in A_μ gleich 1 gewählt, so ist der von $\wp^{m-1}$ in B_μ gleich μ^2. Je nachdem nun μ teilbar ist

durch 2 (gerade), teilbar durch $1+i$, aber nicht durch 2 (halbgerade), nicht teilbar durch $1+i$ (ungerade), wird

$$A_\mu = P^2, (\wp^2-1)P^2, \wp P^2, B_\mu = \wp(\wp^2-1)Q^2, \wp Q^2, Q^2,$$

wo P und Q ebenfalls Polynome bedeuten, deren Bestimmung durch Recursionsformeln gelehrt wird. Wie das Beispiel $\mu = 7 - 2i$ zeigt, führen diese Formeln rasch zur expliciten Herstellung von $\wp(\mu u)$ als Function von $\wp(u)$.

Zu bedauern ist, dass der Verf. seine Ergebnisse nicht zu den schönen Untersuchungen von Bonaventura (F. d. M. **26**, 499, 1895) über die allgemeine complexe Multiplication der elliptischen Functionen in Beziehung gesetzt hat. St.

P. Ripa. **Il problema della divisione della lemniscata.** Batt. G. **38**, 7-28.

Der Verf. verspricht in der Einleitung eine vollständige, geordnete und den modernen Theorien entsprechende Auseinandersetzung der Lehre von der Teilung der Lemniskate zu geben. Diesem Zwecke soll zunächst eine historische Einleitung dienen, der jedoch zur Vollständigkeit viel mangelt; Fagnano und Gauss werden gar nicht erwähnt, und aus der neueren Zeit fehlen, um sofort ersichtliche Lücken zu constatiren, die Arbeiten von Liouville (C. R. **17**, 635, 1843) und Paci (Batt. G. **12**, 97-109; F. d. M. **6**, 274, 1874). Aber auch die sachlichen Erörterungen sind nicht ausreichend; denn es wird zwar die „moderne $\wp$-Function" zu Grunde gelegt, jedoch die complexe Multiplication von $\wp(u; g_2, 0)$ nur oberflächlich behandelt und dem entsprechend zum Schluss allein die Drei- und Fünfteilung der Lemniskate discutirt. St.

P. Meyer. **Ueber die Siebenteilung der Lemniskate.** Diss. Strassburg. 23 S. 8°.

M. Trynkowski. **Ueber Teilungsgleichungen der elliptischen Functionen.** Warschau 1900, 157 S. 8°. (Polnisch.)

Le comte de Sparre. **Sur une application des fonctions elliptiques.** S. M. F. Bull. **28**, 52-55.

In ihrem Lehrbuche der Theorie der elliptischen Functionen hatten Appell und Lacour die Bewegung eines Projectils unter der Voraussetzung behandelt, dass der Widerstand des Mittels dem Kubus der Geschwindigkeit proportional ist. Der Verfasser untersucht die Convergenz der dabei erhaltenen Reihenentwickelungen und gelangt zu dem überraschenden Ergebnisse, dass die Reihen nur einen sehr kleinen Convergenzbezirk haben und daher, sobald der Schuss unter ein wenig beträcht-

lichem Winkel erfolgt, besonders wenn die Anfangsgeschwindigkeit nicht gross ist, für die wirkliche Berechnung der Bahn nicht benutzt werden können. St.

A. Emch. Illustration of the elliptic integral of the first kind by a certain linkwork. Annals of Math. (2) **1**, 81-92.

Zunächst wird ein Gelenksystem betrachtet, das aus sechs Stangen besteht. Vier bilden einen Rhombus $OA_1B_1A_2$, bei dem nur der Punkt O fest ist; die Stange OQ ist ganz fest, und B_1Q ist von veränderlicher Länge, aber gezwungen durch Q zu gehen. Das so definirte System hat einen Grad der Freiheit. Es kann vollständige Umdrehungen machen, wenn

$$OA_1+A_1B_1>OQ+QB_1$$

ist, und seine Bewegung lässt sich in diesem Falle durch elliptische Functionen darstellen. Darauf werden mehrere solcher Syteme (Zellen) an einander gesetzt, und es ergeben sich alsdann Gelenksysteme, die mit Poncelet's Polygonen und Steiner's Kreisreihen in Zusammenhang gebracht werden. St.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

J. Ptaszycki. Allgemeine Sätze über die Integration Abel'scher Differentiale in endlicher Form. Prac. mat.-fiz. **11**, 23-31. (Polnisch.)

Ausgehend von dem bekannten Abel'schen Satze über die Form der Darstellung des Integrales $\int f(x,y)dx$, wenn es in endlicher Form darstellbar ist, stellt der Verf. die allgemeine Frage über die Bedingungen, unter welchen das Integral $\int f(x,y)dx$, wo x und y durch eine algebraische Gleichung $F(x,y)=0$ vom Geschlechte p verknüpft sind, sich in endlicher Form darstellen lässt, und wie man im bejahenden Falle seinen Wert ermittelt. Durch geeignete Reductionen des gegebenen Integrals wird diese Frage erledigt, und es wird eine Reihe von Sätzen aufgestellt, unter denen sich auch natürlich die früher bekannten, von verschiedenen Forschern entdeckten Sätze finden. Wir erwähnen hier nur die folgende vom Verf. gestellte und erledigte Frage: Unter welchen Bedingungen existiren eine rationale Function und eine ganze Zahl m, so dass die Function $\varphi(x,y)$ in allen Punkten der Curve $F(x,y)=0$ endlich und von Null verschieden ist, mit Ausschliessung der q Punkte $a_1, a_2, \dots, a_q$ in welchen sie m-fach Null und der q Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, in welchen sie m-fach unendlich ist? Dn.

J. L. Ptaszycki. Ueber die Integration der Abel'schen Differentiale in endlicher Form. Mosk. Math. Samml. **21**, 387-430. (Russisch.)

Aufzählung der einfachsten Aufgaben, auf deren Lösung die Frage zurückgeführt wird, ob das Integral $\int f(x,y)dx$ in endlicher Form darstellbar ist ($f(x,y)$ eine rationale Function von x und y, die der irreducibeln algebraischen Gleichung $F(x,y)=0$ genügen). Si.

J. J. **Bielankin.** Beweis der Identität von Weierstrass aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale. Kasan Ges. (2) **10,** No. 2, 187-190; Kiew Univ. No. 12. (Russisch.)

Einfacher directer Beweis der berühmten Identität. Si.

P. **Fulco.** Funzioni che hanno per derivata logaritmica un integrale abeliano. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania (4) **13,** 24 S.

Die Haupteigenschaft dieser Functionen ist, dass sie beim Ueberschreiten eines Schnittes der bezüglichen Riemann'schen Fläche mit einem Factor von der Form e^{Mz+N} multiplicirt werden; sie sind aber offenbar nicht die allgemeinsten Functionen, welche diese Eigenschaft besitzen. Eine Function von der betrachteten Art heisst von der 1., 2., 3. „Gattung" je nach der Gattung des ihre logarithmische Ableitung bildenden Abel'schen Integrales. Die Untersuchung der Singularitäten dieser Function bildet den Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung; der Verf. behält sich vor, diese Untersuchung künftig fortzusetzen.

Vi.

P. **Kokott.** Die Bedingungen, unter denen $\int\frac{x^{n+\mu}dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}}$ algebraisch ist. Zeitschr. f. Math. **45,** 240-244.

Aus der Gleichung

$$\int\frac{x^{n+\mu}\,dx}{\sqrt{R(x)}}=g(x)\sqrt{R(x)}$$

folgt:

$$x^{n+\mu}=g'(x)R(x)+\tfrac{1}{2}g(x)R'(x);$$

hieraus ergeben sich aber Bedingungen für die Coefficienten der ganzen rationalen Functionen $R(x)$ und $g(x)$. Diese werden in der vorliegenden Abhandlung aufgestellt und für die einfachsten Fälle $\mu=0$ und $\mu=1$ genauer untersucht. Kr.

J. **Thomae.** Ueber ultraelliptische Integrale. Leipz. Ber. **52,** 105-116.

Für den Fall $p=2$ und unter Zugrundelegung einer bestimmten Zerschneidung der Riemann'schen Fläche werden die Aenderungen be-

rechnet, welche $\log \vartheta((u-e))$ erfährt, wenn z, s die Querschnitte durchläuft. Kr.

W. Gilepsie. On the reduction of hyperelliptic integrals ($p=3$) to elliptic integrals by transformations of the second and third degrees. American J. **22**, 259-278.

Es werden zuerst die Bedingungen aufgesucht, unter denen ein hyperelliptisches Integral vom Geschlechte $p=2$ sich durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches Integral reduciren lässt, und es werden daraus vier verschiedene allgemeine Formen für ein solches reducirbares Integral abgeleitet. — Sodann wird der Fall behandelt, wo die Klasse zwei reducirbare Integrale enthält, von denen das eine durch eine Transformation zweiten, das andere durch eine solche dritten Grades auf je ein elliptisches Integral reducirt werden kann. Kr.

E. Lampart. Die geodätischen Linien auf der dreiaxigen Fläche zweiten Grades, welche sich mittels einer Transformation zweiten Grades durch elliptische Functionen ausdrücken. Diss. München: F. Straub. 42 S. 8°.

Bekanntlich lässt sich ein hyperelliptisches Integral erster Gattung und vom Range $\varrho=2$ dann und nur dann durch eine Transformation zweiten Grades auf die Summe zweier elliptischen Integrale erster Gattung zurückführen, wenn die sechs Verzweigungspunkte eine Involution bilden. Da nun die geodätischen Linien einer Fläche zweiter Ordnung durch solche hyperelliptischen Integrale dargestellt werden können, die von zwei Parametern abhängen, so muss es unter ihnen, und zwar ausser den trivialen, durch die Nabelpunkte gehenden, auch solche geben, die sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. Mit diesen speciellen geodätischen Linien hatte sich v. Braunmühl im Jahre 1885 beschäftigt und die Ergebnisse seiner Untersuchungen in kurzer Form veröffentlicht (F. d. M. **17**, 760-761, 1885). Der Verf. der vorliegenden Discussion hat es sich zur Aufgabe gestellt, diese Ergebnisse in aller Ausführlichkeit abzuleiten.

Im ersten Teil behandelt er die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Gattung auf elliptische durch Transformationen zweiten Grades, wobei er eine von Koenigsberger angegebene Methode befolgt (F. d. M. **10**, 323, 1878). Im zweiten Teile beschäftigt er sich mit den geodätischen Linien auf den dreiaxigen Flächen zweiter Ordnung und findet die Sätze wieder, die v. Braunmühl angegeben hatte, dass es nämlich auf jedem Ellipsoide mindestens 5 und höchstens 7 (reelle) Scharen der verlangten Eigenschaft giebt, und dass dasselbe für das zweischalige Hyperboloid gilt, während auf dem einschaligen Hyperboloide mindestens 11 und höchstens 13 (reelle) Scharen die verlangte Eigenschaft haben. In dem dritten Teil wird im Anschluss an die Abhandlungen von

Weierstrass (1861), v. Braunmühl (F. d. M. **14,** 689-691, 1882) und Noske (F. d. M. **18,** 761, 1886; **19,** 504, 1887) ein specieller Fall bis zur numerischen Berechnung durchgeführt. Den Schluss bildet eine Zusammenstellung der auf das Problem bezüglichen Litteratur. St.

J. P. Dolbnia. Ueber einen Fall der Reduction der Abel'schen Integrale vom Range >2. Mosk. Phys. Sect. **11.** (Russisch.)

A. Söderblom. Calcul des intégrales hyperelliptiques de la première classe. Göteborgs Vetensk. Handl. (4) **2,** 127-243 (1898).

S. Kempiński. Ueber die Normalcurve Φ vom Geschlechte $p=3$. Prace mat.-fiz. **11,** 1-22. (Polnisch.)

Eine erschöpfende Untersuchung der von Schottky: Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen (J. für Math. **83,** 300-351; F. d. M. **9,** 584, 1877), Valentin (De aequatione algebraica etc. Diss. Berlin 1879; F. d. M. **11,** 1879, 261) und F. Klein (Riemann'sche Flächen, autogr. Vorlesungen. Göttingen, Sommersemester 1892) betrachteten Fälle, in welchen die Normalcurve Φ des algebraischen Gebildes vom Geschlechte p weniger als $3p-3$ „Moduln" hat, für $p=3$ und $p=4$. Aufzählung aller möglichen Fälle und geometrische Darstellung derselben. Dn.

G. Humbert. Sur les fonctions abéliennes singulières (Deuxième Mémoire). Journ. de Math. (5) **6,** 279-386.

Ueber die erste Abhandlung, deren Fortsetzung die vorliegende ist, wurde F. d. M. **30,** 408, 1899 berichtet. — Die singulären Abel'schen Functionen zweier Veränderlichen lassen Transformationen zu, bei denen die Transformationszahlen nicht den bekannten Hermite'schen Relationen genügen; solche Transformationen werden singuläre im Gegensatze zu den Hermite'schen ordinären genannt. Diese singulären Transformationen und insbesondere diejenigen erster Ordnung werden in den beiden ersten Teilen der vorliegenden Abhandlung untersucht. — Die beiden letzten Teile beschäftigen sich mit der complexen Multiplication. Es zeigt sich zunächst, dass alle Abel'schen Functionen von zwei Veränderlichen, welche überhaupt eine complexe Multiplication zulassen, singuläre sind; dann sind aber die complexen Multiplicationen nicht nur unter den ordinären, sondern auch unter den singulären Transformationen zu suchen. Es werden alle Fälle, in denen complexe Multiplication eintreten kann, angegeben und der Reihe nach untersucht. — Kurze Inhaltsangabe der vorliegenden Abhandlung in C. R. **126;** vgl. F. d. M. **29,** 395, 1898.

Kr.

O. BOLZA. **Remarks concerning the expansions of the hyperelliptic sigma-functions.** American J. **22**, 101-112.

Es wird die partielle Differentialgleichung aufgestellt, welcher diejenigen $\binom{2\varrho+1}{\varrho}$ σ-Functionen genügen, die Zerlegungen von $R(x)$ in zwei Factoren $(\varrho+1)$-ten Grades zugeordnet sind, und es werden daraus in den Fällen $\varrho=1$ und $\varrho=2$ Recursionsformeln für die Coefficienten der Potenzentwickelungen dieser Functionen abgeleitet. Kr.

J. I. HUTCHINSON. **On certain relations among the theta constants.** American M. S. Trans. **1**, 391-394.

Aus den Formeln (1) und (4) in § 3 der Abhandlung von Frobenius: „Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln" (J. für Math. **89**, 185; F. d. M. **12**, 385, 1880) werden Relationen zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunctionen abgeleitet. Kr.

E. JAHNKE. **Neue Methode zur Herleitung der Differentialbeziehungen für die Thetafunctionen von zwei Argumenten.** Leipz. Ber. **52**, 140-151.

Differentialbeziehungen der Thetafunctionen von zwei Argumenten, welche Krause (vergl. F. d. M. **29**, 392, 1898) aufgestellt hat, werden aus der Theorie der Caspary'schen Orthogonalsysteme hergeleitet. Kr.

M. KRAUSE. **Sur les fonctions thêta à trois variables.** C. R. **131**, 1188-1190.

Bildung der orthogonalen Systeme von 64 Coefficienten, deren Elemente Producte der Thetafunctionen dreier Variablen sind. Hr.

M. A. TICHOMANDRITZKY. **Das Verschwinden der Θ-Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.** Charkow Ges. (2) **7**, 38-48. (Russisch.)

Ableitung der Verhältnisse beim Verschwinden der durch Functionen zweiter Art definirten Θ-Functionen aus den Eigenschaften dieser Transcendenten. Ersatz für den § 112 der „Grundlagen der Theorie der Abel'schen Functionen" desselben Verfassers. Si.

Z. KRYGOWSKI. **Ueber eine Anwendung der Thetafunctionen.** Progr. Przemysl. 20 S. (Polnisch.)

Es handelt sich in dieser Schrift um einige Verallgemeinerungen, die man mittels der Riemann-Appell'schen Methode (s. Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F=0$, Journ. de Math. (3) **3**, 5-52; F. d. M. **19**, 418, 1887) für die besondere Charakteristikengruppe

$$\begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_\varrho \\ 0, & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

der Thetafunctionen, nach Frobenius (J. für Math. **89**) Goepel'sche Gruppe genannt, erhalten kann. Dn.

D. Kugelfunctionen und verwandte Functionen.

J. H. Graf und E. Gubler. Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen. Zweites Heft: Die Bessel'sche Function zweiter Art. Bern: K. J. Wyss. VIII + 156 S. 8°.

Ueber das erste Heft des vorliegenden Lehrbuches ist F. d. M. **29**, 395, 1898, berichtet. Das zweite Heft, das, wie das erste, sowohl in der Darstellung, als in der Auswahl des Stoffes durchaus eigenartig ist, beginnt (Kap. VI) mit der Aufstellung der Bessel'schen Function zweiter Art. Die Verf. verstehen darunter mit C. Neumann und Schläfli den Coefficienten $O^n(x)$ von $2J^n(y)$ [n ist ganzzahlig, für $n=0$ ist die Hälfte zu nehmen] in der Entwickelung von $\frac{1}{x-y}$ nach Bessel'schen Functionen, während es sonst allgemein üblich (und nach des Referenten Ansicht auch zweckmässiger) ist, diesen Namen dem zweiten particulären Integral der Bessel'schen Differentialgleichung beizulegen, das hier als Schläfli'sche complementäre Function bezeichnet wird. Die Formeln für $O^n(x)$ werden etwas anders abgeleitet als bei C. Neumann (Theorie der Bessel'schen Functionen, 1867), indem $\frac{1}{x-y}$ durch ein Integral ausgedrückt und die unter dem Integralzeichen auftretende Function e^{yt} in bekannter Weise nach Bessel'schen Functionen entwickelt wird. So wird zuerst eine Integraldarstellung von $O^n(x)$ gewonnen und daraus erst die Reihe für diese Function abgeleitet. Im Anschluss daran wird der Rest der Reihe für $\frac{1}{x-y}$ untersucht, sodann gezeigt, dass eine Function $f(x)$, die im Laurent'schen Kranze existirt, sich nach den Functionen J^n und O^n entwickeln lässt, wie auch, dass die Entwickelung nach den J^n stets eindeutig ist. Den Schluss des Kapitels bildet der Satz, dass das rechtläufig über den Umfang eines Kreises erstreckte Integral

$$\int J^n(t)\,O^n(t)\,dt$$

den Wert $i\pi$ hat, für $n=0$ den Werth $2i\pi$.

In Kap. VII wird die Function $S^n(x)$ untersucht, die mit O^n durch die Gleichung

$$O^n(x) = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}n\pi)}{x} + \frac{n}{2x} S^n(x)$$

zusammenhängt. Es werden die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Function abgeleitet, ferner die Differentialgleichung, der sie genügt, und damit auch die Differentialgleichung für $O^n(x)$, und es wird mit Benutzung dieser Differentialgleichung die Beziehung abgeleitet:

$$S^n(x) = \pi \sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n} [J^n(x) K^\lambda(x) - K^n(x) J^\lambda(x)],$$

wo K die Schläfli'sche complementäre Function bezeichnet.

Zwei weitere mit O^n verwandte Functionen gewinnen die Verf. (Kap. VIII) aus der Reihenentwickelung von $K^n(x) - \frac{2}{\pi} J^n(x) \log(\frac{1}{2}x)$ nach steigenden Potenzen von x, indem sie diese Reihe in die Summe von vier andern zerlegen, so dass

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi} J^n(x) \log(\tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{\pi} T^n(x) - \frac{1}{\pi} S^n(x) - \frac{2}{\pi} U^n(x) - \frac{2}{\pi} \Delta(1) J^n(x)$$

wird, wo $\Delta(x) = \frac{d \lg \Gamma(x)}{dx}$ ist. Die beiden Functionen T^n und U^n genügen, ebenso wie S^n, Differentialgleichungen, die aus der Bessel'schen Differentialgleichung dadurch hervorgehen, dass auf der rechten Seite an Stelle von Null gewisse gegebene Functionen von x treten. Unter den verschiedenen Eigenschaften der Functionen T^n, U^n, die entwickelt werden, seien hier nur folgende erwähnt:

$$T^n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi,$$

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (J^{n+2\lambda}(x) - J^{n-2\lambda}(x)).$$

Nachdem in Kap. IX verschiedene bekannte Beispiele für die Entwickelung nach Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art gegeben, in Kap. X die Additionstheoreme für $J^n(x+y)$, $J^{-n}(x+y)$, $K^n(x+y)$, $K^{-n}(x+y)$ sowie die analogen Formeln für O^n, S^n, T^n, ferner die Formeln für J^n und K^n mit dem zusammengesetzten Argumente $\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}$ entwickelt sind und daneben die Reihe für $J^a(x) J^b(x)$, wird in Kap. XI der Zusammenhang der Bessel'schen Functionen mit Kettenbrüchen erörtert. Dabei gelangen die Verf. auf die von ihnen als Schläfli'sche Function bezeichnete Function $P_m^a(x)$, die mit den Bessel'schen Functionen durch die Gleichung

$$P_m^a(x) = \frac{1}{2}\pi x\,[J^{a+m+1}(x)\,K^a(x) - J^a(x)\,K^{a+m+1}(x)]$$

verbunden ist. Die Eigenschaften dieser Function, die übrigens, was die Verf. nicht erwähnen, schon bei Lommel auftritt [Math. Ann. **4**, cf. F. d. M. **3**, 221, 1871] und von diesem $R^{a,m}$ genannt wird, werden eingehend discutirt. Weiter wird (Kap. XII) das Integral

$$S = \int_0^\infty J^a(x)\,e^{-bx}\,x^{c-1}\,dx$$

auf verschiedene Arten durch hypergeometrische Reihen dargestellt, endlich (Kap. XIII) das discontinuirliche Integral

$$\int_0^\infty J^a(cx)\,J^b(x)\,dx,$$

das eine Verallgemeinerung des Weber'schen discontinuirlichen Integrals ist, eingehend untersucht. Das letzte Kapitel deckt sich im wesentlichen mit einer früheren Arbeit eines der Herausgeber (Math. Ann. **48**; F. d. M. **27**, 232, 1896), wie auch in anderen Abschnitten Arbeiten von Schülern der Verf. vielfach benutzt sind, so von Crelier (cf. F. d. M. **27**, 366, 1896; **28**, 410, 1897) und von Otti (in F. d. M. **30** nur dem Titel nach angeführt). Ein Anhang betrifft ein von Bessel'schen Functionen abhängiges Integral, ferner die Riccati'sche Gleichung. Den Schluss des Bandes bilden zwei Seiten mit litterarischen Anmerkungen.

Wn.

W. Stekloff. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré. Toulouse Ann. (2) **2**, 273-303.

S. Abschnitt X, Kap. 5.

P. Schafheitlin. Die Nullstellen der Bessel'schen Functionen. J. für Math. **122**, 299-321.

Es wird eine Reihe von Sätzen über die Lage der Nullstellen der Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art abgeleitet, durch die einerseits die Grenzen, zwischen denen die Wurzeln liegen, enger als bisher gezogen, andererseits auch manche Resultate anderer Autoren, z. B. die von Rudski (F. d. M. **26**, 527, 1895), berichtigt werden.

Zunächst ergiebt sich aus der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen in Verbindung mit den bekannten Recursionsformeln, resp. Folgerungen aus denselben, dass für reelle $n > 1$ die erste Nullstelle von J^n zwischen $\sqrt{n(n+2)}$ und $\sqrt{2(n+1)(n+3)}$, die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ zwischen $\sqrt{n(n+2)}$ und $\sqrt{2n(n+1)}$, die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ zwischen $\sqrt{n(n-1)}$ und $\sqrt{(n+1)(n-1)}$ liegt.

Für die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^n(x)$, die hier so definirt ist, dass sie sich von der Lommel'schen Function Y^n durch den Factor $-\frac{1}{2}\pi$, von der Hankel'schen durch den Factor $-\pi$ unterscheidet (vergl. die Arbeit des Verf. in J. für Math. **114**; F. d. M. **25**, 839, 1893-1894), gilt der Satz, dass ihre erste Nullstelle nach $x=n+\frac{1}{2}$ liegt.

Für die zweite und die nächstfolgenden Nullstellen der Functionen J^n und Y^n ist es dem Verf. nicht gelungen, ähnliche einfache Grenzen anzugeben. Dagegen leitet er für die höheren Nullstellen mittels der von ihm früher gegebenen Integraldarstellung (s. die oben citirte Arbeit) verschiedene Resultate her, von denen die folgenden für ganzzahlige $n>4$ hier Platz finden mögen.

Ist $\pi x > 4(n+2)^2-1$, so liegen die Nullstellen von $J^n(x)$ in den Intervallen $(k+\frac{1}{2})\pi$ und $(k+\frac{3}{4})\pi$, resp. $k\pi$ und $(k+\frac{1}{4})\pi$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist $\pi x > 4(n+\frac{5}{2})^2-1$, so liegen die Nullstellen von $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ in den Intervallen $(k+\frac{3}{4})\pi$ und $k\pi$, resp. $(k+\frac{1}{4})\pi$ und $(k+\frac{1}{2})\pi$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist $\pi x > 4(n+2)^2-1$, so liegen die Nullstellen von $Y^n(x)$ in den Intervallen $k\pi$ und $(k+\frac{1}{4})\pi$, resp. $(k+\frac{1}{2})\pi$ und $(k+\frac{3}{4})\pi$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Endlich fügt der Verf. seinen früheren Resultaten über die Wurzeln von $J^0(x)=0, Y^0(x)=0$ [vergl. das Referat über die vorher citirte Arbeit] noch die folgenden hinzu: Sämtliche Nullstellen von $J^1(x)$ liegen zwischen $(k+\frac{1}{8})\pi$ und $(k+\frac{1}{4})\pi$, wo k alle positiven ganzen Werte mit Ausschluss der Null annehmen kann. Die Nullstellen von $Y^1(x)$ liegen von der zweiten an zwischen $(k+\frac{5}{8})\pi$ und $(k+\frac{3}{4})\pi$; die erste Nullstelle liegt zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$.

Aehnliche Resultate gelten auch für $J^2(x)=0$, $Y^2(x)=0$, $J^3(x)=0$, $Y^3(x)=0$, falls man sich in den beiden ersten Gleichungen auf die Wurzeln $>5, 2$, in den beiden letzten auf die Wurzeln >9 beschränkt.

Wn.

H. M. Macdonald. **The addition theorem for the Bessel functions.** Lond. M. S. Proc. **32**, 152-157.

Der Verf. zeigt zunächst, dass das Integral

$$u=\int_{t_0}^{t_1} e^{\frac{1}{2}t-(a^2+b^2):2t}\, I_n\left(\frac{ab}{t}\right)\frac{dt}{t},$$

in dem $I_n(z)=J_n(iz)$, J_n die Bessel'sche Function bezeichnet, in dem ferner t_0 und t_1 irgend zwei der drei Grössen $c-i\infty, 0, c+i\infty$ sind (c eine reelle positive Grösse), der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen genügt, und zwar sowohl als Function von a, wie als Function von b betrachtet; es muss nur der reelle Teil von $(a\pm b)^2$ positiv und der reelle Teil von $n>-1$ sein. u muss daher die Form haben:

$$u = J_n(a)\{AJ_n(b)+BJ_{-n}(b)\}+J_{-n}(a)\{A'J_n(b)+B'J_{-n}(b)\}.$$

Setzt man $t_0 = c - i\infty$, $t_1 = c + i\infty$, so wird $A' = B = B' = 0$, $A = 2\pi i$.

Das Resultat wird benutzt zu einem neuen Beweise für das Additionstheorem der Bessel'schen Functionen. Nach Sonine (Math. Ann. **16**, 1-80; cf. F. d. M. **12**, 400, 1880) ist

$$\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{1}{2}t-\frac{x^2}{2t}}\frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Setzt man hierin $x = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta}$ und entwickelt $e^{\frac{ab}{t}\cos\vartheta}$ nach den Functionen $C_k^n(\cos\vartheta)$, d. h. nach den Coefficienten von h^k in der Entwickelung von $(1-2h\cos\vartheta+h^2)^{-n}$ nach steigenden Potenzen von h (vergl. Sonine S. 74), so ergiebt sich unmittelbar das Additionstheorem für J_n in der zuerst von Gegenbauer (Wien. Ber. **70**; F. d. M. **6**, 297, 1874), für $n=0$ schon vorher von C. Neumann abgeleiteten Form. Auf ähnliche Weise kann man, wenn in dem Integral u die Grenzen $t_0 = c - i\infty$, $t_1 = 0$ genommen werden, zu dem Additionstheorem für die Bessel'sche Function zweiter Art gelangen. Dies Theorem lautet:

$$\frac{K_n(i\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})}{\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\vartheta)^n}}$$
$$= 2^n\,\Pi(n-1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{1}{2}ki\pi}(n+k)\frac{K_{n+k}(ib)}{b^n}\frac{J_{n+k}(a)}{a^n}C_k^n(\cos\vartheta).$$

Wn.

C. Wendt. Eine Verallgemeinerung des Additionstheorems der Bessel'schen Functionen erster Art. Monatsh. f. Math. **11**, 125-131.

Die Verfasserin beweist hier folgende ihr von Herrn Gegenbauer mitgeteilte Verallgemeinerung des Additionstheorems der Bessel'schen Functionen. Es ist

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}(\nu+\varrho)}\sin^{2\nu}\varphi\, J^{\nu+\varrho}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,(2\nu-1)\,\Pi(2\nu-1)\,\Pi(\nu+\varrho-1)(\alpha\beta)^{-(\nu+\varrho)}}{2^{-\varrho+\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)(2\varrho+2\nu+1)^2}$$
$$\times\left(\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\varrho}(-1)^{n+\varrho-2\sigma}(n+\varrho-2\sigma)\,\Delta_{n,\nu,\varrho}^{\sigma}$$
$$\times J^{n+\nu+\varrho-2\sigma}(\alpha)\,J^{n+\nu+\varrho-2\sigma}(\beta)\,C_n^{\nu}(\cos\varphi).$$

Darin hat $C_n^{\nu}(\cos\varphi)$ dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Referat, $\Delta_{n,\nu,\varrho}^{\sigma}$ bezeichnet einen gewissen, von n, ν, ϱ, σ in ziemlich complicirter Weise abhängigen Zahlenfactor, der sich in Determinantenform darstellen

lässt. Der Beweis stützt sich auf verschiedene von Gegenbauer früher abgeleitete Formeln. Wn.

L. GEGENBAUER. Letter to Mr. Macdonald. Appendix (b) (Session 1899-1900). Lond. M. S. Proc. 32, 433-436.

Macdonald hat in dem Aufsatze: „The addition theorem for the Bessel functions“ (Lond. M. S. Proc., vergl. das Referat S. 460) einen Beweis des von Gegenbauer in Wien. Ber. 69 zuerst aufgestellten Additionstheorems der Bessel'schen Functionen erster Art gegeben. Letzterer zeigt nun, dass sich genau auf dem gleichen Wege ein anderer Beweis des genannten Theorems führen lässt. M.

L. GEGENBAUER. Quelques propriétés nouvelles des racines des fonctions de Bessel de première espèce. Liége Mém. (3) 2, 7 S.

Verschiedene Eigenschaften der kleinsten positiven Wurzel. Mn. (Lp.)

W. ST. ALDIS. On the numerical computation of the functions $G_0(x)$, $G_1(x)$ and $J^n(x\sqrt{i})$. Lond. R. S. Proc. 66, 32-42.

Behandelt numerische Berechnungen für die Werte einiger einfacher Bessel'scher Functionen und davon abgeleiteter Functionen. Br.

N. NIELSEN. Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques. Annali di Mat. (3) 5, 17-31.

Die Arbeit stellt sich die Aufgabe, die allgemeinste Function F zu bestimmen, welche der für die Bessel'schen Functionen geltenden Recursionsformel

$$(1)\qquad F^{\mu+1}(x) = \frac{2\mu}{x} F^{\mu}(x) - F^{\mu-1}(x)$$

genügt, in der μ, ebenso wie x, beliebige reelle oder complexe Werte haben kann. Die Lösung der Aufgabe stützt sich auf die Betrachtung der schon früher von Lommel und Graf untersuchten Function

$$(2)\qquad R^{\mu,n}(x) = \sum_{=0}^{<\frac{n+1}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!} \binom{\mu+n-s}{n-2s} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s},$$

in der n eine ganze Zahl vorstellt. Diese Function spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Bessel'schen Functionen, mit denen sie durch die Gleichung

$$(1)\qquad C^{\mu+n}(x) J^{\mu}(x) - C^{\mu}(x) J^{\mu+n}(x) = \frac{\sin(2\mu\pi)}{2\pi} \frac{2}{x} R^{\mu,n-1}(x)$$

zusammenhängt, wobei $C^\mu(x) = \cos(\mu\pi) J^{-\mu}(x)$ ist. Die Gleichung (1) ist vom Verf. früher abgeleitet (Math. Ann. **52**; F. d. M. **30**, 417, 1899). Aus (I) folgt zunächst, dass man auch $F^{\mu+n}$ durch F^μ und $F^{\mu-1}$ ausdrücken kann. Die in diesem Ausdruck auftretenden Coefficienten ergeben sich, indem man für $F^{\mu+n}$ die speciellen Werte $J^{\mu+n}$ und $C^{\mu+n}$ setzt und Gleichung (1) anwendet. So erhält man:

$$(4) \quad F^{\mu+n}(x) = R^{\mu-1,n}(x) F^\mu(x) - R^{\mu,n-1}(x) F^{\mu-1}(x).$$

Weiter wird für die Function R eine Reihe von Formeln abgeleitet, z. B.:

$$(6) \qquad R^{\mu-n,n-1}(x) = (-1)^{n-1} R^{-\mu,n-1}(x),$$

$$(11) \left(\frac{2}{x}\right)^n R^{\mu-1,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (\mu+2s) \binom{n}{s} \frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(\mu+n+s+1)} R^{\mu-1,2s}(x),$$

$$(15) \qquad R^{\nu-1,n}(y) - R^{\mu-1,n}(x)$$
$$= 2 \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{\nu+p}{y} - \frac{\mu+p}{x}\right) R^{\nu-1,p}(y) R^{\mu+p,n+p-1}(x),$$

nebst vielen anderen, die sich zum Teil schon bei Lommel (Studien über Bessel'sche Functionen und Math. Ann. **3**), Graf (cf. F. d. M. **26**, 526, 1895) und Crelier (cf. F. d. M. **27**, 366, 1896) finden. (Die letztgenannten Autoren bezeichnen die Function mit P statt mit R und nennen sie Schläfli'sche Function). — Bei der Ableitung der in Rede stehenden Formeln wendet der Verfasser drei verschiedene Methoden an. Einmal benutzt er die zwischen zwei verschiedenen Lösungen F, F_1 der Gleichung (II) bestehende Relation

$$(\alpha) \qquad F^\mu(x) F_1^{\mu-1}(x) - F^{\mu-1}(x) F_1^\mu(x) = f^\mu(x),$$

in der $f^\mu(x)$ eine periodische Function von μ ist mit der additiven Periode 1. Die zweite Methode beruht darauf, dass jede Gleichung von der Form

$$\sum_{n=p}^{n=p'} g^{\mu+n}(x) J^{\mu+n}(x) = \sum_{m=q}^{m=q'} h^{\mu+m}(x) J^{\mu+m}(x)$$

auch gültig bleibt, wenn man die Bessel'sche Function J durch die allgemeinere Function F ersetzt. Der dritten Methode endlich liegt die Betrachtung einer neuen Functionalgleichung zu Grunde, die aus (I) erhalten wird, wenn man auf der rechten Seite noch eine gegebene Function von x hinzufügt.

Wendet man die Relation (α) einmal auf $F_1^\mu = J^\mu$, sodann auf $F_1^\mu = Y^\mu$ an, wo

$$Y^\mu(x) = \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} [\cos(\mu\pi) J^\mu(x) - J^{-\mu}(x)]$$

das Doppelte der Schläfli'schen complementären Function $K^\mu(x)$ ist, und benutzt die aus (1) folgende Relation zwischen J^μ, Y^μ, $J^{\mu-1}$, $Y^{\mu-1}$, so ergiebt sich

$$(22) \qquad F^\mu(x) = b^\mu(x) J^\mu(x) - a^\mu(x) Y^\mu(x).$$

Darin sind $a^\mu(x)$ und $b^\mu(x)$ Functionen von μ und x, die in Bezug auf μ die additive Periode 1 besitzen. Zur Bestimmung dieser Functionen muss der Grenzwert von $F^{\mu\pm n}$ für $n=\infty$ gegeben sein. Falls man verlangt, dass F ausser der Gleichung (II) noch der zweiten Recursionsformel der Bessel'schen Function:

$$\text{(I)} \qquad F^{\mu-1}(x) - F^{\mu+1}(x) = 2\,\frac{dF^\mu(x)}{dx}$$

genügt, so sind a^μ und b^μ von x unabhängig.

Zum Schluss wird noch $F^{\mu-1}(x):F^\mu(x)$ in einen endlichen Kettenbruch entwickelt, und es wird aus (α) die Gleichung abgeleitet

$$\frac{F_1^\mu(x)}{F^\mu(x)} = \frac{F_1^{\mu+n}(x)}{F^{\mu+n}(x)} + \sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{f^\mu(x)}{F^{\mu+p+1}(x)\,F^{\mu+p}(x)},$$

nebst einer analogen, in der $-n$ an Stelle von n steht. Wn.

N. Nielsen. Note supplémentaire relative aux développements schlömilchiens en série de fonctions cylindriques. Kjøbnhavn. Overs. 1900, 55-60.

In einer früheren „Note sur les développements schlömilchiens en série de fonctions cylindriques" (Kjøbnhavn. Overs 1899, 661-665; F. d. M. **30**, 375, 1899) hat der Verf. bewiesen, dass man hat:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}J^\mu(px)}{p^{\mu-2\nu}} = 0,$$

wenn entweder $-\pi<x<0$, oder $0<x<\pi$, wo $J^\mu(x)$ eine gewöhnliche Cylinderfunction ist und $R(\mu-2r) > -\frac{1}{2}$. In der jetzigen Note bestimmt nun der Verf. den Wert der Reihe ausserhalb des Intervalles $-\pi$ bis $+\pi$ und kommt zu dem interessanten Resultat, dass die Reihe eine eigenartig discontinuirliche Function darstellt. Er beweist nämlich, dass man hat

$$\sum_1^\infty\frac{(-1)^{\nu-1}J^\mu(px)}{p^{\mu-2\nu}} =$$
$$-\operatorname{sgn} x\,\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-2\nu-1}\sum_0^{m=\nu}\sum_{q=1}^{q=s}(-1)^m\left(\frac{\nu}{\nu-m}\right)$$
$$\times\frac{\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(\mu-\nu\cdot m+\frac{1}{2})}\left(1-\frac{(2q-1)\pi^2}{x^2}\right)^{\mu-\nu-m-\frac{1}{2}},$$

wo $\operatorname{sgn} xz=\pm 1$, je nachdem $x \lessgtr 0$, und wo die Formel in den folgenden Fällen gilt,

1) $R(\mu-2\nu) > \frac{1}{2}(\pm 2s-1)\pi < x < (\pm 2s+1)\pi$, s ganz und >1.

2) $x=\pm(2s+1)\pi$, $R(\mu-2\nu)>\frac{1}{2}$.

Innerhalb jedes Intervalles ist die Function continuirlich, wird aber

discontinuirlich in den Grenzen. Es kann noch bemerkt werden, dass die bekannte Formel

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} \sin px}{p} = \frac{x}{2} - \operatorname{sign} x \cdot s\pi$$

aus der angegebenen Formel hergeleitet werden kann. V.

W. B. Morton. The value of the cylinder function of the second kind for small arguments. Nature 68, 29.

Ein von Gray und Mathews angemerkter Druckfehler aus Heine's Kugelfunctionen ist in Arbeiten von J. J. Thomson, A. Sommerfeld und Mie unverbessert hinübergenommen. Lp.

Ch. Hermite. Extrait d'une lettre adressée à Lindelöf. Öfv. Finska Vetensk.-Soc. Förh. 42, 88-90.

Ueber die Identität:

$$\frac{(r-n)(r-n-1)\cdots(r-2n+1)}{r(r-1)\cdots(r-n+1)} = 1 - \frac{n^2}{r} + \frac{1}{2!}\frac{n^2(n-1)^2}{r(r-1)} - \cdots$$

und ihren Zusammenhang mit den Legendre'schen Polynomen $P_n(x)$. Lp.

F. Büttner. Ein Beitrag zur Theorie der Kugelfunctionen höherer Ordnung. Leipzig: Fock. 38 S. 8°. (Aus Festschr. zur 325-jährigen Jubelfeier des fürstl. Stolb. Gymn. zu Wernigerode.)

J. Dougall. The determination of Green's function by means of cylindrical or spherical harmonics. Edinb. M. S. Proc. 18, 33-83.

Der erste Teil dieser Abhandlung enthält eine Besprechung der Bessel'schen Functionen $J_m(\varkappa\varrho)$, $G_m(\varkappa\varrho)$ und der Kugelfunctionen $P_n^m(\cos\Theta)$, $P_n^m(-\cos\Theta)$ als analytischer Functionen der Variabeln $m, \varkappa, n$ (ϱ und Θ reell). Die Function $G_m(\varkappa\varrho)$ wird definirt als

$$\frac{\pi}{2\sin m\pi}\left(J_{-m}(\varkappa\varrho) - e^{-im\pi} J_m(\varkappa\varrho)\right)$$

und $P_n^m(\cos\Theta)$ als

$$\frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left((n+1, -n, m+1, \frac{1-\cos\Theta}{2}\right).$$

Von ihren Eigenschaften als Functionen von m sind die folgenden wichtig: 1. Wenn $\varkappa$ eine feste positive rein imaginäre Zahl ist, so sind die Nullstellen von $G_m(\varkappa a)$ und $J_m(\varkappa b)\, G_m(\varkappa a) - J_m(\varkappa a)\, G_m(\varkappa b)$ ein-

fache und rein imaginäre Grössen. 2. Wenn n von der Form $-\frac{1}{2}+\lambda i$ (λ reell) ist, so sind die Nullstellen der Function von m:

$$\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)\left\{P_n^m(\cos\alpha)\,P_n^m(-\cos\beta)\right.$$
$$\left.-P_n^m(\cos\beta)\,P_n^m(-\cos\alpha)\right\}$$

ebenfalls sämtlich reine und einfache imaginäre Grössen. Additionstheoreme werden gegeben für Functionen eines rein imaginären m. Das Theorem in Bessel'schen Functionen lautet:

$$G_0\left(i\lambda\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cosh s(\pi-\varphi)\,e^{-s\pi}\,G_{is}(i\lambda a)\,G_{is}(i\lambda b)\,ds$$

$$[0<\varphi<2\pi;\ \lambda, a, b \text{ reell und positiv}].$$

In dem zweiten Abschnitte der Abhandlung sind die allgemeinsten Probleme, die gelöst werden, die Bestimmung der Green'schen Function für den Raum, der aussen von zwei Cylindern, zwei parallelen Ebenen und zwei Axenebenen begrenzt wird, ferner für den Raum, der aussen von zwei Kugeln, zwei Kegeln und zwei Axenebenen begrenzt wird. Für die Green'sche Function werden drei unterschiedliche, absolut convergente Doppelreihen gegeben, in denen Functionen der drei bezüglichen geometrischen Coordinaten als Convergenzfactoren auftreten. Das Verfahren der Abhandlung besteht in dem Aufbau der Lösung dieser allgemeinen Fälle durch die successive Einführung von Randwerten, indem von der Green'schen Function für den ganzen Raum, nämlich für $1/r$, ausgegangen wird. Dieser Process erfordert gewisse analytische Transformationen, die vermittelst des Cauchy'schen, auf die Functionen von x, m und n, m angewandten Integralsatzes erledigt werden.

Eine von Stokes gegebene Methode erhält die Green'sche Function für den durch die sechs Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds begrenzten Raum als eine bedingt convergente dreifache Reihe, welche auf drei verschiedene Arten in eine unbedingt convergente Doppelreihe umgewandelt werden kann. In Analogie hiermit können die absolut convergenten Doppel-Aggregate der gegenwärtigen Abhandlung als dreifache Aggregate von symmetrischer Form ausgedrückt werden, hier aber auf zwei verschiedene Weisen mit Functionen eines reellen, und eines rein imaginären m beziehungsweise. Mit dem Stokes'schen Verfahren oder ähnlichen Methoden verglichen, hat diejenige in der Abhandlung den Vorteil, dass sie die Existenz der Green'schen Function nicht annimmt und auch nicht die vorgängige Erörterung der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Function in Reihen von einer gewissen Form verlangt.

Gbs. (Lp.)

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Principien der Geometrie.

O. Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung, gehalten am 22. Juli 1899. Leipzig: B. G. Teubner. 75 S. 8°.

Unter den Begriffen, deren sich die Geometrie bedient, werden einige von vorn herein als gegeben angenommen, aus denen dann vermöge gewisser grundlegender Thatsachen (Axiome, Postulate), die man ohne Beweis voraussetzt, neue Begriffe construirt und Sätze abgeleitet werden. Ob nun jene Begriffe und Thatsachen, wie Kant meint, einer reinen, von der Erfahrung unabhängigen Anschauung entstammen, oder, wie besonders Helmholtz betont hat, der Erfahrung, darüber wird vielleicht niemals volle Einigkeit erzielt werden. Aus diesem Grunde hält es der Verf. für zweckmässiger, diese Frage bei Seite zu lassen und zu untersuchen, welche Voraussetzungen die Geometrie thatsächlich benutzt, diese mögen nun herkommen, woher sie wollen, und wie sie diese Voraussetzungen benutzt. Die zahlreichen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie bewegen sich in der ersten Richtung; dagegen ist die geometrische Deduction selbst noch weniger vollständig untersucht. Der Verf. liefert hierzu einige Beiträge, indem er verschiedene geometrische Beweise zergliedert. Er findet, dass das geometrische Schlussverfahren sich nicht durchweg dem Schema der schulgemässen Logik unterordnet. „Die mathematischen Wissenschaften haben also in der That eine besondere Methode.“ „Die Besonderheit beruht lediglich im Gegenstand, der lange Reihen von Denkoperationen in gewissen charakteristischen

Verbindungen vorzunehmen gestattet, so dass dadurch besondere Schlussformen entstehen.“ In zahlreichen Anmerkungen, bringt der Verfasser Litteraturangaben und führt einzelne Dinge, die im Text nur kurz berührt sind, näher aus (vergl. diesen Band S. 67). El.

D. Hilbert. Les principes fondamentaux de la géométrie. Traduit par L. Laugel. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 103-209; auch sep. Paris: Gauthier-Villars. 114 S. 4°.

Ueber das deutsche Original ist in F. d. M. **30**, 424 berichtet. Die Uebersetzung unterscheidet sich vom Original nur an folgenden Stellen: In § 8 wird in einer Anmerkung gesagt, dass man zu den angegebenen fünf Gruppen von Axiomen noch ein „Axiom der Vollständigkeit“ hinzufügen kann, des Inhalts, dass es unmöglich ist, den Inbegriff der Punkte, Geraden und Ebenen durch Hinzunahme anderer Gebilde so zu erweitern, dass eine neue Geometrie entsteht, die alle Axiome jener fünf Gruppen erfüllt. Dieses nicht rein geometrische Axiom ist deshalb von Wichtigkeit, weil mit seiner Hülfe der Bolzano'sche Satz bewiesen werden kann, dass auf einer Geraden jede Menge von Punkten, die zwischen zwei Punkten der Geraden enthalten ist, eine Häufungsstelle besitzt. Ferner ist im Anfange von § 18 ein Hinweis auf Arbeiten von Gérard, Schur und Stolz über die Flächenmessung geradliniger Vielecke hinzugekommen. Endlich ist am Schlusse eine längere Einschaltung gemacht, in welcher der Verf. bemerkt, dass er sich wesentlich auf die Fragen beschränkt habe, die sich bei der Annahme des euklidischen Parallelenaxioms stellen. Er weist hin auf die Untersuchungen von Lie, in denen dieses Axiom nicht gefordert wird, und meint, vor allen Dingen sei es nötig, die von Lie gemachte Voraussetzung der Differentiirbarkeit der benutzten Functionen genauer auf ihre Notwendigkeit oder Entbehrlichkeit zu untersuchen. Der Verf. knüpft daran einen Bericht über die von Dehn in seiner Dissertation erhaltenen Ergebnisse (vergl. darüber das Referat unten S. 471). El.

A. Padoa. Un nueva sistema de definiciones para la geometría euclídea. Progreso mat. (2) **2**, 364-368.

Auszug aus einem Vortrage auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris bezüglich der kleinsten Anzahl der in der Geometrie notwendigen Grundbegriffe, mit deren Hülfe alle anderen zu definiren sind.
Tx. (Lp.)

H. Thieme. Die Umgestaltung der Elementargeometrie. Pr. (No. 175) Berger-Oberrealsch. Posen. 40 S. 4°.

Der Verf. will feststellen, in wieweit die Entwickelung der neueren Geometrie und namentlich die vollkommenere Einsicht in die Grundlagen der Geometrie eine Umgestaltung des elementargeometrischen

Unterrichts notwendig macht. Er stellt zunächst fest, dass die Elemente Euklid's keineswegs von Mängeln frei sind, wenn auch Euklid in Sachen des 5. Axioms Recht behalten hat. In den Bemerkungen über die Geschichte des 5. Axioms begegnet man hier einigen Irrtümern, z. B. dem, dass Bolyai und Lobatschefskij Schüler von Gauss gewesen seien. Sodann berichtet der Verf. ausführlich über den bereits 1882 von Pasch gegebenen Aufbau der projectiven Geometrie und über gewisse von Schur stammende Vereinfachungen dieses Aufbaues. Hieran schliesst sich ein kritisches Referat über Rausenberger's Elementargeometrie von 1887, eine Besprechung von Veronese's Elementi di Geometria, dem ersten Lehrbuche der Elementargeometrie, das zugleich den Anforderungen der Schule und denen der modernen Strenge zu genügen sucht, und ein Bericht über Hilbert's Grundlagen der Geometrie (1899). Natürlich kann nicht die Rede davon sein, eines der genannten Werke beim Unterrichte zu Grunde zu legen; selbst das von Veronese wäre zu schwer dazu. Aber der Verf. meint, wenigstens jeder Lehrer müsse die Schriften von Pasch, Veronese und Hilbert durchgearbeitet haben, und werde dann von selbst alle Scheinbeweise möglichst vermeiden, damit nicht etwa der Nutzen der Mathematik für die Bildung des logischen Denkens in Frage gezogen werde. Zum Schlusse bespricht der Verf. die Lehrbücher von Hubert Müller (1875—78) und von Henrici und Treutlein (1882—91), von denen das erste den Stoff, das zweite die Methoden der projectiven Geometrie für den Schulunterricht nutzbar machen will, und endlich einige Versuche, gewisse Einzelheiten der Elementargeometrie umzugestalten. Vieles von alledem, meint er, ist auf dem Realgymnasium verwertbar, weniger dagegen auf dem Gymnasium. El.

G. Ingrami. Dubbi. Periodico di Mat. (2) **2,** 179-182.

P. Gazzaniga. Sopra l'articolo del prof. Ingrami, intitolato „Dubbi“. Periodico di Mat. (2) **2,** 272-277.

Die „Zweifel“ des Verf. beziehen sich auf die „Elementi di Geometria“ von Veronese und Gazzaniga (1897), wofern dieselben dem Unterrichte zu Grunde gelegt werden sollen. Von solchen Bedenken werden im ganzen 17 ausgesprochen und begründet; die Hebung derselben wird von Veronese erbeten. Diesem Ersuchen entspricht der Mitverfasser jenes Leitfadens der Geometrie in dem von der Redaction bestellten zweiten Artikel. Lp.

A. M. Bustelli. Il postulato del movimento. Boll. di mat. Bologna **1,** 195-201.

P. Buffa. Movimento ed eguaglianza. Periodico di Mat. (2) **3,** 129-135.

Der Aufsatz knüpft an den Artikel von A. M. Bustelli an: „Il postulato del movimento“ im Bollettino di matematiche e scienze fisiche,

anno I, welcher der Redaction nicht zugänglich gewesen ist. Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Satz: Die Grundlage der ganzen elementaren Geometrie ist der durch die Bewegung erwiesene Begriff der Gleichheit (Congruenz), in welchem Satze das Wort „erwiesen“ durch „verificirt“ ersetzt wird. Der Verf. erläutert die drei hauptsächlichsten Elemente dieses Ausspruches: Bewegung, Verification, Gleichheit.

Lp.

E. Study. Ueber nicht-euklidische und Linien-Geometrie. Nicht gehaltene Vorträge. Greifswald: F. W. Kunike. 8°. 31 S. sep. (S. 67-97 aus einer Festschrift für Professor Limpricht.)

Der Verf. stellt an die Spitze seiner Ausführungen den sehr beherzigenswerten Gedanken, dass, wie man auch sonst über den Wert der nichteuklidischen Geometrie denken mag, jedenfalls „unter Umständen zu einem tiefer eindringenden Verständnis selbst sehr elementarer Abschnitte der euklidischen Geometrie die Kenntnis der nichteuklidischen Geometrie nicht wohl entbehrt werden kann.“ Dass es sich wirklich so verhält, zeigen die vom Verf. gefundenen neuen Constructionen für die Zusammensetzung von Kräften, zu deren Auffindung der Umweg über die nichteuklidische Geometrie thatsächlich nötig gewesen ist. Es ergiebt sich aber auch, wie der Verf. an verschiedenen Beispielen näher ausführt, wenn man in der nichteuklidischen Geometrie Sätze oder Gruppen von Sätzen betrachtet, die nach dem Principe der Dualität zusammengehören, und dann den Grenzübergang zur euklidischen Geometrie macht. Dabei kann es vorkommen, dass einem Begriffe der nichteuklidischen Geometrie mehrere der euklidischen entsprechen, dass einzelne Sätze ganz illusorisch werden oder so verschieden von einander ausfallen, dass der Zusammenhang, der in der nichteuklidischen Geometrie deutlich sichtbar war, in der euklidischen gar nicht mehr an den Tag tritt. Der Verf. wendet sich jetzt zur Liniengeometrie des elliptischen Raumes. Er schlägt vor, die Clifford'schen Parallelen als „parataktische“ Gerade zu bezeichnen und die beiden Arten der Parataxie als linksseitige und rechtsseitige zu unterscheiden. Eine orientirte Gerade nennt er einen „Speer“ und den Inbegriff einer Geraden und ihrer absoluten Polare ein „Linienkreuz“. Mit Hülfe gewisser Abbildungen der Speere und der Linienkreuze auf Figuren des euklidischen Raumes ergiebt sich eine Fülle der fruchtbarsten Sätze und Methoden, z. B. zum Studium der Flächen von der Krümmung Null und der Normalennetze im elliptischen Raume, sowie gewisser Gruppen. Zum hyperbolischen Raume führt eine neue vom Verf. angegebene Darstellung der imaginären Punkte und Geraden der Ebene. Jedem reellen oder complexen Punkte der Ebene wird ein „Strahl“ zugeordnet, worunter das Stück einer Geraden zu verstehen ist, das zwischen zwei reellen Punkten einer beliebig gewählten, festen Kugel liegt. Sind diese Punkte verschieden, so heisst der Strahl „eigentlich“; fallen sie zusammen, so reducirt sich der Strahl auf einen Punkt der Kugel und heisst „uneigentlich“. Die uneigentlichen Strahlen sind die

Bilder der Punkte eines irreducibeln Kegelschnitts. Auf denselben Strahlenraum werden nun auch die reellen und imaginären Geraden der Ebene abgebildet, indem der Strahlenraum mit zwei Schichten von Strahlen überdeckt gedacht wird, derart, dass derselbe Strahl, je nachdem man ihn als Strahl der ersten oder der zweiten Schicht betrachtet, einen Punkt oder dessen Polare in Bezug auf jenen Kegelschnitt repräsentirt. Den projectiven und den dualistischen Transformationen der Ebene entsprechen bei dieser Abbildung gewisse Transformationen der Strahlen, bei denen je zwei Strahlen, die verschiedenen Schichten angehören, und die einander im Sinne der durch die Kugel definirten Cayley'schen Massbestimmung senkrecht schneiden, in zwei ebensolche Strahlen übergehen. Näheres mitzuteilen ist hier nicht möglich, zumal da der Verf. selbst schon im Vergleich mit der Fülle der neuen Ergebnisse die Darstellung sehr knapp gehalten hat. Betont sei nur, dass man von jetzt ab die Plücker'sche Liniengeometrie nicht mehr als die einzige ihrer Art ansehen darf, sondern dass man die vom Verf. entwickelten Liniengeometrien, die von der Plücker'schen ganz verschieden sind, als vollkommen gleichberechtigt mit dieser zu betrachten hat. El.

M. Dehn. Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. **53**, 404-439; Diss. Göttingen. Leipzig: B. G. Teubner. 38 S. 8°.

Von den vier Axiomgruppen, die Hilbert in seiner Festschrift (s. F. d. M. **30**, 424) unterschieden hat, legt der Verf. die erste, zweite und vierte zu Grunde, also die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Congruenz; dagegen verzichtet er auf das Parallelenaxiom und auf das Archimedische. Indem er nun zu den „wirklichen" Punkten u. s. w. noch „ideale" Punkte u. s. w. hinzunimmt, erreicht er, dass die Axiome der Verknüpfung ausnahmelos gelten, dass also je zwei Gerade einander in einem (wirklichen oder idealen) Punkte treffen u. s. w.; indem er ferner eine ideale Ebene als „Normalebene" festsetzt, erreicht er, dass die Axiome der Anordnung für alle Elemente gelten mit alleiniger Ausnahme der Elemente der Normalebene. Damit ist dann zugleich die Gültigkeit des Satzes von Desargues über die perspectiven Dreiecke allgemein beweisbar. Ferner lässt sich zeigen, dass alle Senkrechten auf einer Geraden durch einen Punkt, den Pol dieser Geraden, gehen und dass der Inbegriff der Pole aller Geraden, die durch einen wirklichen Punkt gehen, aus den Punkten einer Geraden (der Polare jenes Punktes) besteht; endlich lassen sich die Eigenschaften der auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks errichteten Mittelsenkrechten auf den Fall übertragen, dass die Spitze des Dreiecks ein idealer Punkt ist. Nunmehr wählt der Verf. auf der Ebene irgend einen Punkt O aus, dessen Polare t sei, und führt eine Pseudogeometrie ein, deren Punkte und Gerade alle wirklichen und idealen Punkte und Geraden der Ebene sind, mit Ausnahme der Punkte von t und der Geraden t selbst. Für

diese Pseudogeometrie gelten alle Axiome der Verknüpfung und Anordnung sowie das Parallelenaxiom (Gerade, die einander auf t treffen, heissen pseudoparallel). Ferner lässt sich der Begriff der Pseudocongruenz von Strecken und Winkeln einführen, und man erhält so eine Pseudogeometrie, die im Grunde identisch ist mit der euklidischen Geometrie, deren unendlich ferne Gerade t ist, und deren Kreispunkte harmonisch liegen zu den Punktepaaren, die auf t von den zu einander senkrechten Strahlenpaaren durch O ausgeschnitten werden. In dieser Pseudogeometrie gelten nun alle Sätze der euklidischen Geometrie; daher ist z. B. die Winkelsumme jedes Dreiecks pseudocongruent zwei Rechten. Ferner lässt sich nach Hilbert ohne Benutzung des Archimedischen Axioms eine Streckenrechnung und eine Art analytischer Geometrie construiren, mit deren Hülfe der Pascal'sche Satz über das Geradenpaar beweisbar ist, der nunmehr, als reiner Schnittpunktsatz, auch in der ursprünglichen Geometrie gilt; endlich lässt sich auch die projective Geometrie begründen. Der Verf. beweist jetzt, dass zwei congruente Punktreihen auf verschiedenen Geraden stets projectiv sind, und leitet daraus eine Beziehung zwischen der Congruenz und der Pseudocongruenz solcher Strecken ab, die auf den durch O gehenden Geraden liegen. Mit Hülfe dieser Beziehung gelingt es ihm dann, ganz ohne das Archimedische Axiom den Satz zu beweisen, dass, wenn die Winkelsumme in einem Dreiecke kleiner, gleich, grösser als zwei Rechte ist, sie in jedem andern Dreiecke ebenso beschaffen ist. Mit Hülfe der von Hilbert angegebenen nichtarchimedischen Geometrie lassen sich ferner zwei Geometrien construiren, in denen die Winkelsumme grösser als zwei Rechte, bez. gleich 2 Rechten ist, in denen aber doch durch jeden Punkt zu jeder Geraden unendlich viele Parallelen möglich sind (die nicht-Legendre'sche und die semi-euklidische Geometrie). Dagegen folgt merkwürdiger Weise aus der Nichtexistenz von Parallelen notwendig, dass die Winkelsumme grösser als zwei Rechte ist, auch wenn das Archimedische Axiom nicht gilt. Die bisherigen Ansichten über die Beziehung zwischen der Winkelsumme und der Zahl der Parallelen durch einen Punkt müssen also, wenn das Archimedische Axiom wegfällt, wesentlich modificirt werden.

El.

M. Frolov. Note sur la géométrie non-euclidienne. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28,** 70-72.

Der Inhalt dieser Note deckt sich mit dem der beiden Aufsätze, über welche nachstehend berichtet ist.

Lp.

M. Frolov. Considérations sur la géométrie non-euclidienne. Ens. math. **2,** 179-187.

Die Arbeit enthält wieder zwei Versuche, die nichteuklidische Geometrie als falsch nachzuweisen. Der erste beruht auf der Betrachtung eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Mittelsenkrechte zu einander

parallel sind. Aus dem einen Dreieck wird eine continuirliche Reihe von Dreiecken derselben Art abgeleitet, die alle dieselben Mittelsenkrechten haben, und als Grenzfall bekommt man eines, dessen drei Winkel Null sind. Sind $A = B$ und C die Winkel des ursprünglichen Dreiecks, so ist $C > 2A + 2B$, und Entsprechendes gilt für alle folgenden Dreiecke. Im Grenzfalle ist für die Dreieckswinkel $C' = 2A' + 2B' = 0$. Der Verf. aber behauptet, dass nach dem Gesetze der Continuität schliesslich auch Dreiecke herauskommen müssten, bei denen $C' < 2A' + 2B'$ wäre, bei denen also die Mittelsenkrechten einander schneiden müssten. Wo sich diese Dreiecke befinden, zeigt er freilich nicht. Der zweite Versuch ist unter den zahlreichen, die der Verf. gemacht hat, wohl der allerschwächste; er beruht auf der irrigen Meinung, dass, wenn von AB aus nach derselben Seite hin AT und BS so gezogen werden, dass BAT ein rechter und ABS ein spitzer Winkel ist, dann die von BS aus auf AT gefällten Lote von B nach S hin unter allen Umständen ohne Aufhören abnehmen. El.

M. Frolov. Considérations nouvelles sur la géométrie non-euclidienne. Ens. math. **2**, 293-297.

Der ebenso unermüdliche wie unbelehrbare Bekämpfer der nichteuklidischen Geometrie glaubt darin einen Widerspruch entdeckt zu haben, dass die Gerade, die den beiden Schenkeln eines Winkels parallel ist, zur Halbirenden des Winkels symmetrisch liegen muss. Aus diesem Umstande glaubt er nämlich schliessen zu dürfen, dass jeder andere Winkel, zu dessen Schenkeln die Gerade auch parallel ist, dieselbe Winkelhalbirende haben müsse, wie jener erste, und da er leicht Winkel construiren kann, bei denen sich das nicht bestätigt, so ist der Widerspruch fertig. El.

J. Andrade. Euclidien et non-euclidien. Ens. math. **2**, 298-300.

Anknüpfend an den eben besprochenen Artikel von Frolov führt der Verf. aus, dass das euklidische Parallelenaxiom eine überaus nützliche, ja für die Praxis unentbehrliche Uebereinkunft ist, dass aber deswegen das Studium der anderen Möglichkeiten keineswegs überflüssig ist, da sie in der That auf widerspruchsfreie Geometrien führen. Einen Beweis für diese Widerspruchsfreiheit deutet der Verf. an; er beruht auf der Reduction eines Kräftesystems, die ohne specielle Voraussetzung über die Art der Geometrie ausführbar ist, und die in jedem einzelnen Falle die Aufstellung der ebenen Trigonometrie gestattet. El.

Éd. Collignon. Note sur l'existence géométrique du rectangle. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 87-99.

Der Standpunkt des Verf., der seinem Freunde Frolov beipflichtet, geht aus den folgenden Sätzen der Einleitung hervor: „Es genügt die Feststellung, dass es möglich ist, ein Rechteck zu construiren. Wir beginnen mit der Aufstellung der Principien, auf denen die ganze Geometrie beruht. Wir geben alle Axiome des Euklid zu. Der Raum, den wir im Auge haben, ist der wirkliche Raum, derjenige, welcher von dem ganzen Altertum anerkannt ist, derjenige, welcher den Körpern die Existenz und die Bewegung ermöglicht, ohne dass die Thatsache der Bewegung für sie weder Dilatation noch Contraction, noch Deformation irgend welcher Art nach sich zieht. Wir fassen ihn als unbegrenzt ausgedehnt nach allen Richtungen auf. Als bekannt können wir auch voraussetzen die ersten Sätze der elementaren Geometrie, diejenigen, deren Beweis nichts von dem Postulatum entlehnt, nämlich: Die Lehrsätze, welche die Existenz des in einem Punkte einer Geraden errichteten Lotes und des von einem Punkte auf eine Gerade gefällten Lotes aussagen; die Eigenschaft des Lotes, kürzer zu sein als jede schiefe Verbindende; die Sätze bezüglich der Congruenz der Dreiecke“ u. s. w. Es genügt, hiernach die charakteristischen Schlusssätze ebenfalls mitzuteilen: „Die praktische Geometrie ist die euklidische, und man muss das Postulatum als eine Erfahrungsthatsache zugeben (Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie, 1891). Daher sehen wir die euklidische Geometrie im täglichen Gebrauche, nicht bloss bei den Euklidikern, sondern auch bei den überzeugtesten Nichteuklidikern.“ Lp.

W. H. Janssen van Raay. Opinions de quelques géomètres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne. Kasan Ges. (2) **10**, No. 1, 1-14.

„La littérature mathématique des Pays-Bas ... ne compte que quelques auteurs qui ont essayé de fonder la théorie des parallèles sur une base inébranlable et dont les écrits ... n'offrent qu'un intérêt historique et bibliographique.“ Es werden dann besprochen Van Swinden's Grondbeginsels der Meetkunde 1790 (von C. F. A. Jacobi 1834 ins Deutsche übersetzt), De Gelder's mehrfach ausgegebene Beginsels der Meetkunst, Buys Ballot's Beginsels en gronden der Meetkunde u. a. Si.

Servant. Sur quelques applications de la géométrie non euclidienne. C. R. **131**, 827-830.

Darboux hat eine Transformation angegeben, vermöge deren jeder Fläche des nichteuklidischen Raumes eine Fläche des euklidischen Raumes zugeordnet ist, derart, dass den nichteuklidischen Krümmungslinien die euklidischen Krümmungslinien entsprechen und Isothermflächen wieder in Isothermflächen übergehen. Der Verf. zeigt nun, dass, wenn man die Minimalcurven als Parameterlinien benutzt, die Differentialgleichung jeder

Fläche constanter mittlerer nichteuklidischer Krümmung identisch wird mit der Differentialgleichung einer Fläche constanter mittlerer euklidischer Krümmung. Insbesondere betrachtet er die Flächen S constanter mittlerer NE-Krümmung, deren Differentialgleichung mit der der euklidischen Minimalflächen zusammenfällt, und bemerkt, dass diesen Flächen S bei der Darboux'schen Transformation gewisse Flächen S' entsprechen, die Thybaut in seiner These (F. d. M. **28**, 566, 1897; vergl. Abschnitt IX dieses Bandes) zur Deformation eines gewissen Paraboloids in Beziehung gesetzt hat. Er fügt hinzu, dass man aus zwei parallelen Flächen constanter mittlerer NE-Krümmung durch Quadraturen eine Fläche ableiten kann, die auf ein beliebiges Paraboloid abwickelbar ist. Endlich teilt er einige Eigenschaften der betreffenden Flächen des NE-Raumes mit. El.

Johannes Petersen. Géométrie des droites dans l'espace non euclidien. Kjöb. Overs. 1900, 308-330.

In dieser Abhandlung betrachtet der Verf. den Inbegriff aller ∞^3 Figuren, die mit einer gegebenen Figur congruent sind, als die Punkte eines nichteuklidischen Raumes. Es wird z. B. der Inbegriff aller Figuren, die bei Drehung um einen bestimmten Punkt, den Richtungspunkt, einander decken, als eine Gerade bezeichnet. Zwei Punkte bestimmen dann eine Gerade. Der Abstand zweier Punkte ist der halbe Drehungswinkel der Rotation, bei welcher die eine Figur zur Deckung mit der anderen gebracht wird u. s. w. Es wird gezeigt, dass der so bestimmte Raum ein Riemann'scher ist. Der Winkel zweier Geraden ist der sphärische Abstand ihrer Richtungspunkte.

Es werden die Clifford'schen Parallelen bestimmt. Zwei Gerade sind Parallelen erster Art, wenn sie denselben Richtungspunkt besitzen. Zwei Geraden sind Parallelen zweiter Art, wenn sie zur Deckung gebracht werden können durch eine Drehung der Kugel. Zwei parallele Gerade der ersten oder der zweiten Art liegen niemals in derselben Ebene. Durch jeden Punkt können immer zwei Gerade gezogen werden, die mit einer gegebenen Geraden parallel sind, eine der ersten und eine der zweiten Art. Diese beiden Geraden bestimmen vollständig die Gerade, mit der sie parallel sind (eigentlich jedoch die Gerade und ihre Polare, indem zwei Gerade polar sind, wenn sie zugleich Parallelen der ersten und Parallelen der zweiten Art sind). Es giebt immer zwei Gerade, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht stehen. Die Summe dieser beiden Senkrechten ist gleich dem Winkel der Geraden oder gleich dem Winkel zweier Geraden, die mit den gegebenen Geraden Parallelen erster Art bilden. Die Differenz der beiden Senkrechten ist dagegen gleich dem Winkel zweier Geraden, die durch denselben Punkt gehen und mit den gegebenen Geraden Parallelen zweiter Art bilden.

Es werden hiernach die Bewegungen einer starren Figur in einem elliptischen Raume betrachtet. Sie können zusammengesetzt werden aus Translationen erster und zweiter Art und aus Rotationen. Bei den

letzteren sind alle Punkte einer gegebenen Geraden (der Axe) unbeweglich, und es kann bewiesen werden, dass, wenn eine Rotation von der Grösse Θ durch eine Translation längs der Axe von der Grösse $\frac{1}{2}\Theta$ abgebildet wird, dann Rotationen um Axen, die durch denselben Punkt gehen, durch geometrische Addition der entsprechenden Translationen zusammengesetzt werden können.

Der nächste Abschnitt weist analytisch nach, dass der vorher definirte Abstand zweier Punkte mit der gewöhnlichen Definition übereinstimmt, wenn man sich der Fundamentalfläche $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ bedient.

Danach wird bewiesen, dass die Resultate ebenso gut in einem hyperbolischen Raume gültig sind. Als Hauptresultat der vorhergehenden Untersuchungen kann festgestellt werden: Jede Liniengeometrie im Raume kann auf die Geometrie der Punktepaare einer reellen Kugelfläche zurückgeführt werden. Im elliptischen Raume besteht jedes Punktepaar aus zwei nicht zusammenfallenden reellen Punkten, im euklidischen Raume aus zwei zusammenfallenden reellen Punkten, im hyperbolischen Raume aus zwei conjugirt imaginären Punkten. V.

M. Efimov. **Les séries dans la pangéométrie.** Nouv. Ann. (3) **19**, 28-31.

Im unendlich kleinen Gebiet fallen die euklidische Geometrie und die Pangeometrie zusammen. Daher geht in diesem Falle, wie der Verf. zeigt, die Formel $\sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b)=\sin\Pi(c)$ (Lobatschewsky) in die des Pythagoreischen Satzes über. Durch ein umgekehrtes Verfahren wird aus der Grundformel der sphärischen Trigonometrie eine entsprechende Beziehung zwischen den Functionen $\sin\Pi(a)$, $\sin\Pi(b)$, $\sin\Pi(c)$, $\cos\Pi(a)$, $\cos\Pi(b)$, $\cos C$ abgeleitet. Hierbei werden in beiden Fällen die Anfangsglieder der den Functionen entsprechenden trigonometrischen Reihen benutzt. Schg.

E. Sabinin. **Anwendung der Variationsrechnung zum Beweise des Satzes über die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks auf der Fläche constanter Krümmung.** Moskau Math. Samml. **21**, 54-61. (Russisch.)

Der Satz über die Winkelsumme eines Dreiecks wird ohne Charakteristikentheorie bewiesen. Aus der Variationsrechnung wird die Differentialgleichung der geodätischen Linie auf der Kugel entnommen. Si.

Weitere Litteratur.

J. Bonnel. Note sur les systèmes de géométrie et l'atome. Paris: Gauthier-Villars. 15 S. 8°.

R. Bonola. Sulla teoria delle parallele e sulla geometria non-euclidea. Bologna. 80 S. 8°.

A. L. Bosworth. Begründung einer vom Parallelenaxiome unabhängigen Streckenrechnung. Göttingen: Dietrich. 57 S. 8°.

M. Feldblum. Ueber elementargeometrische Constructionen. Wiad. mat. **4,** 1-44. (Polnisch.)

Auch als Inauguraldissertation (Universität zu Göttingen 1899) in deutscher Sprache erschienen. Dn.

G. B. Guccia. Memorie di geometria. Palermo. 8°.

G. B. Halsted. Non-euclidean geometry. Amer Math. Monthly **7,** 123-133.

G. B. Halsted. Non-euclidean geometry for teachers. 14 S. 8°.

F. Kölmel. Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projectiver Massbestimmung. Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie. Lahr: O. Schauenburg & Co. VII u. 99 S. gr. 8°.

G. B. Marangoni, F. Ferrari. Lunghezza, area, volume. Boll. di mat. Bologna **1,** 182-183, 232-234.

H. Poincaré. Sur les principes de géométrie. Rev. de métaphys. **8,** 73-86.

C. Vidal. Pour la géométrie euclidienne; étude critique élémentaire sur les fondements de la géométrie. Paris: Croville-Moraut. 44 S. 8°.

Kapitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie).

H. Poincaré. Second complément à l'analysis situs. Lond. M. S. Proc. **32,** 277-308.

Der Verf. setzt hier die Ausführungen zu seinen allgemeinen Untersuchungen über die Analysis Situs der Mannigfaltigkeiten im R_n (F. d. M. **26,** 541, 1895), zu denen ihn die Heegard'sche Kritik veranlasst hatte (F. d. M. **29,** 529, 1898; **30,** 435, 1899), weiter fort. Er beschäftigt sich insbesondere mit gewissen Zahlenmatrizen, die für die Polyeder des R_n charakteristisch sind, und die folgendermassen definirt sind. Sei v_q^i irgend eine Mannigfaltigkeit der Dimension q, die der Grenze des Polyeders angehört, und v_{q-1}^j eine analoge Mannigfaltigkeit der Dimension $q-1$. Dann kann man eine Zahl ε_{ij}^q definiren, die 0 oder ± 1 ist, jenachdem v_{q-1}^j einen Bestandteil der Grenze von v_q^i bildet, oder nicht, und zwar ist $\varepsilon = +1$, wenn v_q^i und v_{q-1}^j in „directer" Beziehung stehen, die folgendermassen bestimmt ist. Sind

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots,\ F_{n-q} = 0,\ F_{n-q+1} = 0$$

die Gleichungen, die (im Verein mit gewissen Ungleichungen $\varphi_\alpha > 0$)

v^j_{q-1} definiren, so soll v^i_q, von den Ungleichungen $\varphi_a > 0$ abgesehen, durch

$$F_1=0,\ F_2=0,\ldots,\ F_{n-q}=0,\ F_{n-q+1}>0$$

definirt sein. Dagegen ist $\varepsilon = -1$, wenn v^i_q und v^g_{q-1} in „indirecter" Beziehung stehen, was z. B. eintrifft, wenn v^i_q durch

$$F_1=0,\ F_2=0,\ldots,\ F_{n-q}=0,\ F_{n-q+1}<0$$

definirt ist.

Mit den so definirten Ziffern ε^q_{ij} kann man nun Matrizen bilden; die Untersuchung solcher Matrizen und ihre Bedeutung für die Natur und den Zusammenhang der Polyeder bildet den Hauptinhalt der Arbeit. Sie enthält insbesondere einen Satz, der die Bedingung angiebt, die die Matrizen erfüllen müssen, damit ein Polyeder, dessen sämtliche Betti'sche Zahlen gleich 1 sind, einfach zusammenhängend ist. Sfs.

G. Brunel. Configurations spéciales tracées sur la surface de genre zéro. Bordeaux Procès-verbaux 1899-1900, 2-4.

Es werden die Cfg. bestimmt von folgender Art. In jeder Ecke stossen gleich viele Kanten zusammen, jede Fläche wird entweder von 2 oder von p Kanten begrenzt, und die Zahl der Flächen mit p Kanten soll unbestimmt bleiben. Es giebt drei Klassen solcher Cfg. Sfs.

Hadamard. Sur les points doubles des contours fermés. Bordeaux Procès-verbaux 1899-1900, 4-7.

Mitteilung eines Satzes über die Gesetze, die das Auftreten und Verschwinden von Doppelpunkten bei solchen Curven regeln, die im Sinne der Analysis Situs in einander deformirt werden können. Sfs.

W. F. Osgood. Ueber einen Satz des Herrn Schoenflies aus der Theorie der Functionen zweier reeller Veränderlichen. Gött. Nachr. 1900, 94-97.

F. Bernstein. Ueber einen Schoenflies'schen Satz der Theorie der stetigen Functionen zweier reeller Veränderlichen. Gött. Nachr. 1900, 98-102.

Der Satz, um den es sich hier handelt, lautet: Sind $\xi = \varphi(x, y)$ und $\eta = \psi(x, y)$ zwei für die Punkte $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ eindeutige und stetige Functionen, so füllen die Bildpunkte ξ, η in der (ξ, η)-Ebene das Innere und den Rand einer geschlossenen Jordan'schen Curve lückenlos aus. (F. d. M. **30**, 434, 1899.) Von diesem Satze werden neue Beweise gegeben. Sfs.

E. VON FEDOROW. Reguläre Plan- und Raumverteilung. Münch. Abh. **20**, 465-588.

Der Verf. behandelt das Problem in der Weise, dass er von denjenigen Ebenen und Raumteilungen ausgeht, die den Translationsgruppen entsprechen, resp. den zugehörigen Parallelflächnern. Diese werden auf alle zulässige Weise zerlegt und nach dieser Methode allgemeinere Teilungen, resp. deren Fundamentalbereiche gewonnen. Sfs.

K. ROHN. Einige Sätze über regelmässige Punktgruppen. Math. Ann. **53**, 440-449.

Beweis des Satzes, dass bei regelmässigen Punktgruppen mit endlichen Abständen nur Schraubungen vom Winkel π, $2\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/3$ auftreten, sowie des Satzes, dass zwischen je zwei Schraubungen eine identische Relation besteht (F. d. M. **30**, 438, 1899). Sfs.

O. HERMES. Die Formen der Vielflache. J. für Math. **122**, 124-154.

Der Verf. wendet die früher von ihm gefundenen allgemeinen Resultate (F. d. M. **30**, 438, 1899) in doppelter Weise an. Erstens polarisirt er sie und gelangt dadurch zu den bezüglichen Resultaten über räumliche Vielecke; zweitens betrachtet er den besonderen Fall der Polyeder mit gleichviel Ecken und Flächen, und unter ihnen insbesondere wieder diejenigen, die autopolar sind. Die Aufzählung der bezüglichen Polyeder behandelt zunächst eingehend die Achtflache; ausserdem auf Grund von allgemeinen Herstellungsmethoden gewisse allgemeinere Klassen autopolarer Polyeder. Sfs.

M. BRÜCKNER. Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte. (Mit 7 lithogr. u. 5 Lichtdr.-Doppeltafeln sowie vielen Textfig.) Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 227 S. 4°.

Durch Zusammenfassen des äusserst zerstreuten Materials über Polygone und Polyeder füllt das Buch zweifellos eine sehr fühlbare Lücke aus. Allerdings bedingt die Rücksicht auf die elementaren Vorkenntnisse, die dasselbe bei dem Leser voraussetzt, das Wegbleiben zweier Gebiete, nämlich der Lehre von den n-dimensionalen Gebilden, die übrigens der Verf. bereits früher (F. d. M. **25**, 1028, 1894) dargestellt hatte, und der Lehre von den gruppentheoretischen Anwendungen der Polygone und Polyeder.

Der erste Abschnitt ist der allgemeinen Theorie der Polygone gewidmet. Bei der Klassification derselben spielt die Art a, d. h. das Verhältnis der Summe der Aussenwinkel (nach gewöhnlichem Sprachgebrauch) zu 4 Rechten, und die Zahl k der überstumpfen Innenwinkel die Hauptrolle. Von Wichtigkeit sind hier, wie in allen späteren Abschnitten, die

geschichtlichen Bemerkungen. Den ersten klaren Begriff von einem Polygon hatte Girard (1626), den allgemeinen Begriff eines solchen schuf Meister (1770). Die allgemeine Vieleckslehre rührt von Wolf (1847) und Wiener (1864) her. Die auf ungenügender Kenntnis der Litteratur beruhende Arbeit von Dostor (1880) bedeutet einen Rückschritt.

Der zweite Abschnitt, den besonderen Polygonen gewidmet, bringt zunächst die regelmässigen Polygone, deren Theorie man Poinsot (1810) verdankt. Unter den mit Zirkel und Lineal construirbaren ist das von J. Hermes untersuchte 65537-Eck hervorzuheben. Die halbregelmässigen Vielecke erwähnt zuerst Hessel (1830); ihre Theorie ist von Hess (1874) gegeben worden. Nach Aufzählung derselben wird auch den sphärischen Polygonen eine kurze Betrachtung gewidmet.

Im dritten Abschnitt, der die allgemeine Theorie der Polyeder behandelt, steht der Euler'sche Satz (1758) im Mittelpunkte der Untersuchungen. Es werden vier Gruppen von Beweisen desselben unterschieden. Die Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes für nichteulersche Polyeder bildet den zweiten Teil dieses Abschnitts. Die bisher vorliegende Darstellung des Euler'schen Satzes für einseitige Polyeder erklärt der Verf. für noch nicht erschöpfend und streng.

Der vierte Abschnitt handelt von den Euler'schen Polyedern im besonderen. Zunächst kommt die Einteilung der Polyeder in drei Klassen, je nachdem sie 1, 2, oder 3 Scheitelflächensysteme besitzen. Was die Aufzählung der möglichen Typen Euler'scher Körper betrifft, so bespricht der Verf. insbesondere die Arbeiten von Kirkman (die jedoch nicht alle erwähnt werden) und Hermes. Weiter kommt die charakteristische Gleichung $\sum_3^n (6-r) f_r = 12$, wenn f_r die Zahl der r-Ecke des Polyeders ist und dasselbe höchstens n-Ecke besitzt. Aus derselben folgt

$$3 f_3 + 2 f_4 + f_5 - 12 = \sum_7^n (r-6) f_r = m$$

(die beiden Stammgleichungen). Die Zahl m bestimmt den Bereich des Polyeders, die Lösungssysteme $f_3, f_4, \cdots$ der Stammgleichungen den Stamm desselben; je nach der Anordnung der Flächen des Lösungssystems und je nach der Zahl der zugefügten Sechsecke zerfallen die Formen eines Stammes in Familien. Den Schluss des Abschnitts bildet die Lehre von den Hexagonoiden, d. h. den nur von Sechsecken begrenzten Polyedern.

Der fünfte Abschnitt ist den besonderen Euler'schen Polyedern, den regulären Archimedischen, gleicheckigen und gleichflächigen gewidmet.

Der sechste Abschnitt behandelt die besonderen höheren, d. h. nichteulerschen Polyeder, insbesondere die zwei Kepler'schen Sternkörper, als deren Entdecker Kepler im Gegensatz zu Jamitzer nachgewiesen wird. Die ausführliche Theorie der regulären Polyeder höherer Art wurde von Poinsot und Cauchy gegeben. Den Hauptteil des Abschnitts bildet die Lehre von den gleicheckigen und gleichflächigen höheren Polyedern, hauptsächlich auf Grund von Arbeiten von Hess.

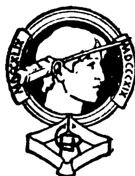
Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben
von
Emil Lampe und **Georg Wallenberg.**

Band 31.
Jahrgang 1900.
(In 3 Heften.)
Heft 2.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Bogen 31 bis 42.

Inhaltsverzeichnis.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. 15, Fasanenstrasse 82.

Dem Buch ist zwar kein Litteraturverzeichnis, wohl aber ein Namen- und Sachregister beigegeben. Die Litteratur ist sorgfältig benutzt worden; auf die Aufzählung kleinerer Arbeiten, in welchen nichts wesentlich Neues enthalten ist, hat sich der Verf. nicht eingelassen. Von der grössten Bedeutung sind die 12 grossen Tafeln, auf welchen die meisten der besprochenen Körper nach des Verf. grosser Modellsammlung in deutlichem und schönem Lichtdruck abgebildet sind. Viele der Körper haben hier zum ersten Male eine bildliche Darstellung gefunden. Wö.

H. Maschke. Note on the unilateral surface of Moebius. American M. S. Trans. **1**, 39.

Angabe der Construction einer geradlinigen Fläche dritten Grades, welche die Eigenschaft der Einseitigkeit besitzt. Lp.

C. N. Little. Non alternate ± knots. Edinb. Trans. **39**, 771-778.

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

M. J. M. Hill. The contents of the fifth and sixth books of Euclid arranged and explained. Cambridge: At the University Press. XX u. 143 S.

Das Werk stellt sich die Aufgabe der Beseitigung der Hauptschwierigkeiten, welche diejenigen stets empfinden, die in das Verständnis des sechsten Buches der Elemente eindringen wollen, indem der Verf. in Uebereinstimmung mit den meisten Lehrern der Ansicht ist, das fünfte Buch sei viel zu schwer für alle Schüler mit Ausnahme der besten. Die hier gegebene Auslegung von Buch V, Def. 5, ist die von De Morgan in seiner Schrift über den Zusammenhang von Zahl und Grösse; doch werden incommensurable Grössen nicht betrachtet. Wenn zwei Grössen A und B gegeben sind, so werden die Vielfachen $A, 2A, 3A, \dots$, $B, 2B, 3B, \dots$ gebildet. Der Inbegriff der beiden Systeme von Vielfachen, nach aufsteigender Folge geordnet (z. B. $B, A, 2B, 2A, 3B, 4B, 3A, \dots$), heisst die relative Stufenfolge der Vielfachen der beiden Grössen. Die Bedingungen dafür, dass die Stufenfolge der A, B dieselbe ist wie die der C, D, werden ermittelt, und es wird gezeigt, dass die Stufenfolge zweier commensurablen Grössen dieselbe ist, wie die zweier rationalen Zahlen. Eine Bezeichnung, die im wesentlichen auf Love zurückgeht, wird zur Darstellung der relativen Stufenfolgen angewandt

und liefert eine Art graphischer Darstellung der fünften Definition des fünften Buchs Euklid's. In einem kurzen Berichte ist es unmöglich, auf die Behandlung des Verf. näher einzugehen; aber es muss gesagt werden, dass die Grundbegriffe der euklidischen Methode mit ausgezeichneter Klarheit vorgetragen sind, und dass schwerlich irgend eine wesentliche Verbesserung anzubringen ist. Wenn Schüler diese Darstellung zu begreifen nicht im Stande sind, so dürfen getrost alle Versuche, die euklidische Behandlung der Proportion ihnen verständlich zu machen, aufgegeben werden. Der Verf. berichtet, dass der hier befolgte Gang von ihm beim Unterrichte während der letzten drei Jahre gebraucht worden ist und ein besseres Verständnis gefunden habe als die sonst üblichen Methoden. In voller Anerkennung der augenscheinlichen Vorzüge der Darstellung kann Ref. jedoch keineswegs die Ueberzeugung von ihrer Gemässheit für den elementaren Unterricht gewinnen. — Wir müssen erwähnen, dass Sätze über solche Kapitel wie harmonische Punkte und Strahlen, Pole und Polaren, Inversion u. s. w. dem Buche einverleibt sind, und dass zahlreiche Aufgaben zur praktischen Einübung der Principien des Gegenstandes gegeben sind. Gbs. (Lp.)

E. Bagnoli. Geometria rettilinea e curvilinea trattata con metodo preeuclidico e cronogoniometria. Roma: E. Löscher & Co. VII + 295 S. 8⁰ u. 24 Taf.

Dieses in italienischer Sprache geschriebene Buch bezweckt, die geometrische Wissenschaft nach einer Methode, die der Verf. voreuklidisch nennt, aufzubauen. Er sagt in der Vorrede, dass in der ältesten Zeit das Studium der Geometrie parallel mit demjenigen des numerischen Rechnens ging, und dass Euklid hiervon abgewichen sei und die Geometrie synthetisch als Wissenschaft für sich behandelt habe. Obschon Euklid so Vortreffliches hierbei geleistet hat, dass noch heute seine Elemente die Basis des geometrischen Unterrichtes abgeben, meint dennoch der Verf., dass das Aufgeben des vergleichenden Systems dem Fortschritt der Wissenschaft nicht nützlich gewesen sei. Er giebt nun einen Lehrgang der Geometrie, der allerdings andere Dinge enthält, als ein gewöhnlicher Lehrgang. Doch ist der Inhalt seines Buches vollständig elementar. Er erwähnt die Winkel, die sich mit Zirkel und Lineal construiren lassen, ohne auf die Gauss'sche Kreisteilung einzugehen, an die nur in einer Anmerkung erinnert wird, giebt dann Sätze vom Dreiecke und zeigt, wie die trigonometrischen Tafeln aufgestellt werden. Im zweiten Teil behandelt er das numerische Wurzelausziehen, dann die Potenzirung und Radicirung geometrischer Grössen, die Trisection und Multisection des Winkels (mit Hülfe von Tabellen).

Im dritten Teil werden allerlei Figuren, die geradlinig, krummlinig oder gemischtlinig sind, construirt, Sätze an ihnen entwickelt, ihre Quadratur behandelt. Zuletzt werden auch die Kegelschnitte erwähnt. —

In einem Anhang folgen dann noch praktische Anwendungen der Geometrie und Beschreibung einiger Messinstrumente.

Des näheren auf die Methode des Verf. einzugehen, würde zu viel Raum in Anspruch nehmen. Mz.

E. Bagnoli. Trattato delle corde nel circolo. Roma: Ermanno Loescher & Co. 87 S. u. 10 Taf. (1895).

Gleichzeitig mit der Schrift, über welche im vorangehenden Referate berichtet ist, hat die Redaction ein anderes Werk desselben Verf. aus dem Jahre 1895 zugesandt erhalten, das in dem betreffenden Jahrgange nur mit dem Titel angeführt werden konnte. Um die Mathematik den Handwerkern bequemer zu machen, verbindet der Verf. die Ableitung der geometrischen Eigenschaften der Kreissehnen mit Berechnungen, welche im Grunde einen Ersatz für trigonometrische Beziehungen schaffen sollen, kehrt also auf den Zustand zurück, auf dem die Astronomen des Altertums sich befanden. Eine Erleichterung oder Vereinfachung kann Referent in der Menge der einzuprägenden Sätze und Formeln, die im wesentlichen mit den trigonometrischen übereinkommen, nicht erblicken. Der theoretische Teil umfasst: I. Allgemeine Eigenschaften der Sehnen im Kreise. II. Complementarsehnen und Supplementarsehnen. III. Ergänzungssehnen (Sehnen zweier anstossenden Bogen). IV. Excentricität und Potenz der Sehnen. V. Vielfache Sehnen. VI. Einige Eigenschaften der Seiten und Diagonalen der regelmässigen eingeschriebenen Polygone. VII. Correspondirende Sehnen. VIII. Graphische Scalen. — Uebungsaufgaben. Der zweite Teil enthält die Beschreibung einiger Instrumente, die nach Angaben des Verf. von dem Mechaniker Gustavo Suscipi in Rom construirt sind und zur geometrischen Lösung mancher Aufgaben dienen sollen. Wir führen die italienischen Namen an: I. Compasso poligonale. II. Trisettore angolare. III. Trisettore scolastico. IV. Trisettore economico. V. Quadrante calcolatore. Lp.

H. Müller. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Zweiter Teil: Die Oberstufe. Lehraufgaben der Klassen Obersecunda und Prima. Berlin: W. Moeser. X u. 216 S. 8°.

Der Titel des Buches ist nicht recht klar. Aus der Zusammenfassung der Gymnasien und Realschulen sollte man vermuten, dass auch die Realgymnasien und Oberrealschulen mit gemeint seien; aber diese Oberstufe scheint sich doch nur auf die Lehraufgabe der drei oberen „Gymnasialklassen“ zu beschränken und, ähnlich wie bei den Aufgabensammlungen von Müller und Kutnewski, noch eine Sonderausgabe für die Realanstalten vorzusehen, was durchaus dem Inhalte des Buches entsprechen würde. Der Verf. giebt die Kapitel aus der Elementarmathematik so, wie er sie in seiner Praxis am humanistischen Gymnasium mit seinen Schülern bearbeitet hat. Dadurch hat das Buch an einzelnen Stellen ein eigenartiges Gepräge erhalten, z. B. bei den Sätzen der neueren

Geometrie, den complexen Zahlen, den Gleichungen, Reihen, der sphärischen Trigonometrie und den Elementen der analytischen Geometrie, womit nicht gesagt sein soll, dass die Behandlung gegenüber den alten bewährten Lehrbüchern überall einen Fortschritt bedeutet. Referent hat im Gegenteil manche Ausstellungen zu machen, die an dieser Stelle zum Teil nur angedeutet werden können. Die Sätze von Pol und Polare gestalten sich einfacher und die Beweise werden eleganter, wenn man gleich die für alle Kegelschnitte geltende Definition zu Grunde legt. Warum beim Beweise für die Aehnlichkeitsaxen nicht einfach der Menelaus herangezogen wird, ist nicht einzusehen. Der Satz von dem harmonischen Mittel bei der harmonisch geteilten Strecke ist nur halb richtig, wenn nicht rechts das Doppelzeichen $\pm$ gesetzt wird. S. 27 wird behauptet: eine Gleichung ändere nur ihre Form, wenn man sie quadrirt. Ich meine, doch auch ihren Grad, was viel wichtiger ist. Der Meinungsaustausch der Fachgenossen in der Hoffmann'schen Zeitschrift über diesen Punkt hat den Verf. offenbar unberührt gelassen. Den Sätzen von Moivre wird ein ungebührlich grosser Raum gewidmet, und doch wird eigentlich nur an Beispielen gezeigt, wie man complexe Zahlen durch Modul und Argument darstellt, während die allgemeine Lösung der reinen Gleichung n-ten Grades $x^n = a + bi$ kaum gestreift wird. Bei der Zinseszins- und Rentenrechnung finden sich Formeln und Sätze, in deren Verständnis einzudringen dem Ref. nicht gelungen ist. Es wird hier allen Ernstes behauptet, die Discontoformel $C = aq^n$ bleibe auch dann noch gültig, wenn $n = r/s$ eine gebrochene Zahl ist; „man kann nämlich, ohne C zu ändern, die Zeit in r Zeitabschnitte einteilen, von denen jeder $1/s$ Jahr beträgt, wenn man nur den Zinsfuss p' für die neuen Zeitabschnitte so wählt, dass $(1 + p'/100)^s = 1 + p/100$ ist." Gemeint ist wohl: Wenn die Zinsen nicht am Ende jedes vollen, sondern jedes $1/s$ Jahres kapitalisirt werden, so berechnet sich das Endkapital nach der Formel $C = a\left(1 + \frac{1}{s}\cdot\frac{k}{100}\right)^r$; dabei hat aber der gebrochene Exponent gar nichts zu thun. Verf. will freilich in der Rentenrechnung bei vierteljährlicher Einzahlung den Verzinsungsfactor $1 + p/100$ durch $(1 + p/100)^{\frac{1}{4}}$ und n durch $4n$ ersetzen und macht dabei die Bemerkung: Eine einfache Teilung von p (durch 4) wäre nur näherungsweise richtig, denn $(1 + p/100)^{\frac{1}{4}}$ ist nicht gleich $1 + \frac{1}{4}\cdot p/100$; natürlich nicht. Aber wenn man nicht weiss, ob die Zinsen jährlich am 1. Januar (wie bei der Sparkasse!) oder bei der jedesmaligen Einzahlung kapitalisirt werden sollen, kann man doch eine richtige Formel überhaupt nicht aufstellen; die hier gegebene Auseinandersetzung aber ist auf keinen Fall in Ordnung. — Welche Unklarheit gerade über diesen Punkt bei verschiedenen Autoren herrscht, zeigt ein Beispiel (No. 2272a und b) in einer sonst mit der äussersten Sorgfalt hergestellten neuen Aufgabensammlung. Auf die Frage: Nach wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, wenn es zu 4, bezw. $3\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen ausgeliehen und am Ende jedes Jahres noch um den 10. Teil seines ursprünglichen Betrages

vermehrt wird? wird hier bei 4 % mit der gewöhnlichen Rentenformel das Ergebnis $n = 6,4076$ Jahre herausgerechnet, das um mehr als ½ Jahr zu klein ist, während bei 3½ % mit sechsmaliger Einzahlung derselben Summe am Ende des Jahres eine Verdoppelung überhaupt nicht möglich ist. Ich halte es nicht für überflüssig, bei dieser Gelegenheit auf die richtige Darstellung in dem Lehrbuch von Baltzer hinzuweisen. — Was die übrigen Kapitel des Buches betrifft, so sind am besten diejenigen über die ebene Trigonometrie und Stereometrie gelungen; doch würde die Berücksichtigung der Axen bei den regelmässigen Polyedern die Berechnung derselben wesentlich vereinfachen. Einzelne Abschnitte sind als über die Grenzen des Gymnasiums hinausgehend mit einem Stern bezeichnet und auch etwas kurz behandelt; von der Convergenz der Reihen ist z. B. nicht die Rede. Wenn die analytische Geometrie in der hier angenommenen Ausdehnung auf Gymnasien gelehrt werden soll, würde sich doch die Benutzung eines altbewährten Lehrbuches, wie Gandtner-Gruhl, empfehlen. Vielleicht entschliesst sich der Verf., für die humanistischen und die Realanstalten gesonderte Ausgaben zu veranstalten; das Buch würde dadurch nur gewinnen. Eine hübsche Zugabe ist der Anhang mit geschichtlichen Angaben über die im Buche genannten Mathematiker. Lg.

F. Meigen. Lehrbuch der Geometrie. 2[te] vermehrte und verbesserte Auflage. Hildburghausen: O. Petzold. IV u. 83 S.

Der Inhalt dieses Buches ist die elementare ebene Geometrie bis zur Ausmessung des Kreises einschliesslich. Die Darstellung ist so, wie man sie in den meisten Büchern dieser Art findet. Doch ist anzuerkennen, dass vielfach auf Begriffe aus dem praktischen Leben Bezug genommen wird. Eine grosse Zahl (271) von Uebungsbeispielen, die der praktischen Anwendung entnommen sind, erhöht den Nutzen des Buches. Druck und Figuren (159) sind gut und deutlich. Mz.

G. Mahler. Ebene Geometrie. Dritte verbesserte Auflage mit 111 zweifarbigen Figuren. Leipzig: G. J. Göschen: 158 S. 12°. (Sammlung Göschen No. 41.)

Der Inhalt dieses Buches ist die elementare ebene Geometrie bis zu der Aehnlichkeit und der Ausmessung des Kreises einschliesslich; doch unterscheidet sich die Darstellung wesentlich von derjenigen der meisten anderen Bücher gleichen Inhalts. Die geometrischen Sätze und Lösungen werden hier nämlich meistens dadurch gewonnen, dass die Figuren bewegt werden. So die Congruenzsätze, wobei das eine Dreieck durch Drehung um einen Punkt mit dem andern zur Deckung gebracht wird, und andere Sätze. Hierzu sind dann Erklärungen über centrische und axiale Symmetrie nötig. Ob diese Methode der Bewegung den Zugang zur Geometrie leichter macht als die gewöhnliche Methode, will Ref.

nicht entscheiden. Immerhin erregt das Buch durch diese Eigenart Interesse. Sehr viele eingestreute Uebungen erhöhen den Wert des Buches; Druck und Figuren sind deutlich und gut. Mz.

J. G. HAMILTON and F. KETTLE. A first geometry book. London: Edward Arnold. II u. 91 S.

Ein anregendes kleines Buch für Lehrer, denen der Beginn der Geometrie obliegt. Die Uebungen werden gewiss den Schüler interessiren, ihn zu den gebräuchlicheren Beweismethoden hinleiten und ihm einen guten Vorrat geometrischer Vorstellungen verschaffen. Gbs. (Lp.)

G. MÜLLER. Zeichnende Geometrie. 6. Aufl. Stuttgart: P. Neff. XII, 172 S. (Mit 11 Taf.) 8°.

Das Werkchen (im Auftrag der K. Württ. Centralstelle für Gewerbe und Handel herausgegeben) bezweckt eine Einführung in die Geometrie auf dem Wege des construirenden Zeichnens. Es ist in erster Linie für Schulen ohne wissenschaftlichen Geometrie-Unterricht bestimmt, soll aber auch dem letzteren als Ergänzung oder Vorbereitung Dienste leisten. Der Lehrstoff umfasst die wichtigsten Constructionen, die sich auf Winkel, Vielecke, Kreise, Flächenausmessung, Aehnlichkeit, Kegelschnitte und cyklische Linien beziehen (vergl. F. d. M. **16**, 517, 1884). Hk.

F. BOHNERT. Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig: G. J. Göschen. VIII + 160 S. 8°. (Sammlung Schubert III.)

Nach einer geometrischen Einleitung erklärt der Verf. die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel nebst ihrer Verwendung und erweitert dann den Begriff der trigonometrischen Functionen auf alle Winkel. Hierauf zeigt er die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks und giebt goniometrische Formeln nebst ihrer Anwendung auf Dreiecksaufgaben. Dann geht der Verf. zur sphärischen Trigonometrie über, betrachtet dreiseitige körperliche Ecken und sphärische Dreiecke, giebt die Grundformeln für ihre Berechnung, also: Sinussatz und die beiden Cosinussätze, ferner weitere Formeln, unter ihnen die Gleichungen von Delambre und Neper, die Formeln von L'Huilier; zuletzt als sehr nützliche Beigabe die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die mathematische Geographie, wobei die Himmelskugel, die scheinbare Bewegung der Fixsterne und der Sonne sehr gut erklärt wird. Aufgaben mit ihren Resultaten sind überall mitgegeben, auch astronomische Aufgaben. Ueberhaupt ist bei den Aufgaben die praktische Anwendung berücksichtigt. Druck und Figuren sind gut. Mz.

Ch. Pendlebury. A short course of elementary plane trigonometry. London: George Bell & Sons. XI u. 160 S. [Nature **63**, 178.]

Ein klar geschriebener Abriss für Anfänger, welche die Dreiecksberechnung erlernen wollen. Gbs. (Lp.)

G. Hauck. Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von F. Kommerell's Lehrbuch neubearbeitet und erweitert. Achte Auflage. Tübingen: H. Laupp. XVI u. 224 S. 8°.

Auch bei dieser neuen Auflage erkennt man überall die Liebe und unermüdliche Sorgfalt, welche der Meister auf die Vervollkommnung seines Lehrbuches verwendet, sei es, dass er sachlich ändert, Sätze und Aufgaben anders gruppirt, oder Beweise in schärfere Fassung bringt, oder dass er Tabellen übersichtlicher ordnet und an dem sprachlichen Ausdruck feilt. Da auch der Verleger in wirklich mustergültiger Weise für die äussere Ausstattung gesorgt hat, so wird das Buch weiter von alten und neuen Freunden gern in die Hand genommen und benutzt werden.
Lg.

G. Holzmüller. Elemente der Stereometrie. Zweiter Teil. Die Berechnung einfach gestalteter Körper. Leipzig: G. J. Göschen. XV u. 477 S. 8°.

Dieses Buch ist die Fortsetzung desjenigen, über welches in F. d. M. **30**, 445, 1899 referirt worden ist. In der Vorrede sagt der Verf., dass hauptsächlich einfach gestaltete Körper, also einfachere Polyeder, Cylinder, Kegel und Kugel, hier berechnet werden. Die schwierigeren Gebilde soll ein nachfolgender dritter Band behandeln. Das sehr reichhaltige Buch, welches mit 156 Figuren und zahlreichen Uebungsbeispielen ausgestattet ist, und aus welchem sowohl Gymnasiasten als auch Studirende, die in den ersten Semestern sind, recht viel lernen können, behandelt zuerst Prismen und Cylinder, und zwar allerlei Berechnungen an ihnen, darunter auch Schwerpunktsberechnungen und Aufgaben aus der Praxis, zuletzt Anwendungen auf Tonnengewölbe, Kreuz- und Klostergewölbe. Dann folgen Kreiskegel, regelmässige Pyramiden und regelmässige Körper; hierbei Aufgaben über Krystallographie, Durchdringungen und Sternkörper; zuletzt der schräg abgeschnittene Kreiskegel und die schräg abgeschnittene regelmässige Pyramide. Nun folgen unregelmässige Vielflache und einige krummflächige Körper, die mit ihnen zusammenhängen; zuerst metrische Beziehungen an dreikantigen Ecken, dann Anwendung hiervon auf die Berechnung schiefer Prismen, das allgemeine Tetraeder, seine acht Berührungskugeln, die umgeschriebene Kugel, Schwerpunkte des Tetraeders, seiner Flächen, Kanten und Ecken. Halbirung des Tetraeders durch hyperbolische Paraboloide, Höhen des Tetraeders und Steiner'sche Sätze; hierauf Pyramide, Pyramidenstumpf, Obelisk und Körper, die von obeliskischen Mantelflächen begrenzt sind; zuletzt die Prismatoide. Hierauf folgt die Kugel mit den gewöhnlich an ihr ausgeführten Berechnungen; daran schliessen sich aber vielfache Uebungsaufgaben, wie Bogen-

berechnungen (Kreise und Loxodromen), Schwerpunktsberechnungen, Betrachtung über Sonne, Erde, Mond, elementare Theorie der Mercatorkarte. Dann wird die sphärische Trigonometrie durchgenommen, woran sich nautische, astronomische und geodätische Anwendungen knüpfen. Hier werden dem Leser sehr nützliche Erläuterungen über astronomische Dinge gegeben, darunter: wahre und mittlere Sonnenzeit, Darstellung der Ekliptik auf der Mercatorkarte, die Zeitgleichung, das nautische Dreieck, dann eine Reihe von Uebungsaufgaben aus der Nautik und Astronomie mit den Auflösungen, zuletzt der Satz der Geodäsie von Legendre über Dreiecke von geringer Krümmung. Am Schlusse findet sich noch das Berührungsproblem für vier Kugeln als Nachtrag zu Band I.

Im ganzen ist lobend hervorzuheben, dass dieses Buch, obschon ein ganz ausführlicher Lehrgang der Stereometrie, doch auch in den Anwendungen recht Wissenswertes in andern Gebieten (Mechanik, Bautechnik, Physik, Astronomie u. a. m.) enthält. Das Buch kann daher angelegentlich empfohlen werden. Mz.

M. Schuster. Stereometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Uebungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht in den oberen Klassen höherer Schulen. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 80 S. u. 1 Tafel. 8°.

Das Buch ist eine Fortsetzung der vor Jahresfrist erschienenen „Geometrischen Aufgaben“ und nach denselben Grundsätzen bearbeitet. Von einem concreten Einzelfalle ausgehend, werden in methodischer Ordnung die erforderlichen Sätze erst inductiv herausgearbeitet, dann verallgemeinert und zur deductiven Herleitung von Sonderfällen benutzt. Um von wesentlichen stereometrischen Voraussetzungen (Senkrechte auf einer Ebene, Parallele im Raume) unabhängig zu sein, wählt der Verf. als Ausgangspunkt die Pyramide (Kap. I); an ihr werden die Sätze über senkrechte Geraden und normale Ebenen, den Neigungswinkel zwischen Geraden und Ebenen gewonnen und durch Zeichnung und Berechnung eingeübt. Dann erst folgt das Prisma zur Herleitung der Sätze über parallele Geraden und Ebenen (II), sowie der Inhaltsformeln für Prisma und Pyramide (III). Die folgenden Abschnitte behandeln Cylinder und Kegel (IV), Körperstumpfe (V), die Kugel (VI), Prismen und Pyramiden mit Um-, In- und Ankugel (VII), regelmässige Körper und körperliche Ecken (VIII), schwierigere Aufgaben, insbesondere kubische Gleichungen, Reihen, grösste und kleinste Werte, Guldin'sche Regel (IX); zum Schluss werden die Constanten der regelmässigen Vielecke und Körper, sowie die zu ihrer Berechnung gebrauchten trigonometrischen Functionen und andere irrationale Constanten, specifische Gewichte u. s. w. zusammengestellt (X). — Die das System bildenden Sätze sind von den Uebungsaufgaben nicht getrennt, aber durch Sterne kenntlich gemacht und am Ende des Kapitels in den „Zusammenfassungen“ als „Erklärungen“ und „Lehrsätze“ systematisch geordnet, letztere durch dreifach abgestuften Druck gekennzeichnet. Alle von den Schülern geforderten Constructionen beschränken sich auf geometrische Darstellung ebener Flächen in ihrer

wahren Gestalt als Grundriss, Aufriss, Netz, Axen- und Diagonalschnitt, während die perspectivische Zeichnung der Körper dem Lehrer zur weiteren Ausgestaltung der Lehraufgabe überlassen bleibt. — Das Buch ist neu in seinen Grundgedanken und mustergültig sowohl in der Darstellung wie im sprachlichen Ausdruck und in der äusseren Form; es bedeutet einen Fortschritt in der Methodik des mathematischen Schulunterrichts und kann jedem Lehrer, der vor einer Neueinführung steht, nur auf das wärmste empfohlen werden. Lg.

E. Lemoine. La géométrographie dans l'espace. C. R. **131**, 937-939.

Verf. dehnt seine Methode zur Bestimmung der Einfachheit einer Constructionsaufgabe auf den Raum aus und denkt sich dazu zwei ideale Instrumente zur Herstellung von Ebenen und Kugeln, die er „planque“ und „sphérètre“ nennt. Lg.

E. Lemoine. Comparaison géométrographique de douze constructions déduites de onze solutions d'un même problème. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 102-127.

Im Intermédiaire des Mathématiciens war eine elementar-geometrische Lösung der Aufgabe verlangt: Ein Dreieck ABC aus der Basis BC, der von A ausgehenden Mittellinie und der Differenz der Basiswinkel B und C zu construiren, mit der sich seinerzeit auch Bessel schon beschäftigt hat. Von den vielen eingegangenen Lösungen werden hier 12 in Bezug auf ihre praktische Einfachheit untersucht. Lg.

L. Ripert. Sur une application de la géométrographie. Progreso mat. (2) **2**, 378-384.

Der Verf. giebt einige Vorstellungen von der Geometrographie und macht einige Anwendungen davon. Tx. (Lp.)

G. Cesàro. Sulla risoluzione dei problemi mediante la sola riga. Periodico di Mat. (2) **3**, 125-126.

Ein gegebenes Lineal möge dazu dienen, dass, indem auf ihm Punkte markirt werden, mittels desselben Strecken auf einer schon gezeichneten Geraden abgetragen werden. Einige der hiernach lösbaren Aufgaben werden aufgezählt. Lp.

G. Cardoso-Laynes. Le grandezze geometriche fondamentali. Suppl. al Period. **4**, 17-23.

Als Einleitung zu einem Ergänzungscursus der Geometrie und der Trigonometrie im zweiten Doppeljahr des technischen Instituts giebt der

Verf. drei Vorlesungen über die Grundbegriffe der Geometrie. 1. Geometrische Objecte und Figuren. Postulate der Geraden und der Ebene. Allgemeiner Begriff der Grösse (Erweiterung des Vortrags beim Beginne des Cursus der Geometrie im ersten Jahre). 2. Grundlegende geometrische Grössen (mit Einführung des Begriffes der positiven und negativen Strecken und Winkel u. s. w.) 3. Coordinaten von Punkten auf einer Geraden, in der Ebene und im Raume. — Unter Verzicht auf den Inhalt der ersten Vorlesung beschäftigt sich der Verf. in der vorliegenden Note mit dem der zweiten und spart sich die dritte für eine andere Gelegenheit auf. Lp.

F. Röllner. Ueber Aehnlichkeit und Symmetrie als grundlegende Principien der Geometrie nebst elementaren Regeln zur unmittelbaren Raumconstruction. Jahresbericht der Landes-Unterrealschule zu Römerstadt 1899-1900. 28 S.

Die Tendenz des Aufsatzes geht klar aus dem „den Industriellen vom Fach“ von dem Verf. gewidmeten Aufruf hervor:

„Euklides verwässern gelingt Euch zwar,
Erfassen und bessern doch nimmer fürwahr!“

Nachweis, dass die Umlegbarkeit der räumlichen Elementargrössen schon von Euklid in seinen Elementen vorausgesetzt wird. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte. Die Parallele zu einer Geraden. Halbirung der Strecke. Anderweitige Teilung derselben. Die Normale zu einer Geraden. Einen Winkel zu übertragen. Uebertragung von Strecken. Die Normale zu einer Ebene. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene. Das System von drei rechtwinkligen Axen. Sda.

W. Veltmann. Geometrische Sätze über die Fläche und die Winkelsumme des Dreiecks und des Vierecks. Hoppe Arch. (2) **17**, 442-448.

Der Verf. nennt ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, ein Rautenviereck, und wenn alle vier Winkel einander gleich sind, ein Rautenrechteck und beweist ganz elementar, ohne das Parallelenaxiom vorauszusetzen, dass Rautenvierecke von gleicher Winkelsumme gleichen Flächeninhalt haben, und umgekehrt, woraus dann leicht folgt, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional ist dem Unterschiede der Winkelsumme von zwei Rechten. Das Beweisverfahren enthält gegenüber dem von Lobatschefskij angewandten nichts wesentlich Neues, wenn auch zuzugeben ist, dass die Einführung der Rautenrechtecke vor der der Dreiecke gewisse Vorzüge hat. In No. IX ist die Bestimmung des Punktes N nicht immer in der verlangten Weise möglich; man kann jedoch diesen Uebelstand vermeiden, wenn man die beiden Rautenrechtecke die Rollen tauschen lässt. Der in No. XIV gegebene Beweis dafür, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht grösser ist als zwei Rechte, setzt natürlich die unendliche Länge der Geraden voraus. El.

J. C. V. Hoffmann. **Ein anschaulicher Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks.** Hoffmann Z. **31**, 263-264.

Mitgeteilt von Lundgren in Stockholm. Sind M_1 und M_2 die Mitten der Seiten AB und AC eines Dreiecks, m_1 und m_2 die Fusspunkte der Lote von M_1 und M_2 auf BC, so klappe man $\Delta M_1 M_2 A$ um $M_1 M_2$, $\Delta BM_1 m_1$ um $M_1 m_1$, $\Delta CM_2 m_2$ um $M_2 m_2$, so bilden die Winkel A, B, C in ihrer neuen Lage einen gestreckten Winkel (als Beweis aus China in Schweden bekannt). Lp.

E. Maccaferri. Sulle figure piane uguali. Periodico di Mat. (2) **2**, 258-260.

I. Zwei direct congruente ebene Figuren haben im allgemeinen einen entsprechenden Punkt gemeinsam, und die beiden Figuren können zur Deckung gebracht werden, indem man die eine von ihnen um diesen Punkt der gemeinschaftlichen Ebene dreht. II. Zwei invers congruente ebene Figuren haben immer eine entsprechende Gerade gemeinsam, und die beiden Figuren können vermittelst einer Translation und einer Rotation in Bezug auf diese Gerade im allgemeinen zur Deckung gebracht werden. Ableitung dieser Sätze für den ersten Unterricht. Lp.

T. Bonnesen. Bemaerkning om en Hovedsaetning i den elementaere Plangeometri. Nyt Tidds. for Math. **11** B, 25-32.

Der Verf. zeigt, wie der Satz von dem gleichschenkligen Dreieck bewiesen werden kann, wenn man nur zwei Dimensionen erkennen könnte. V.

G. Fontené. Teoremas de geometría. Progreso mat. (2) **2**, 324-329.

Beweise einiger Sätze bezüglich der Dreiecke und Vierecke. Tx. (Lp.)

A. Emmerich. Sur le triangle pseudo-isoscèle. Mathesis (2) **10**, 129-133.

Zahlreiche Eigenschaften eines Dreiecks mit zwei gleichen äusseren Winkelhalbirenden, das nicht gleichschenklig ist. In einem derartigen Dreiecke ABC ist unter anderem $AI^2 = BI \cdot CI$, wenn I der Mittelpunkt des Inkreises ist, B und C die Ecken sind, durch welche die gleichen Halbirenden der Aussenwinkel gehen. Mn. (Lp.)

R. F. Muirhead. The dissection of any two triangles into mutually similar pairs of triangles. Edinb. M. S. Proc. **18**, 5-10, 100.

A. D. Russell. A special case of the dissection of any two triangles into mutually similar pairs of triangles. Edinb. M. S. Proc. **18**, 28-29.

Die zu erledigende Aufgabe besteht in der Zerschneidung zweier gegebenen Dreiecke in Teildreiecke, die aus wechselseitig ähnlichen Dreieckspaaren bestehen; wird also das erste gegebene Dreieck A in die Dreiecke $a_1, a_2, a_3, \dots$ und das zweite B in $b_1, b_2, b_3, \dots$ zerschnitten, so soll a_1 ähnlich b_1, a_2 ähnlich b_2, u. s. w. sein. Wenn die Anzahl der Teile auf 2 beschränkt wird, so ist die Aufgabe im allgemeinen nicht lösbar. Wenn die Anzahl 3 ist, so werden für jedes gegebene Dreieck zwei Typen von Lösungen betrachtet. Bei dem einen Typus wird ein innerer Punkt mit jeder Ecke verbunden; bei dem anderen Typus dagegen wird eine Ecke A mit einem Punkte D auf der Gegenseite BC verbunden, hiernach C mit einem Punkte auf AD. Es wird gezeigt, dass Lösungen dieser beiden Typen besondere Fälle einer allgemeineren Zerschneidung sind, bei welcher zwei Dreiecke in zwei Systeme von vier Dreiecken zerlegt werden, die paarweise ähnlich sind, während ein Winkel in der Figur willkürlich bleibt. In einer Zusatznote (S. 100) wird erzählt, dass der erste Typus der Lösung schon behandelt ist bei Wallace: „Geometrical theorems and analytical formulae“ (Edinburgh 1839), Prop. IV, S. 11. — Der zweite Autor erörtert den Fall, bei welchem ein Winkel des einen Dreiecks grösser als die Summe zweier beliebigen Winkel des anderen Dreiecks ist. Gbs. (Lp.)

M. Zimin. Bemerkenswerte Transversale des Dreiecks. Spaczinski's Bote No. 278. (Russisch.)

Die Transversale durch die Ecke A des Dreiecks, welche BC in D und den umgeschriebenen Kreis in E trifft, so dass $AD \cdot AE = BC^2$, hat die Eigenschaft, dass $N_1 N_2 \parallel BC$ für jeden Punkt N von AD ist (N_1 isogonal-conjugirt, N_2 isotomisch-conjugirt von N). Si.

C. A. Laisant. Problème de la section de raison. Edinb. M. S. Proc. 18, 99-100.

Die Aufgabe lautet: Gegeben sind zwei Gerade OA, OB, auf jeder ein Punkt (A, B), in der Ebene ein Punkt P. Durch P eine Secante $A'B'$ zu ziehen, so dass das Verhältnis $AA' : BB'$ gleich einem gegebenen Verhältnisse ist. — Eine sehr einfache geometrische Lösung wird gegeben. Gbs. (Lp.)

Éd. Collignon. Note sur un problème de géométrie. Edinb. M. S. Proc. 18, 88-96.

Gegeben ein Dreieck OAB; durch die Ecke O eine Gerade OM so zu ziehen, dass nach Fällung der Lote Aa, Bb auf diese Gerade die Inhalte der Dreiecke OAa, OBb ein gegebenes Verhältnis haben. Die Aufgabe wird zuerst nach den Methoden der analytischen Geometrie in Angriff genommen, und besondere Fälle werden in einiger Ausführlichkeit

behandelt. Dann wird ein trigonometrisches Verfahren angewandt, das zu einer einfachen geometrischen Construction führt. Gbs. (Lp.)

E. Cantoni. Risoluzione della 16ª quistione a concorso. Suppl. al Period. 3, 57-58.

Die Preisfrage bestand in der alten Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit zwei gegebenen Geraden ein Dreieck von gegebenem Inhalte begrenzt. Lp.

Nonni, U. Bordoni. Risoluzione della 17ª quistione a concorso. Suppl. al Period. 3, 71-72.

Die von Nonni gestellte Aufgabe lautet: Wenn man über den Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks als Durchmessern Halbkreise beschreibt, entweder alle nach rechts oder alle nach links für einen Beobachter, der den Umfang des Vierecks durchläuft, so sind die beiden Strecken, welche die Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Halbkreise verbinden, gleich und senkrecht auf einander. Wenn die Halbkreise abwechselnd nach rechts und nach links vom Beobachter beschrieben werden, sind ihre Halbirungspunkte die Ecken eines Parallelogramms. Lp.

J. W. Tesch. Sur la question 1044 de l'Intermédiaire des Mathématiciens. Nieuw Archief (2) 4, 269-277.

Es handelt sich um folgende Aufgabe: Durch die Ecken A, B, C eines Dreiecks ABC gehen Linien: AD durch A, BE durch B, CF durch C, wo D auf BC, E auf CA, F auf AB liegt. Diese drei Linien sollen durch denselben Punkt P gehen, der so zu bestimmen ist, dass $PD = PE = PF$ wird. Der Verf. erwähnt eine Lösung, welche Candido gegeben hat, die aber nur in der Aufstellung von Gleichungen besteht, deren weitere Behandlung erst die eigentliche Schwierigkeit bildet.

Der Verf. setzt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, die Winkel des Dreiecks gleich A, B, C, die Lote, die von P auf die Seiten a, b, c gefällt werden, bezw. gleich x, y, z und kommt zu den Gleichungen:

$$x^2(cz+ax)^2\,(y^2+z^2+2yz\cos A)=y^2(by+cz)^2\,(z^2+x^2+2zx\cos B),$$
$$y^2(ax+by)^2\,(z^2+x^2+2zx\cos B)=z^2(cz+ax)^2\,(x^2+y^2+2xy\cos C).$$

Der gesuchte Punkt P liegt daher auf 2 Curven sechsten Grades. Beide Curven haben aber auf der unendlich entfernten Geraden nachweislich mehr als 6 gemeinsame Punkte; daher artet jede von ihnen in diese Gerade und eine Curve vom fünften Grade aus. Nun werden die inversen Curven betrachtet, nämlich:

$$y^2(cy+az)^2\,(y^2+z^2+2yz\cos A)=x^2(bz+cy)^2\,(x^2+z^2+2xz\cos B),$$
$$z^2(ay+bx)^2\,(z^2+x^2+2zx\cos B)=y^2(cx+az)^2\,(x^2+y^2+2xy\cos C).$$

Diese müssen jede in den umschriebenen Kreis $(ayz + bzx + cxy = 0)$ und eine Curve vierten Grades ausarten. Die Gleichungen dieser Curven vierten Grades werden aufgestellt, dann addirt und subtrahirt, worauf nach Beseitigung eines Factors y zwei Gleichungen erhalten werden, die eine vom vierten, die andere vom dritten Grade. Es zeigt sich aber, dass die Curve dritten Grades, welche durch die letzte Gleichung dargestellt wird, in B einen Doppelpunkt hat; die Coordinaten ihrer Punkte sind daher ganzen Functionen dritten Grades einer Variable l proportional; man kommt schliesslich zu einer Gleichung vom zwölften Grade für l. Hier sondern sich fünf Wurzeln ab, die den beiden Kreispunkten und dem dreifach zu zählenden Punkte B entsprechen. Man hat also zuletzt eine Gleichung siebenten Grades für l, woraus 7 Punkte hervorgehen. Die diesen Punkten inversen Punkte sind die gesuchten Punkte P.

Es folgen dann noch besondere Fälle, und zwar I. wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist, II. wenn es der Bedingung genügt: $2a = b + c$, III. wenn es der Bedingung genügt $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2$. Doch wird in den Fällen II und III aus ABC erst ein neues Dreieck aufgestellt, für welches die Lösung vollständig gemacht wird. Mz.

C. Wafelbakker, D. Biddle, F. Morley, G. B. Mathews, H. A. Webb. Question 13969. Ed. Times **72**, 29-30, 121-124.

Man drehe das Dreieck ABC um BC als Axe, bis die Ecke A nach einer Drehung von 180° in die Lage A' komme. In gleicher Weise leite man die Punkte B' und C' aus B und C ab. Man soll aus den gegebenen Punkten A', B', C' das Dreieck ABC construiren. Morley führt die Lösung auf die Aufsuchung der Schnittpunkte zweier circularen Curven dritten Grades zurück, die er mechanisch aufzuzeichnen lehrt. Mathews kommt ebenfalls durch Rechnung auf Gleichungen höheren Grades zwischen zwei Unbekannten λ und μ, deren Eliminationsresultante er als zu mühsam aufgiebt. Auch Webb ist auf eine Gleichung höheren Grades gestossen. Es ist demnach wahrscheinlich, dass, falls diese Gleichungen sich als irreducibel erweisen, eine Lösung mit Zirkel und Lineal unmöglich ist. Lp.

F. Caspary. Sur le centre de gravité d'un quadrilatère. S. M. F. Bull. **28**, 143-146.

Der Verf. erwähnt folgenden Satz von Mannheim:

AB, CD seien die parallelen Seiten eines Trapezes; durch die Endpunkte C, D der kleineren dieser Seiten ziehe man Parallelen zu den Diagonalen des Trapezes; diese Parallelen und die verlängerte Seite AB bilden ein Dreieck, dessen Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte des Trapezes zusammenfällt.

Hieran fügt der Verf. Verallgemeinerungen, indem er sich auf seinen Aufsatz bezieht: „Applications des méthodes de Grassmann. Centre

de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone." (Nouv. Ann. (3) **17**, 389; F. d. M. **29**, 595, 1898). Mz.

G. Lony. Die Sätze vom Kreisviereck und vom Peripheriewinkel. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 116-117.

Beweis durch Zerlegung des Kreisvierecks in vier gleichschenklige Dreiecke durch die Radien vom Mittelpunkte nach den vier Ecken. Lp.

Anonyme. Division d'un angle en n parties égales. Mathesis (2) **10**, 156-157.

Eine neue und eine alte Lösung. Mn. (Lp.).

A. Klas. Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels auf dem Wege der elementaren Geometrie, allein mit Zirkel und Lineal gelöst und dargelegt. Wiesbaden: H. Ferger. I + 14 S. u. 14 Fig. 4°.

Wieder ein Nichtfachmann (evangelischer Pfarrer), der es sich Mühe und Geld hat kosten lassen, den Mathematikern zum Trotz die Veröffentlichung seiner wissenschaftlichen Entdeckung zu erzwingen. Lg.

G. Cardoso-Laynes. Sull' ortocentro di un sistema di punti conciclici. Suppl. al Period. **3**, 129-132.

Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 eines Kreises bestimmen vier Dreiecke $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$, $P_4P_1P_2$, $P_1P_2P_3$ mit den Höhenschnitten H_1, H_2, H_3, H_4 bezw.; die Geraden H_1P_1, H_2P_2, H_3P_3, H_4P_4 gehen durch einen und denselben Punkt S, der „Orthocentrum" der concyklischen vier Punkte P_i genannt wird. — Fünf Punkte P_i ($i=1,2,3,4,5$) eines Kreises bestimmen fünf Vierecke $P_2P_3P_4P_5$ u. s. w. mit den Orthocentren H_i; die Geraden H_iP_i gehen durch einen und denselben Punkt S, das „Orthocentrum" der fünf concyklischen Punkte. — Durch den Schluss von n auf $n+1$ wird dieser Satz allgemein bewiesen. — Das Verhältnis der Entfernung des Orthocentrums von den n concyklischen Punkten und des Schwerpunktes derselben Punkte zu der Entfernung des letzteren von dem Umkreise ist gleich $2:(n-2)$. Lp.

C. Grolleau. Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. Revue de Math. spéc. **10**, 545-548.

Verf. transformirt zwei gegebene Kreise durch reciproke Radien in zwei gleiche Kreise. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden: Schneiden

sich die beiden gegebenen Kreise, so sind die transformirten Kreise beide reell; liegen sie innerhalb einander, so ist nur derjenige reell, dessen Centrum der innere Aehnlichkeitspunkt ist; liegen sie ausserhalb einander, so ist nur derjenige reell, dessen Centrum der äussere Aehnlichkeitspunkt ist. Wbg.

A. Krahe. Notas matemáticas. Progreso mat. (2) **2**, 171-173.

Verallgemeinerung eines Salmon'schen Satzes: Zieht man durch einen Punkt einer Kreislinie drei Sehnen und construirt über jeder von ihnen nach derselben Richtung Kreise, in denen zu jenen Sehnen gleiche Peripheriewinkel gehören, so schneiden sich diese drei Kreise zu je zweien in drei Punkten einer Geraden. — Construction der Tangente eines Kegelschnittes aus den Brennpunktseigenschaften. Lp.

A. Grüttner. Bemerkungen zu der Figur der Simson'schen Geraden. Hoppe Arch. (2) **17**, 318-320.

Es wird der Satz bewiesen: Zieht man von einem Punkte P des Umkreises eines Dreiecks ABC Strahlen unter gleichen Winkeln und in gleichem Sinne nach den 3 Seiten, so liegen die 3 Scheitel der gleichen Winkel auf einer Geraden. Aendert sich der Winkel, so ändert sich die Gerade und umhüllt während ihrer Bewegung diejenige Parabel, welche die 3 Dreiecksseiten als Tangenten und den Punkt P als Brennpunkt hat. Lg.

G. Cardoso-Laynes, E. E. Levi. Risoluzione della 15ª quistione a concorso. Suppl. al Period. **8**, 54-56.

Die von Cardoso-Laynes gestellte Preisfrage lautete: Man betrachte ein Sehnenviereck in einem Kreise mit dem Mittelpunkt O; der Schwerpunkt der Ecken sei G. Der zu O bezüglich G symmetrische Punkt S besitzt folgende Eigenschaften: 1. Die von S auf jede Seite des Vierecks gefällten Lote teilen die Gegenseiten in zwei gleiche Teile. 2. Die Simson- (oder Wallace)-Geraden jeder Ecke des Vierecks bezüglich des durch die drei anderen Ecken bestimmten Dreiecks gehen alle durch S. 3. Der Punkt S ist der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Projectionen der Ecken auf die Diagonalen geht. 4. Er ist der Mittelpunkt des Parallelogramms, das die Lote von den Ecken auf die Diagonalen bilden. Andere Eigenschaften des Punktes zu finden. Die Lösung Levi's ist abgedruckt. Lp.

C. E. Hillyer. Question 14190. Ed. Times **72**, 91-93.

Es sei P ein Punkt des Umkreises von ABC, H sein Höhenschnitt, a der Höhenschnitt des Dreiecks PBC, b von PCA, c von PAB.

1. B, a, H, C liegen auf einem Kreise. 2. Die Simsonlinie von P in Bezug auf ABC ist auch Simsonlinie von a bezüglich HBC, von b bezüglich HCA, von c bezüglich HAB. 3. Dieselbe hälftet Aa, Bb, Cc und PH. Beweise von R. Tucker, W. H. Salmon, K. G. P. Aiyar. Lp.

C. E. Hillyer. Question 13993. Ed. Times **72**, 73-75.

Man bezeichne die drei Höhen eines Dreiecks ABC mit AD, BE, CF, den Höhenschnitt mit H, das Inkreiscentrum mit I. Die drei gemeinschaftlichen Sehnen des Inkreises mit den Kreisen AID, BIE, CIF schneiden sich im Halbirungspunkte von IH. Beweise von A. Droz-Farny und anderen unter Hinzufügung des Beweises der Relation $\overline{IH}^2 + \overline{AH} \cdot \overline{HD} = 2r^2$. Lp.

R. F. Davis. Question 14342. Ed. Times **73**, 34-35.

Bei einem Dreiecke ABC fälle man die Lote BY, CZ auf die innere Winkelhalbirende von A, ziehe beliebig QR parallel zu BC, wo Q und R die Schnittpunkte bezw. mit CA und AB bezeichnen; verbinde Q mit Z, R mit Y, Schnittpunkt P. Der Umkreis des veränderlichen Dreiecks PQR berührt den Inkreis von ABC und den Ankreis der Seite BC. Der Satz, dessen Entdeckung C. E. M'Vicker zugeschrieben wird, enthält den Feuerbach'schen Satz als besonderen Fall. Beweise von F. L. Ward und W. S. Cooney. Lp.

K. Cwojdzinski. Ein Kreis durch das Dreieck. Hoppe Arch. (2) **17**, 238-243.

Herleitung einiger Relationen zwischen den Abschnitten, welche auf den Seiten eines Dreiecks durch die 6 Schnittpunkte mit einem Kreise hervorgerufen werden. Werden je zwei auf den Seiten des Dreiecks liegende Punkttripel einander zugeordnet, welche zusammen ein solches Schnittpunktsystem bilden, so gelten u. a. die Sätze: 1. Wenn die in den Punkten des einen Tripels auf den Seiten errichteten Lote, 2. wenn die von den Punkten des einen Tripels nach den gegenüberliegenden Ecken gezogenen Transversalen durch einen Punkt gehen, so tritt derselbe Fall (1. bezw. 2.) für das zugeordnete Tripel ein. Stz.

G. Candido. Pour la géométrie récente. Nouv. Ann. (3) **19**, 241-254.

Diese Arbeit ist die Fortsetzung eines früheren Aufsatzes (vergl. F. d. M. **30**, 457, 1899). Der Verf. betrachtet wieder ein Dreieck ABC, dann einen Punkt P, dessen Verbindungslinien mit A, B, C die Gegenseiten dieser Ecken resp. in D, E, F schneiden, und setzt dann:

$$\frac{AF}{FB}=m,\ \frac{BD}{DC}=p,\ \frac{CE}{EA}=q,$$

ferner Winkel $DAB=\theta$, $FCE=\xi$, $EBC=\varphi$; die von F auf die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC gefällten Lote seien resp. x, y, z. Dann gelten (nach Beseitigung eines Druckfehlers) die Gleichung

$$z=AP\sin\theta=\frac{bp\sin A\sqrt{(1+p)(b^2p+c^2)-a^2p}}{(1+p+pq)\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}}$$

und noch fünf andere Gleichungen für $\sin(A-\theta)$, $\sin\xi$ etc.

Es wird nun der Punkt von Lemoine behandelt, der durch die Bedingung definirt ist $x/a=y/b=z/c$; es ergiebt sich, dass für diesen:

$$p=\frac{c^2}{b^2},\ m=\frac{b^2}{a^2},\ q=\frac{a^2}{c^2}.$$

Dann wird der Brocard'sche Winkel ω aus der Bedingung gefunden, dass:

$$\operatorname{tg}\xi=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\omega,$$

woraus sich ergiebt, dass

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4s},$$

wo s der Inhalt des Dreiecks ABC. Genügen ξ, θ, φ diesen Gleichungen, so ist

$$m=\frac{b^2}{c^2},\ p=\frac{c^2}{a^2},\ q=\frac{a^2}{b^2},$$

wodurch ein Punkt Ω (Brocard'scher Punkt) bestimmt wird. Ganz analog erhält man aus der Bedingung

$$\operatorname{tg}(A-\theta)=\operatorname{tg}(B-\varphi)=\operatorname{tg}(C-\xi)=\operatorname{tg}\omega'$$

einen Winkel ω', der mit ω identisch ist und zu den Werten führt:

$$m=\frac{c^2}{a^2},\ p=\frac{a^2}{b^2},\ q=\frac{b^2}{c^2},$$

die den zweiten Brocard'schen Punkt Ω' definiren.

Ist K_2 der Lemoine'sche Punkt, O Centrum des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises, so liegen Ω, Ω', K_2, O auf demselben Kreise (Brocard'scher Kreis), und OK_2 ist Durchmesser dieses Kreises. Der Verf. behandelt hierauf noch einen Satz von Terquem. Verbindet man einen Punkt T_1 mit A, B, C, wodurch die Gegenseiten resp. in T_{1a}, T_{1b}, T_{1c} getroffen werden, legt dann durch T_{1a}, T_{1b}, T_{1c} einen Kreis, so trifft dieser die Seiten a, b, c resp. noch in T_{2a}, T_{2b}, T_{2c}, die, mit resp. A, B, C verbunden, Linien ergeben, welche in einem Punkte T_2 sich treffen. Fallen T_1 und T_2 in einen Punkt zusammen, so ist dieses der Punkt von Gergonne.

Es folgen noch Sätze über Fusspunktdreiecke und einige allgemeinere Bemerkungen. Mz.

J. Langr. Der Brocard'sche Kreis eines Dreiecks als geometrischer Ort. Časopis **29**, 210-217. (Böhmisch.)

Der Verf. beweist den folgenden Satz: Gegeben ein Dreieck abc und in seinen Seiten drei beliebige Punkte a', b', c'. Die den Dreiecken $ab'c', bc'a', ca'b'$ umschriebenen Kreise gehen alle durch einen Punkt des Brocard'schen Kreises von abc hindurch. Einige Folgerungen. Sda.

D. E. Neue Geometrie des Dreiecks. Spaczinski's Bote No. 281, 111-116, No. 282, 130-138. (Russisch.)

Fortsetzung der schon besprochenen Arbeit (vgl. F. d. M. **27**, 403, 1896; **28**, 454, 1897). Hier: Kap. X. Metapole des Dreiecks. Si.

A. Krahe. Nota acerca de un punto del plano de un triángulo. Progreso mat. (2) **2**, 90-94.

Wenn man auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks bezw. die Punkte M_1, M_2, M_3 so annimmt, dass

$$\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{c^m}{b^m},\ \frac{CM_2}{M_2A}=\frac{a^m}{c^m},\ \frac{AM_3}{M_3B}=\frac{b^m}{a^m}$$

ist, so treffen sich die Transversalen AM_1, BM_2, CM_3 bekanntlich in einem und demselben Punkte P. Die Untersuchungen des Verf. beschäftigen sich mit den Eigenschaften dieses Punktes. Tx. (Lp.).

F. Caspary. Sur quelques nouveaux théorèmes, relatifs au triangle. Nouv. Ann. (3) **19**, 75-77.

In einem an Lemoine gerichteten Brief berichtet der Verf., dass ihn die Anwendung der Grassmann'schen Methoden auf die neue Dreiecksgeometrie zu dem Resultat geführt habe, wonach die von Lemoine, Brocard, Neuberg u. a. gefundenen Theoreme, soweit sie den Lemoine'schen Punkt zum Ausgangspunkt nehmen, auch noch erhalten bleiben, wenn der Symmedianschnittpunkt durch einen beliebigen Punkt ersetzt wird. Eine Reihe dieser verallgemeinerten Theoreme wird mitgeteilt. (Vgl. die ausführliche Abhandlung Caspary's im Archiv d. Math. u. Ph. (3) **1**, 143-158, 269-288, 1901). Jhk.

E. Jahnke. Ueber dreifach perspectivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie. Pr. (124). Achte Realsch. Berlin. 26 S. 4°.

Untersucht man die Bedingungen, unter denen ein Dreieck $U_1U_2U_3$ zum Fundamentaldreieck $A_1A_2A_3$ dreifach perspectiv liegt, so zeigt sich, dass zwei der Punkte U beliebig gewählt werden können, und dass sie

dann den dritten eindeutig bestimmen. Gegenstand der vorliegenden Abhandlung sind solche Dreiecke, welche mit dem Fundamentaldreieck den Schwerpunkt gemein haben, bei denen also nur eine Ecke U beliebig gewählt wird; Verf. nennt sie „vom Brocard'schen Typus“. Für dieselben erweist sich als charakteristisch, dass zwei von ihnen, die zu einem und demselben dritten dreifach perspectiv liegen, auch unter einander dreifach perspectiv sind. Insbesondere existiren stets zwei zu einander complementare Dreiecke dieses Typus, welche nämlich in einander übergehen, wenn zwei Ecken des Fundamentaldreiecks vertauscht werden.

Nun ordnet Verf. zwei beliebigen dreifach perspectiven Dreiecken ein System von 21 Punkten zu und entwickelt die Eigenschaften und speciellen Configurationen dieses Systems einerseits für das Paar der eben genannten complementaren Dreiecke, andrerseits für je eines derselben in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$.

Verf. benutzt durchweg barycentrische Coordinaten und die Grassmann'sche Methode; dadurch, dass er die bei den vorherigen Untersuchungen aufgetretenen barycentrischen Coefficienten unter einander algebraisch verknüpft und dann als neue Coefficienten verwendet, kann er eine grosse (man möchte fast sagen unübersehbare) Zahl neuer Punktgruppen definiren, die alle durch Ziehen von geraden Linien gewonnen werden könnten; sie lassen sich mehr oder minder in einander umsetzen und ordnen sich teils zu 3 in Geraden, teils zu 6 in Kegelschnitten an.

R. M.

H. W. Richmond. On extensions of the property of the orthocentre. Quart. Journ. **32**, 251-256.

Ein System von p Punkten mit den „Ebenencoordinaten“-Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_p = 0$ in einem n-dimensionalen Raum mit der Fundamentalmannigfaltigkeit zweiter Ordnung $\Omega = 0$ heisst orthocentrisch, wenn sich $k_1, \ldots, k_p$ so bestimmen lassen, dass $\Omega \equiv \Sigma k_r u_r^2$. (Beispiel: Die Spitzen eines Dreiecks und der Höhenschnitt in der Ebene.) Sollen die Punkte alle im Endlichen liegen, so muss p mindestens gleich $n+2$ sein. Alle „Flächen“ zweiter Ordnung durch ein orthocentrisches Punktsystem sind zur Fundamentalmannigfaltigkeit apolar, ebenso auch alle „Raumcurven“ durch ein orthocentrisches Punktsystem, welche „Flächen“ zweiter Ordnung angehören. Verschwindet die Discriminante von Ω (euklidische Geometrie), so bilden p Punkte dann und nur dann ein orthocentrisches System, wenn man in ihnen Massen derart anbringen kann, dass das Moment derselben in Bezug auf jede Ebene constant ist. Besteht ein orthocentrisches System aus $n+2$ Punkten, und fällt man von jeder Ecke des von $n+1$ derselben gebildeten „Vielflachs“ das „Lot“ auf die „Gegenseite“, so schneiden sich die „Lote“ im $(n+2)$-ten Punkt; letzterer ist der Mittelpunkt einer „Kugel“, in Bezug auf welche die $n+1$ Punkte ein autopolares „$(n+1)$-Flach“ bilden. Zuletzt

werden orthocentrische Punktsysteme im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum betrachtet. Wö.

E. Haentzschel. Ueber die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Pr. (58) Kölln. Gymn. Berlin. 31 S. 4⁰.

Schafheitlin. Die Definitionen in der Trigonometrie. Unterrichtsbl. für Math. 6, 43-48.

E. Haentzschel. Die Definitionen in der Trigonometrie. Entgegnung. Unterrichtsbl. für Math. 6, 90-93.

In der Ueberzeugung, dass die meisten Lehrbücher die Trigonometrie nicht einwandsfrei begründen, versucht der Verf. den strengen Forderungen der Wissenschaft gerecht zu werden und mit logischer Consequenz aus den einfachen Definitionen, die in der Schule für die trigonometrischen Functionen gegeben werden, Beziehungen herzuleiten, aus denen durch stetige Fortsetzung der Gültigkeitsbereich dieser Functionen mehr und mehr erweitert werden kann. Er geht in Uebereinstimmung mit den neuen Lehrplänen von den Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck aus und beweist dann mit Benutzung eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks die Gleichungen $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, die von nun an zur Definition der Functionen beliebiger Winkel benutzt werden, unter Festhaltung des „conservativen Princips“, dass Erklärungen für Begriffe wohl verbessert und ihrem Inhalt nach erweitert, aber niemals aufgegeben werden dürfen. Wird $\frac{1}{2}\alpha > 45^\circ$, so verliert die rechte Seite der Gleichungen ihre Bedeutung nicht, die linken aber stellen die Sinus, bezw. Cosinus von stumpfen Winkeln vor, deren Werte sich nicht mehr aus dem rechtwinkligen Dreieck berechnen lassen. — Die Zurückführung der Functionen von Winkeln in späteren Quadranten auf die von spitzen Winkeln, die stete Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Functionen und der Nachweis ihrer Periodicität nur auf Grund obiger Definitionsgleichungen bildet den Inhalt des ersten Teils. Die graphische Darstellung am Einheitskreis scheidet also für die Erklärungen und Beweise vollständig aus und wird nur als secundäres Element für die gedächtnismässige Aneignung der auf arithmetischer Basis aufgebauten Betrachtungen als wünschenswert zugelassen. Im 2. und 3. Teil werden die bisher üblichen Grundlagen besprochen. Der Methode der „trigonometrischen Linien“ wird der Vorwurf gemacht, dass der gewiss nicht selbstverständliche Lehrsatz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, auch wenn $\alpha > 90^\circ$ ist, gar nicht bewiesen wird, dass die Periodicität der trigonometrischen Functionen a priori als etwas ganz Selbstverständliches festgelegt, ihr etwaiger später vollzogener Beweis zum Scheinbeweis herabgedrückt wird, und dass die Bestimmung der Vorzeichen sich nicht aus der Definition ergiebt, sondern als etwas Fremdes der analytischen Geometrie entlehnt werden muss. — Mit dem andern Princip der Ausnahms-

losigkeit kann man wohl die Formeln $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ und $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ für die beiden ersten Quadranten nachweisen, aber in die folgenden Quadranten gelangt man von hier aus nur durch Trugschlüsse. — Schafheitlin tritt für die trigonometrischen Linien ein, unter denen man heutzutage doch nur ihre Masszahlen versteht. Andrerseits hält Haentzschel selbst nicht am conservativen Princip fest, da er die auf geometrischem Wege gewonnenen Begriffe nachher arithmetisch erweitert und auf negative Winkel überträgt, was nicht möglich sei. Die Vorzeichen seien schon dem Tertianer bei der Einführung der negativen Zahlen nahe gebracht und brauchen daher der analytischen Geometrie nicht entlehnt zu werden. Pietzker ist in einer Nachschrift derselben Meinung und findet ausserdem die Definitionsgleichung bedenklich, weil zur Erklärung des Begriffs (sinus) dieser Begriff selbst herangezogen werden muss. Die Abhandlung berührt jedenfalls einen nicht überall mit der nötigen Sorgfalt behandelten Punkt in den mathematischen Lehrbüchern und ist darum als höchst verdienstlich anzusehen. Lg.

G. Cardoso-Laynes. Noterelle di trigonometria. Suppl. al Period. **4**, 6-8.

1. Ueber die Formel bezüglich der Addition der Winkel (Beweis nebst Ausdehnung auf beliebig grosse Winkel). 2. Geometrischer Beweis der Formeln der ebenen Trigonometrie, welche denen von Delambre in der sphärischen Trigonometrie entsprechen. Lp.

R. Grilli. Dimostrazione delle formole che danno i valori di $\text{sen}(a+b)$ e di $\cos(a+b)$. Suppl. al Period. **3**, 53.

Durch Projection eines polygonalen Zuges. Lp.

A. Moroff. Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 93-94.

Ausdehnung der für spitze Winkel bewiesenen Theoreme auf beliebig grosse Winkel. Lp.

G. A. Gibson. Note on proofs by projection in trigonometry and coordinate geometry. Edinb. M. S. Proc. **18**, 97-98.

W. E. Philip. A general proof of the addition theorems in trigonometry. Edinb. M. S. Proc. **18**, 103-105.

Die erste Note lenkt die Aufmerksamkeit auf Beweise von Sätzen in der Projectionslehre, die häufig in Lehrbüchern vorkommen, wenn die projicirten Linien selbst gerichtete Grössen sind. — Der zweite Artikel

gründet die Additionstheoreme auf die Vertauschung der Axen in der Coordinatenlehre, indem die Axen um einen beliebigen Winkel gedreht werden. Gbs. (Lp.).

J. Neuberg. Question 1238. Mathesis (2) **10,** 202-208.

Grundlegende Massbeziehungen zwischen dem Inhalte und den Seiten eines convexen, einem Kreise umbeschriebenen Vierecks, dem Inhalte des Dreiecks, welches die Schnittpunkte der Gegenseiten und den der Diagonalen zu Ecken hat, dem Inhalte des Dreiecks, welches zu Seiten diese Diagonalen und die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten hat, endlich der Geraden, welche die Mitten der Diagonalen verbindet. Mn. (Lp.).

H. Brocard. Area del dodecágono regular. Progreso mat. (2) **2,** 102-104.

Der Verf. legt eine Stelle aus einem Werke vor: „Mémoires des Jésuites“ par l'abbé Grosier (Paris, Tome III, 1792, S. 364-369). Daselbst wird einem jungen Schweizer Namens Cruds die Entdeckung des Satzes zugeschrieben, dass die Fläche des einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Zwölfecks drei Viertel vom Inhalte des umgeschriebenen Quadrates ist. Tx. (Lp.)

Aussant-Carà, G. Santerini, C. Bianca. Risoluzione della 18ª quistione a concorso. Suppl. al Period. **8,** 86-90.

Die von Aussant-Carà gestellte Preisfrage verlangt die Lösung und Discussion der Gleichung $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a$, wenn a zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variirt. Die Lösungen von Santerini und C. Bianca werden abgedruckt. Lp.

R. Hoppe. Eine Vermessungsaufgabe in der Ebene. Hoppe Arch. (2) **17,** 269-274.

Bestimmung des Winkels δ, um welchen die von einem Punkte P in der Ebene eines quadratischen Feldes nach dessen Mittelpunkt gezogene Gerade von der Halbirungslinie des Winkels zwischen den äussersten Sehstrahlen des Feldes differirt. Stz.

A. Korselt. Ueber die trigonometrische Lösung merkwürdiger Dreiecksaufgaben. Hoppe Arch. (2) **17,** 275-317.

Merkwürdige Strecken heissen hier die Seiten, Höhen, Mittellinien, In-, An- und Umkreisradius und die Winkelhalbirenden. Die elementargeometrische Lösung mit Zirkel und Lineal allein wird erweitert durch

das Zugeständnis, dass es erlaubt sei, einen Winkel durch Versuche beliebig genau in n gleiche Teile zu teilen, und darauf wird die Frage gestellt: „Welche Dreiecke lassen sich mit Zirkel, Lineal und Winkelteilung bestimmen, wenn irgend drei seiner merkwürdigen Strecken gegeben sind?“ Trigonometrisch lösbar heisst eine Aufgabe, wenn sie auf eine Gleichung führt, deren Wurzeln sich durch Wurzeln binomischer Gleichungen ausdrücken lassen. — Von den behandelten 244 Aufgaben sind 98 construirbar, 74 trigonometrisch lösbar und 96 nicht, 3 unbestimmt.

Lg.

JOHANNES PETERSEN. Kongruenssaetninger for fuldstaendig bestemte sfaeriske Trekanter. Nyt Tydss. for Math. **11** B, 77-80.

Der Verf. nennt ein sphärisches Dreieck vollständig bestimmt, wenn es auf einer Kugel mit gegebener positiver Umlaufsrichtung liegt, und die Seiten auf Grosskreisen mit gegebener positiver Richtung liegen, so dass sowohl die Winkel wie die Seiten vollständig bestimmt sind mit Ausnahme eines Vielfachen von 2π. Der Verf. untersucht nun, wann die Gleichheit dreier Stücke genügt, um die Congruenz zweier Dreiecke zu beweisen.

Sie brauchen z. B. nicht congruent zu sein, wenn die gegebenen Stücke eine Seite und zwei anliegende Winkel sind.

In dem wichtigsten Fall, wenn drei Winkel gegeben sind, sind sie jedoch congruent.

V.

H. VALENTINER. Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel à la démonstration d'un théorème récent. Kjøb. Overs. 1899, 655-659.

Das Theorem, welches bewiesen wird, ist von Johannes Petersen gefunden (Kjøb. Overs. 1897, 285) und sagt aus: Wenn ein sphärisches Dreieck sich ändert und die Aenderungen infinitesimal sind, wenn ferner die Aenderungen der Winkel des Dreiecks und seines polaren Dreiecks als Stücke der Geraden abgebildet werden, die vom Centrum bis zu den Ecken der genannten Dreiecke gehen, dann ist die geometrische Summe dieser Stücke gleich Null.

Hier wird nun dieses Theorem mittels der Quaternionentheorie Caspar Wessel's bewiesen (s. F. d. M. **28**, 497, 1897). ABC sei ein sphärisches Dreieck, abc sein Polardreieck. Wenn ABC (und abc) variirt, dann bleibt die Kugel, auf welcher ABC liegt, in Ruhe, wenn sie Rotationen um die Ecken von ABC (und abc) unterworfen wird, und diese Rotationen gleich den Variationen der Winkel sind.

In einer Note der Abhandlung, welche von Johannes Petersen selbst herrührt, wird aber bewiesen, dass der Satz auch richtig ist, wenn die Aenderungen von endlicher Grösse sind. Da der Beweis so kurz ist, möge er hier wiedergegeben werden.

Zwei sphärische Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen auf derselben

Kugel. Man legt $A_1 B_1 C_1$ auf ABC, so dass A_1 in A fällt und dass die Seite $A_1 C_1$ auf die Seite AC fällt, und zwar so, dass B_1 und B nach derselben Seite von AC liegen. Man führt jetzt die folgenden Operationen aus: 1. $A_1 C_1$ gleitet auf AC, bis C_1 und C zusammenfallen. 2. $A_1 B_1 C_1$ wird um C gedreht, bis $C_1 B_1$ auf CB fällt. 3. $A_1 B_1 C_1$ gleitet auf CB, bis B_1 und B zusammenfallen. 4. $A_1 B_1 C_1$ wird um B gedreht, bis $B_1 A_1$ auf BA fällt. 5. $A_1 B_1 C_1$ gleitet auf AB, bis A_1 in A fällt. 6. $A_1 B_1 C_1$ dreht sich um A, bis $A_1 C_1$ auf AC fällt. Man sieht nun unmittelbar, dass das Dreieck in seine erste Stellung zurückgekommen ist, und dass der Satz hiermit bewiesen ist.

V.

V. Sikstel. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique (Fin). Hoppe Arch. (2) **17**, 337-353.

Ende des Abdruckes der französischen Bearbeitung; vergl. F. d. M. **24**, 505, 1892; **25**, 866, 1894; **27**, 408, 1896; **28**, 421, 1897.

Lp.

M. Dehn. Ueber raumgleiche Polyeder. Gött. Nachr. 1900, 345-354.

Während die Lehre von der Inhaltsgleichheit ebener Polygone in ganz elementarer Weise auf den Congruenzbegriff gegründet werden kann, nimmt man bei der entsprechenden Lehre der Inhaltsgleichheit von Polyedern infinitesimale Betrachtungen zu Hülfe. Die naheliegende Frage, ob eine ebenso elementare Behandlung vielleicht auch hier möglich sei, ist von Gauss angeregt worden. Aber obgleich die Vermutung, dass diese Frage zu verneinen sei, sich wohl den meisten Mathematikern aufgedrängt haben dürfte, ist der Nachweis hierfür bisher nicht erbracht worden. M. Dehn ist dieser Nachweis gelungen. Um die Fragestellung zu präcisiren, wird die Bezeichnung „raumgleiche Polyeder" für solche inhaltsgleichen Polyeder eingeführt, welche sich in respective congruente Polyeder zerlegen lassen. Es wird nun eine für die Raumgleichheit notwendige Bedingung aufgestellt, welche im allgemeinen bei inhaltsgleichen Polyedern nicht erfüllt ist. Sie lautet: Sind $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ die (von je zwei benachbarten Flächen gebildeten) Flächenwinkel des einen, $\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_l$ die des andern Polyeders, so ist für ihre Raumgleichheit das Bestehen einer Congruenz von der Form

$$n_1 \pi_1 + n_2 \pi_2 + \cdots + n_k \pi_k \equiv n'_1 \pi'_1 + n'_2 \pi'_2 + \cdots + n'_l \pi'_l \pmod{2R}$$

notwendig, wo $n_1, \dots, n_k, n'_1, \dots, n'_l$ ganze positive Zahlen (Null ausgeschlossen) sind. — Indem beispielsweise gezeigt wird, dass der Flächenwinkel des regulären Tetraeders zu einem Rechten in keinem rationalen Verhältnis steht, ergiebt sich, dass ein System regulärer Tetraeder und ein System von Würfeln oder allgemeiner Prismen niemals raumgleich sein können. — Um den Nachweis der Unmöglichkeit der im oben angegebenen Sinne elementaren Behandlung der Inhaltsgleichheit von

Polyedern vollständig zu erbringen, ist noch zu zeigen, dass inhaltsgleiche Polyeder im allgemeinen auch nicht durch Hinzufügung congruenter in raumgleiche verwandelt werden können. Den Beweis hierfür hat Dehn in einer späteren Arbeit erbracht. Bei der Besprechung dieser Arbeit wird auf die hier gebrauchten Methoden näher eingegangen werden.

Stz.

A. Andreini. Sullo sviluppo dei poliedri e su alcune norme pratiche per la costruzione dei loro modelli in cartone. Periodico di Mat. (2) **2**, 233-247.

Betrachtungen über die verschiedenen Netze, die man durch Abwickelung der Oberfläche eines Euler'schen Polyeders in eine Ebene erhalten kann, sowie über die Beziehungen zwischen der Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders zu derjenigen der entsprechenden Elemente des Netzes werden im ersten Teile des Aufsatzes angestellt. Der zweite Teil beschäftigt sich umgekehrt mit der Herstellung von Kartonmodellen aus den Netzen, indem zuvor der Nutzen solcher Anfertigung auseinandergesetzt wird. Lp.

P. Cattaneo. Sui poliedri regolari convessi. Suppl. al Period. **3**, 133-136.

Berechnung aller einfachen Grössen eines regelmässigen Polyeders nach einem elementaren, einheitlichen Verfahren. Lp.

A. Strnad. Bemerkung über das Tetraeder. Časopis **29**, 146-147. (Böhmisch.)

Bedeutet A, B, C, D den Flächeninhalt der einzelnen Seiten eines Tetraeders, dessen Flächenwinkel sind $\alpha=(B,C)$, $\beta=(C,A)$, $\gamma=(A,B)$, dann gilt der folgende Satz:

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha - 2CA\cos\beta - 2AB\cos\gamma.$$

Sda.

G. Gallucci. Proprietà del tetraedro e del quadrilatero. Periodico di Mat. (2) **3**, 24-28.

Der Aufsatz schliesst sich an die Note des Verf. an: „Quelques théorèmes de géométrie“ (Nouv. Ann. (3) **16**, 13-18; F. d. M. **28**, 458, 1897). Die vom Verf. aufgestellten Massbeziehungen betreffen den Mittelpunkt H des durch die vier Höhen bestimmten Hyperboloides (nach einer Note zuerst betrachtet von Monge in der Correspondance sur l'École Polytechnique), den Schwerpunkt G des Tetraeders und den Mittelpunkt O der Umkugel. Von Vorgängern auf diesem Felde werden citirt: Besso (Periodico di Mat. **1**, 1-12; F. d. M. **18**, 490, 1886), Intri-

gila (Napoli Rend. **22,** 69-92; F. d. M. **16,** 502, 1884), Gillet (Periodico **10,** 147-153; F. d. M. **26,** 562), Cardoso-Laynes (Preisfrage im Suppl. al Period. 1895). Die Liste hätte offenbar noch bedeutend vergrössert werden können. Von den gefundenen hübschen Formeln führen wir an:

$$3\,\overline{HA}_i^2 = \overline{HA}_j^2 + \overline{HA}_k^2 + \overline{HA}_l^2 + \delta_i,$$

wo A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine Ecke des Tetraeders bedeutet, δ_i die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der drei Kanten durch A_i und der Summe der Quadrate der anderen drei Kanten. Lp.

R. Pitoni. Sopra una formola di Eulero. Suppl. al Period. **3,** 49-53.

Bezeichnet man die Masse eines Punktes A_i im Raume mit m_i, den Abstand des Punktes A_i von einem beliebigen Punkte P mit d_i, vom Schwerpunkte G der n Punkte A_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mit δ_i, endlich PG mit $\varDelta$, so lautet die angezogene Euler'sche Formel

$$\Sigma m_i d_i^2 = \Sigma m_i \delta_i^2 + \varDelta^2 \Sigma m_i^2.$$

Dieselbe wird durch den Schluss von n auf $n+1$ hergeleitet, und dann werden verschiedene rein geometrische Folgerungen aus ihr abgeleitet. Lp.

C. Hildebrandt. Ueber eine elementare Berechnung des Kugelinhaltes. Hoffmann Z. **31,** 183-184.

Durch Vergleichung der Querschnitte der Kugel mit denen eines regelmässigen Tetraeders, von dem die Kugel zwei Gegenkanten in den Mitten berührt. Die Querschnitte werden durch Ebenen erhalten, die den beiden Gegenkanten des Tetraeders parallel sind. Lp.

Graeber. Ausmessung der Kugel (nach einem neuen Lehrverfahren). Unterrichtsbl. f. Math. **6,** 48-49.

Mit Hülfe des Cavalieri'schen Princips wird zuerst der Satz bewiesen, dass eine Hohlkugelschicht gleich einem Hohlcylinder ist, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat; das Verfahren ist also eine unwesentliche Abänderung der bekannten Beweismethode. Lp.

Graeber. Anwendung der Simpson'schen Formel auf die Berechnung des Cylinderhufes. Hoppe Arch. (2) **17,** 401-425.

A. Anwendung der Simpson'schen Formel zur Berechnung eines Cylinderhufes, dessen Grundfläche ein Halbkreis, ein Kreissegment oder eine halbe Ellipse ist.

B. Bestimmung des Schwerpunkts einer Halbkreisfläche, Halbkreislinie, eines Kreissectors, Kreissegments oder Kreisbogens.

C. Mittels der Guldin'schen Regeln Berechnung des Rauminhalts eines Kugelsectors, Kugelsegments, Kugelrings, eines Körpers, der durch Umdrehung eines Kreissegments um seine Sehne entsteht, eines Körpers, der durch Drehung eines Kreisabschnitts mit parallelen Grenzsehnen um die grössere derselben entsteht, einer Kugelschicht, welche durch Drehung eines halben Kreisabschnitts mit parallelen Grenzsehnen um den Halbirungsradius entsteht.

Berechnung der Mantelfläche der Kuppel eines Klostergewölbes.

Wz.

T. Bonnesen. Geometriske Konstruktioner paa Kuglefladen. Nyt Tidss. for Math. **10**B, 1-13, 25-35. (1899).

Beantwortung einer Preisaufgabe der Universität Kopenhagen, betreffend Untersuchungen über die Constructionen auf der Kugelfläche, die nur mittels eines Kreises ausgeführt werden können, oder mit einem Kreise in Verbindung damit, dass man auf der Kugelfläche zwei Punkte kennt, deren sphärischer Abstand 90° ist. Der Verf. zeigt, dass man nicht mittels des Kreises allein zwei Punkte bestimmen kann, deren sphärischer Abstand 90° ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen Grosskreis durch zwei gegebene Punkte ziehen kann.

Die Abhandlung enthält eine grosse Menge von Constructions-Aufgaben auf der Kugel. V.

H. Dellac. Similitude des figures solides. Marseille Ann. sep. 108 S. 4°.

Eine Arbeit von 108 Seiten 4° bedürfte doch einer orientirenden Einleitung oder wenigstens eines Inhaltsverzeichnisses. Ref. hat trotz mehrmaliger Durchsicht nicht einmal feststellen können, ob der Verf. ein Lehrbuch oder eine Abhandlung hat schreiben wollen, da er anfangs ganz einfache und bekannte Begriffe und Theoreme vorträgt, nachher aber zu einer Unzahl von Sätzen und Aufgaben über specielle Arten ähnlicher räumlicher Systeme, die Lage und Veränderlichkeit ihres Aehnlichkeitspunktes u. s. w. übergeht. Als Anhang findet sich eine Untersuchung über die Polyeder, welche auf verschiedene Weise mit sich selbst zur Deckung gebracht werden können. R. M.

Weitere Litteratur.

C. Alasia. Geometria e trigonometria della sfera. Milano: Hoepli. VI + 207 S. 16mo. (Manuale Hoepli.)

E. Bortolotti. Nozioni pratiche di geometria per le scuole complementari. Roma: Società editrice Dante Alighieri. 140 S. 8°.

H. Bos. Éléments de géométrie; avec la collaboration d'A. Rebière. 5e édition. Paris: Hachette. 503 S. 8°.

A. Calinon. Étude de géométrie numérique. Paris: Gauthier-Villars. 35 S. 8°.

Fr. Castle. Workshop mathematics. Parts I, II. London: Macmillan and Co. VIII + 154, IX + 177 S. [Nature 68, 153-154.]

E. Dussaux et A. Béché. Première et deuxième années de géométrie dans l'enseignement primaire supérieur. Géométrie plane. Paris: Colin. 344 S. 16mo.

Euclid. The elements, book I. For schools and colleges, with notes, appendices, and exercises, by J. Todhunter. New edition, enlarged by S. Loney. London: Macmillan. 126 S. 12mo.

Evans. Euclid riders fully worked out. London: Simpkin. 115 S. 12mo.

M. Focke und M. Krass. Leitfaden zur Einführung in die Stereometrie und Trigonometrie. Sonderausgabe für die Untersecunda aus den gleichnamigen Lehrbüchern. 3. Aufl. Münster: Coppenrath. 32 S. gr. 8°.

P. Fulcheris. Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche e normali. Testo e tavole. 17a edizione, riveduta e ampliata. Torino: Paravia. 147 S. 8°.

F. Giudice. Geometria solida. Brescia: Apollonio. 279 S. 8°.

M. Gremigni. Nozioni di geometria solida ad uso delle scuole tecniche, con un formulario. Firenze: Bemporad. 115 S. 16mo.

J. G. Hamilton and F. Kettle. A first geometry book. Simple exercises based on experiment and discovery. London: Edw. Arnold. II + 91 S. [Nature 62, 101-102.]

A. Holzmann und R. Massinger. Geometrische Anschauungslehre (in 3 Teilen) im Anschluss an den Lehrplan der badischen Realschulanstalten. 1. u. 2. Teil. Karlsruhe: J. J. Greiff. 32 u. 30 S. gr. 8°.

Kambly und Roeder. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Vollständig nach den preussischen Lehrplänen von 1892 umgearbeitete Ausgabe der Stereometrie und der sphärischen Trigonometrie von Kambly. Lehraufgabe der Prima. Mit Uebungsaufgaben und einem Anhang: Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 2. Aufl. (27. der Kambly'schen Stereometrie). Breslau: F. Hirt. 204 S. gr. 8°.

H. Kordgien. Das mathematische Pensum für das Einjährig-Freiwilligen-Examen. Theorie und Praxis. Aufgaben mit ausführlichen Lösungen und Erläuterungen. 1. Teil. Arithmetik. Berlin: G. Grote. VII + 120 S. gr. 8°.

J. H. Kühl. Grundriss der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht. I. Planimetrie. 2. Aufl. Dresden: G. Kühtmann. IV + 95 S. gr. 8°.

G. Laurent. Cours de mathématiques professé à l'Institut agronomique. Paris. 220 S. 8°.

E. Lebon. Géométrie élémentaire, comprenant la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, rédigée conformément au programme du brevet supérieur et des écoles normales primaires. Paris: Delalain. 461 S. 16mo.

H. Lieber und F. v. Lühmann. Leitfaden der Elementarmathematik. Neu hrsg. von C. Müsebeck. 1. Teil. Ausgabe B für Realgymnasien, Oberreal- und Realschulen. Planimetrie. Einführung in die Trigonometrie und Stereometrie (Lehraufgabe der Quarta bis Untersecunda). Berlin: L. Simion. V + 109 S. gr. 8°.

H. B. Lübsen. Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie. Ebene und körperliche Geometrie. 29. Aufl. Leipzig. IV + 179 S.

Močnik's geometrische Formenlehre und Anfangsgründe der Geometrie für Realschulen. Bearbeitet von Joh. Spielmann. 18. Aufl. der „Anfangsgründe der Geometrie". Wien u. Prag: F. Tempsky. IV + 158 S. gr. 8°.

H. A. Nesbitt. Inductive geometry for transition classes. London: Sonnenschein. 100 S. 12mo.

S. Ortu Carboni. Sunto di geometria elementare. Planimetria. Livorno: Giusti. VIII + 116 S.

E. Riedel. Katechismus der Planimetrie, mit einem Anhang über harmonische Teilungen, Potenzlinien und das Berührungsproblem des Apollonius. Leipzig: J. J. Weber. X + 346 S. 8° (Weber's illustrirte Katechismen, No. 225).

E. Rouché et C. de Comberousse. Traité de géométrie. 7e édition, revue et augmentée, par E. Rouché. Partie I: Géométrie plane. Partie II: Géométrie dans l'espace; courbes et surfaces usuelles. Paris: Gauthier-Villars. LX + 1212 S. 8°.

P. Sauerbeck. Lehrbuch der Stereometrie, nebst zahlreichen Uebungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht bearbeitet. Stuttgart: A. Bergsträsser. VII + 291 S. gr. 8°.

K. Schwering und W. Krimphoff. Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 3. Aufl. Freiburg i/B.: Herder. VIII + 133 S. 8°.

K. Schwering. Stereometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 2. Aufl. Freiburg i. B.: Herder. VII + 56 S. gr. 8°.

G. Scotti. Elementi di geometria ad uso dei corsi complementari, secondo gli ultimi programmi governativi. Torino: Tipografia Salesiana. 136 S. 16mo.

G. M. Testi. Nozioni di geometria ad uso più specialmente delle allieve dei corsi complementari (già scuole preparatorie normali). 4a edizione migliorata. Livorno: Giusti. VIII + 100 S. 16mo.

K. Uth. Planimetrie. Leitfaden mit Constructionsaufgaben und Uebungssätzen. 6. Aufl. von R. Franz. Kassel: E. Hühn. VIII u. 157 S.

T. VARLEY. Euclid, Books 1 and 2. Proofs simplified and rearranged. London: Allman. 156 S. 12mo.

G. VERONESE e P. GAZZANIGA. Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei. Parte I e parte II. Verona: Drucker. XVIII + 119, VI + 240 S. 16mo.

W. WINTER. Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Dritte Auflage. München: Ackermann. IV + 116 S. 8°.

F. C. WOLF. Praktische Geometrie für den Schul- und Selbstunterricht; nach den Grundsätzen der Anschauung und Concentration in genetischer Folge aufgebaut und unter besonderer Berücksichtigung der praktischen Bedürfnisse bearbeitet. Ausgabe für Lehrer; mit Lösungen zu den Berechnungsaufgaben der Schülerhefte. Leipzig: Wunderlich VII + 181 S. 8°.

P. ANDRÉ. Nouveau cours de trigonométrie, rédigé d'après le programme officiel, à l'usage des lycées, des collèges, des institutions et des aspprirants au baccalauréat ès sciences. 9e édition. Paris: André. 96 S. 8°.

R. BALTZER. Elementi di matematica. Tradotti da L. Cremona. Parte VI: Trigonometria. 5ta edizione. Genova. 8°.

W. BRIGGS. Synopsis of trigonometry. Third edition. London: Clive. 48 S. 12mo (University tutorial series).

E. CHAILAN. Éléments de trigonométrie, à l'usage de la classe de seconde moderne. Paris: Poussielgue. 64 S. 16mo.

G. DESCLAUX. Cours primaire de trigonométrie pratique, à l'usage des écoles normales primaires et des écoles primaires supérieures. Paris: Hachette. 79 S. 16mo.

W. P. DURFEE. The elements of plane trigonometry. Boston: Ginn & Co. VI + 105 S. [Nature **63**, 82.]

A. FAIFOFER. Elementi di trigonometria piana e tavole logaritmico-trigonometriche ad uso dei licei. 12a edizione. Venezia: Tipografia Emiliana. 92 + 68 S. 12mo.

E. GLINZER. Kurzes Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für gewerbliche Schulen sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Dresden: G. Kühtmann. VII + 79 S. gr. 8°.

H. HARTL. Die trigonometrische Auflösung des Dreiecks und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren. 2. Auflage. Wien. III u. 44 S. gr. 8°.

G. LAZZERI. Manuale di trigonometria sferica. Livorno: Giusti. 95 S. 16mo.

H. B. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 17. Auflage. Leipzig. IV + 115 S. 8°.

A. SATTA. Trigonometria piana e coordinate piane ortogonali, ad uso della sezione agrimensura negli istituti tecnici. Reggio-Emilia. 72 S. 8°.

K. Schwering. Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i/B.: Herder. VII u. 53 S. 8°.

K. Schwering. Anfangsgründe der Trigonometrie für die sechste Stufe höherer Lehranstalten, nach den amtlichen Lehrvorschriften bearbeitet. 2. Aufl. Freiburg i/B.: Herder. 12 S. gr. 8°.

J. A. Serret. Traité de trigonométrie. 8e édition. Paris: Gauthier-Villars. X + 336 S. 8°.

W. Wells. Complete trigonometry, with answers. Boston: Heath. VI + 149 + 9 S. 12mo.

W. Winter. Trigonometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. 3. Aufl. München: Th. Ackermann. IV + 80 S. gr. 8°.

E. Baroni. Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici. Bologna: Zanichelli. 23 S. 8°.

T. W. Berry and G. F. Vine. How to work deductions in Euclid. London: Simpkin. 112 S. 12mo.

J. Ghersi. Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare. Milano: Hoepli. 190 S. 12mo. (Manuale Hoepli.)

Frz. Hočevar. Geometrische Uebungsaufgaben für das Obergymnasium. 2. Heft: Trigonometrie und analytische Geometrie. 3. Aufl. Wien u. Prag: F. Tempsky. — Leipzig: G. Freytag. 46 S. gr. 8°.

Th. Schröder. Auflösungen von Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Pr. Nürnberg: J. L. Schrag. 28 S. gr. 8°.

T. Spieker. Kurze Anleitung zum Lösen der Uebungsaufgaben des Lehrbuchs der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. Potsdam: Stein. IV + 68 S. 8°.

B. Wiese und W. Lichtblau. Sammlung geometrischer Constructions-Aufgaben zum Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Hannover: C. Meyer. VII + 153 S. gr. 8°.

Auflösungen von Aufgaben aus Dr. Wöckel's Geometrie der Alten. Nürnberg: F. Korn. 28 S.

C. Alasia. Relazioni fra gli elementi di un triangulo piano; 566 formule raccolte e ordinate. Città di Castello: Lapi. 35 S. 8°.

C. Alasia. La recente geometria del triangolo. Città di Castello. 58 S. 8°.

W. W. Rupert. Famous geometrical theorems and problems, with their history. Boston: Heath. IV + 58 S. 16mo.

E. Dubouis. Le théorème de Mascheroni. Le compas remplace entièrement la règle et l'équerre dans les constructions géométriques. Démonstration élémentaire très courte. Vannes: Imprimerie du commerce. 8 S. 16mo.

A. Lechthaler. Zur Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen, und der allgemeine Proportionalitätssatz. Pr. Linz. 23 S. 8°.

C. Marenghi. Sulle figure simili e particolarmente sui poligoni piani simili. Camerino: Borgarelli. 25 S. 8°.

G. Scoto. Per un svolgimento puramente geometrico della teoria della similitudine dei poligoni. Boll. di mat. Bologna **1,** 4-6.

E. dal Bo. Per gli esercizi di applicazione del teorema di Pitagora. Boll. di mat. Bologna **1,** 293-294.

J. A. Third. Sur les triangles trihomologiques. Mathesis (2) **10,** 153-156.

E. Trevisan. Perpendicolarità e verticalità. Boll. di mat. Bologna **1,** 84-86.

C. E. McVicker. Theorems connected with inversion. Math Gazette 1899/1900, 276-278.

B. Kodatis. Eine genauere und schnellere Berechnung des Kreises ohne Radiuswert. Nach neuen Gesichtspunkten aufgebaut. Berlin: E. Ebering. 17 S. gr. 8°.

N. Johnston. Johnston's geometrical division and measurement of arcs and angles. Bronson, Mich.: Journal Press. 10 S. 8°.

A. Métral. La trisezione geometrica del angolo, con traduzione francese della parte principale. Roma: Pistolesi. 32 S. 8°.

A. Conti. Problemi di terzo grado: duplicazione del cubo; trisezione dell' angolo. Bologna: Zanichelli. 56 S. 8°.

F. Saccani. Gli dei placati e la duplicazione del cubo. Reggio nell' Emilia. 88 S. 8°.

K. Meinel. Ueber Potenzlinien und Potenzkreise, das Apollonische Tactionsproblem und die Malfatti'sche Aufgabe. Pr. Fürth. 33 S. 8° u. 3 Taf.

F. P. Ruffini. Linee radicali e punti radicali. Bologna Rend. **4,** 23-29.

Fuhrmann. Geometrie des Dreiecks. Königsb. Phys.-ökon. Ges. **40,** 37-41 (1899).

T. J. I'A. Bromwich. Example of trigonometrical porisms. Math. Gazette 1899/1900, 331-333.

G. Sforza. Sopra una dimostrazione del principio di De-Zolt relativamente all' equivalenza fra prismi. Boll. di mat. Bologna **1,** 234-235.

F. Chiappetti. Contributo allo studio del tronco di cono. Imola: Galeati. 10 S. 8°.

G. H. Knibbs. Some applications and developments of the prismoidal formula. Proc. Roy. Soc. New South Wales **33,** 129-145.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

L. P. DA MOTTA PEGADO. **Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica.** Lisboa (1899).

Dieses ist das zweite Lehrbuch der darstellenden Geometrie in portugiesischer Sprache, nachdem das erste im Jahre 1812 veröffentlicht ist (vergl. Guimarães: „Les Mathématiques en Portugal au XIX[e] siècle", 1899, S. 77, wo genannt ist „Complementos de geometria descriptiva" von R. R. de Souza Pinto e F. de Castro Freire. Coimbra, 1853. Lp.) Der Verf. ist Professor dieser Wissenschaft an dem Polytechnikum zu Lissabon seit fast fünfzig Jahren und bietet in dem Buche seinen Lehrgang, der einfach und genau, in manchen Punkten eigenartig abgefasst ist. Das Buch beginnt mit einer Einleitung, in der eine Uebersicht über den wesentlichsten und wichtigsten Teil der projectiven Geometrie gegeben wird. Bei der Abfassung hat der Verf. Anregung hauptsächlich in den klassischen Schriften von Chasles gefunden. Darauf folgt das erste Buch des Werkes, das den allgemeinen Principien sowie der Geometrie der Geraden und der Ebene gewidmet ist. Im zweiten Buche werden die allgemeinen Theorien bezüglich der Curven und Oberflächen dargelegt. Die Aufgaben über Tangentialebenen, über Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen und über die ebenen Schnitte dieser Oberflächen finden hier ihre Erledigung. Im dritten Buche werden die Aufgaben betreffs der Schnittcurven krummer Oberflächen behandelt; im vierten werden die geradlinigen Flächen untersucht, und im fünften wird die Theorie der Krümmung der Oberflächen vorgetragen. In diesem letzten Teile des Werkes ist das Verfahren beachtenswert, nach welchem der Verf. in die Theorie einführt, indem er sie aus einer neuen Relation zwischen den Krümmungen von vier ebenen Schnitten einer Oberfläche und den Winkeln ihrer Ebenen herleitet. Tx. (Lp.)

G. MONGE. **Darstellende Geometrie (1798). Uebersetzt und herausgegeben von R. Haussner.** Leipzig: W. Engelmann. 217 S. 12[mo] (Ostwald's Klassiker No. 117).

Der Uebersetzung liegt die Ausgabe der „Géométrie descriptive" von 1898-99 zu Grunde. Die Originalfiguren sind auf photographischem Wege verkleinert und (durch 5 neue Figuren vermehrt) in den Text gedruckt. Die weniger günstige ursprüngliche Bezeichnung ist abgeändert und der jetzt üblichen angepasst. Hierdurch und durch die meisterhafte Uebersetzung hat der Herausgeber den Erfolg erzielt, dass das Werk in seiner klassischen Grösse durchaus modern anmutet. Dem Text selbst sind Anmerkungen (35 Seiten) zugefügt. Diese geben zuerst eine gedrängte Uebersicht über die Entwickelung der Projectionslehre

vor Monge, ferner eine kurze Schilderung des Lebens und Wirkens des Meisters, nebst einer Würdigung seiner Schöpfung der Géométrie descriptive, endlich eine Reihe von erläuternden und kritisch-historischen Noten zu einzelnen Stellen des Textes. Hk.

R. STURM. **Elemente der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. Mit 61 Fig. im Text u. 7 lithogr. Taf.** Leipzig: B. G. Teubner. 157 S. 8⁰.

Für die Bearbeitung der 2. Auflage war der Gesichtspunkt leitend, dass das Buch vorzugsweise den Studirenden an Universitäten dienen solle, ohne dabei den an Technischen Hochschulen gewonnenen Boden zu verlieren. Die Beschränkung auf ebenflächige Gebilde ist geblieben. Dagegen ist theoretischen Betrachtungen von principieller Bedeutung, wie über verwandtschaftliche Beziehungen, über die Mannigfaltigkeit der Elemente des Raumes u. s. w., ein grösserer Spielraum gewährt. Neu zugefügt wurden vier Abschnitte (30 Seiten), welche über Centralperspective, schiefe Parallelprojection, Axonometrie, Schatten und Beleuchtung handeln. Der grössere Teil der Figuren ist jetzt in den Text aufgenommen. Auch sind erläuternde stereometrische Figuren zugefügt. Hk.

J. SCHLOTKE. **Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Teil: Specielle darstellende Geometrie. 4. Aufl. II. Teil: Schatten- und Beleuchtungslehre. 2. Aufl.** Dresden: G. Kühtmann. IV u. 167 S., IV u. 59 S. gr. 8⁰.

Keine wesentlichen Aenderungen gegenüber den früheren Auflagen (F. d. M. **25**, 944, 1893). Hk.

H. HERTZER. **Die geometrischen Grundprincipien der Parallel-Projection. 3. Auflage.** Berlin: J. M. Spaeht. IV u. 68 S. 8⁰. (Mit 3 Taf. u. 47 Holzschn.)

Die dritte Auflage hat eine Erweiterung erfahren durch Zufügung von 8 Seiten, die über Axonometrie, schiefe Parallelprojection und Schatten handeln. Hk.

H. GÜLDNER. **Für des Technikers Tisch und Tasche.** Dresden: G. Kühtmann. 7 S. 12⁰.

Enthält die wichtigsten, auf Aufzeichnen, Ausziehen, farbiges Anlegen, Liniencharakterisirung, Aufschriften, Massstäbe, Correcturen u. s. w. bezüglichen Regeln zur Ausführung technischer Zeichnungen. Hk.

E. CIANI. **La prospettiva cavaliera.** Milano: Bernardoni. 12 S. u. 6 Taf. 4⁰.

Anwendung dieser Projectionsmethode auf die Grundprobleme der darstellenden Geometrie. Vi.

G. Majcen. Ein Beitrag zur projectiven Behandlung der Centralprojection. Hoffmann Z. **31**, 595-602.

Rein geometrische Untersuchung der Frage nach dem geometrischen Orte aller Projectionscentren, die der Bedingung unterworfen sind, dass die feste Bildebene eine gemeinsame cyklische Ebene für sämtliche einen gegebenen Kreis projicirenden Kegel bleibt. „Sämtliche Projectionscentren, aus welchen ein gegen die Bildebene geneigter Kreis auf diese als ein Kreis projicirt wird, liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Ebene durch den Mittelpunkt des Kreises geht und auf den Schnittgeraden der Bildebene mit der Ebene des Kreises senkrecht steht.“ Hieran schliessen sich die Lösungen einzelner mit dieser Eigenschaft zusammenhängenden Aufgaben. Lp.

J. Sobotka. Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie. Prag. Ber. 1900. No. 32. 20 S.

Der Verf. geht von dem folgenden, analytisch leicht zu beweisenden Satze aus: Werden auf die Axen eines trirectangulären Coordinatensystemes vom Ursprunge o aus drei gleiche Längen $\overline{om} = \overline{on} = \overline{op} = k$ aufgetragen, so ist die Summe der Quadrate für die Entfernungen der Endpunkte m, n, p dieser Strecken von irgend einer durch o gehenden Ebene constant, nämlich gleich k^2. Unter Anwendung dieses Satzes entwickelt der Verf. eine Reihe von metrischen Relationen, sowohl der orthogonalen, als auch der klinogonalen Axonometrie angehörend, so z. B.: Die Summe aus den Quadraten der Entfernungen, welche die Endpunkte irgend dreier conjugirten Halbmesser einer Fläche zweiten Grades von einer beliebigen durch den Flächenpunkt gehenden Ebene besitzt, ist constant und gleich dem Quadrate der Entfernung, welche ein Endpunkt des zur Ebene conjugirten Flächendurchmessers von dieser Ebene besitzt. Sda.

J. Sobotka. Beitrag zur Perspective des Kreises und anschliessend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades. Wien. Ber. **109**, 583-614.

Die Abhandlung befasst sich zunächst mit der centralen Projection eines gegebenen Kegelschnittes als Kreis, unter verschiedenen Annahmen betreffs der Bestimmungsdaten der Aufgabe. Diese Untersuchungen führen den Verfasser zu dem Problem der Bestimmung der Kreisschnitte eines Kegels zweiter Ordnung. Ausgehend von Betrachtungen über Kegelschnittbüschel, die durch die einem Kegelschnitt b einbeschriebenen Polardreiecke eines Kegelschnitts a veranlasst werden, gelangt er zunächst für die Ermittelung der Axen zu einer Construction mit vorgezeichnetem Kegelschnitt, welche auf die Solin'sche Axenbestimmung hinausläuft und diese zu der Pelz'schen in Beziehung setzt. Als Anwendung wird die Axenconstruction für ein durch drei conjugirte Durchmesser gegebenes Ellipsoid durchgeführt und demnächst die Bestimmung seiner Kreis-

schnitte durch eine einfache, auch bei allgemeiner Lage leicht ausführbare Construction erledigt. Aus diesen Betrachtungen fliesst schliesslich eine einfache Construction der durch einen Punkt gehenden drei Flächen einer confocalen Flächenschar zweiter Klasse bei gegebenen Focalkegelschnitten. Hk.

F. Procházka. Bemerkung zu perspectivischen Darstellungen. Časopis **29**, 49-59. (Böhmisch.)

Auflösung einiger metrischen Aufgaben im perspectivischen Bilde mit Hülfe des perspectivischen Grund- und Aufrisses. Sda.

A. Sucharda. Beweis eines Satzes von Desargues mit Hülfe der darstellenden Geometrie. Časopis **29**, 42-44. (Böhmisch.)

Der Satz behandelt die homologe Lage zweier Dreiecke im Raume und in der Ebene. Sda.

H. Deroide. Sur une question posée aux examens oraux de l'École Polytechnique. Revue de Math. spéc. **10**, 524-525.

Es ist ein Punkt A in der Verticalebene und ein Punkt B in der Horizontalebene gegeben: es soll ein Rotationsparaboloid construirt werden, welches die Projectionsebenen in den gegebenen Punkten berührt, und an dieses Paraboloid eine zur Axe senkrechte Tangentialebene gelegt werden. Wbg.

E. Seipka. Ueber die Fläche der zu zwei windschiefen Geraden gehörigen Rotationsaxen und die Fläche der zu diesen Rotationsaxen gehörigen windschiefen Geradenpaare. III. Jahresbericht der Landes-Oberrealschule in Zwittau. 1899-1900, 19 S.

Mit Hülfe der darstellenden Geometrie beweist der Verf. den nachfolgenden Satz: Sind G_1 und G_2 zwei windschiefe Gerade, so giebt es unendlich viele Rotationshyperboloide, die man durch G_1 und G_2 legen kann. Der Ort der Axen dieser Rotationshyperboloide ist ein gleichseitiges Paraboloid, dessen Scheitelgeraden mit den Winkelhalbirenden von G_1 und G_2 zusammenfallen, welche auch die kürzeste Transversale von G_1 und G_2 rechtwinklig halbiren. Dieses Drehaxenparaboloid liegt so im Raume, dass es von G_1 und G_2 nicht getroffen wird. Die Geradenpaare, für welche ein gegebenes gleichseitiges Paraboloid das Drehaxenparaboloid ist, bilden ein Konoid dritten Grades, dem die Scheitelgeraden des Paraboloids als Erzeugende angehören, dessen Directionsebene somit die Scheiteltangentenebene des Drehaxenparaboloids bildet, und dessen Doppelgerade von der Länge des Verteilungsparameters des Drehaxenparaboloids ist. Zwei einfache Constructionen dieses Konoids. Sda.

E. Wiskoczil. **80 Hyperbelaufgaben als Projectionen räumlicher Constructionen.** X. Jahresbericht der Landes-Oberrealschule zu Iglau. 1899-1900. 18 S.

Bei diesen Constructionen, welche einen willkommenen Beitrag für die Beweiskraft der darstellenden Geometrie liefern, wird die Hyperbel entweder als Hauptschnitt eines windschiefen Hyperboloides aufgefasst, und ihre Asymptoten sind die Projectionen der beiden zu der Ebene dieses Hauptschnittes parallelen Erzeugenden dieser Fläche, oder aber die Asymptoten bilden einen Hauptschnitt eines geraden oder schiefen Kreiskegels, und die Hyperbel ist die Projection eines Schnittes dieses Kegels mit einer zu der Ebene des gedachten Hauptschnittes parallelen Ebene. Sda.

S. Finsterwalder. **Ueber die Construction von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen.** Münch. Ber. **30,** 149-164.

Für die Aufgabe der photogrammetrischen Terrainaufnahme durch zwei Ballon-Photographien mit innerer Orientirung begegnet die praktische Ausführbarkeit der theoretischen Lösung erheblichen Schwierigkeiten. Brauchbare Lösungen ergeben sich aber, wenn einzelne Punkte des Objectes bereits bekannt sind, wie es der Fall ist, wenn es sich um die Eintragung der Aufnahmeergebnisse in eine bereits vorhandene Karte handelt. In dieser Richtung wird zunächst die Grundaufgabe behandelt: Grundriss und Höhe von vier auf den zwei Photographien abgebildeten Terrainpunkten sowie von den zwei Standpunkten (Ballonörtern) seien bekannt; es soll Grundriss und Höhe eines fünften abgebildeten Terrainpunktes gefunden werden. Die Lösung geschieht durch Vermittelung der Perspectiven der Objectpunkte aus den nämlichen Standpunkten auf die angenommene Grundrissebene. Diese Perspectiven werden aus den zwei Photographien auf projectivem Wege entwickelt; die hierbei allein in Betracht kommenden Werte der Doppelverhältnisse werden durch Eingang des Papiers nicht beeinträchtigt. Des weiteren werden die Methoden zur Ermittelung der Ballonörter („äussere Orientirung") besprochen, unter Voraussetzung von drei bekannten Terrainpunkten, bezw. von zweien nebst dem Fluchtpunkt der Verticalen. Endlich werden die durchaus befriedigenden Ergebnisse einer Prüfung der vorgetragenen Methoden auf Grund der Vergleichung einer praktisch ausgeführten Aufnahme mit dem betreffenden Katasterblatt mitgeteilt. Auch der für die einzelnen Operationen erforderliche Zeitaufwand erfährt eine kritische Beleuchtung. Hk.

M. Dechevrens. **Le campylographe, machine à tracer des courbes.** C. R. **130,** 1616-1620.

Der Kampylograph ist ein Apparat zur mechanischen Erzeugung der Lissajous'schen Curven. Die zwei oscillatorischen Bewegungen,

durch deren Zusammensetzung die Curven entstehen, werden dadurch hervorgebracht, dass zwei sich rechtwinklig kreuzende Stäbe, in deren Kreuzungspunkt der Zeichenstift läuft, als Kurbelstangen zweier Räder parallel geführt werden. Die Räder tragen eine Reihe von Zahnkränzen, in die die Zähne von sie verbindenden Triebrädern eingreifen. Durch Auswechselung und Verstellung der letzteren werden die verschiedensten Verhältnisse der Schwingungszeiten und Phasendifferenzen ermöglicht. Eine Reihe von complicirteren Curventypen, vom Apparat gezeichnet (mit 1, 2, 3 Symmetralaxen), ist abgebildet. Der Apparat kann auch als Ellipsograph und Parabolograph verwendet werden. Hk.

G. Koenigs. Compas homographique, réalisant par articulations l'homographie plane générale. C. R. **131**, 1179-1182.

In zwei früheren Noten (vergl. F. d. M. **26**, 802, 1895) hat der Verf. bewiesen, dass man mittels zusammengesetzter Zirkel (oder Gelenksysteme) jede algebraische Verbindung zwischen zwei oder mehr Punkten verwirklichen kann, dass daher jede geometrische Punkttransformation algebraischer Natur mechanisch herstellbar ist. Gerade die analytisch einfach definirbaren Transformationen lassen sich aber kinematisch schwierig erzeugen; trotzdem ist es jetzt gelungen, einen zusammengesetzten Zirkel anzugeben, der nicht allzu complicirt ist und die ebene Homographie herstellt. In der gegenwärtigen Note wird eine schematische Beschreibung dieses homographischen Zirkels gegeben, dessen Modell in Arbeit ist. Der „homologische Zirkel" enthält 27 Stäbe im ganzen mit 22 Drehpunkten, der „homographische Zirkel" 31 Stäbe mit 26 Drehpunkten. Auf eine Beschreibung dieser Instrumente kann daher hier nicht eingegangen werden. Lp.

Weitere Litteratur.

H. Becker. Geometrisches Zeichnen. 2. Aufl. Leipzig. G. J. Göschen 92 S. 12° (Sammlung Göschen No. 58).

E. Bellavitis. Prospettiva lineare insegnata nella scuola d'applicazione degli ingegneri di Padova. Padova: Prosperini. 41 S. 8°.

W. H. Blythe. Geometrical drawing. With notes and examples. Part II: Solid or descriptive geometry. Cambridge series. XI + 193-328 S. 16mo.

C. Brisse. Cours de géométrie descriptive (première partie) à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires. 2e édition, revue par C. Bourlet. Paris: Gauthier-Villars. XVIII + 177 S. 8°.

Joh. Choura. Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den k. u. k. Militär-Akademien. Parallel- und Central-Perspective. Cotirte Projectionen. (Cotirte Ebenen.) Wien: L. W. Seidel in Comm. III + 247 S. mit 246 Fig. u. 1 Taf. gr. 8°.

Wilh. Eggers. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Teil: Die Elemente der darstellenden Geometrie. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren und 5 Figurentafeln. II. Teil: Durchschnitte und Durchdringungen der Körper. Mit 8 Tafeln und 41 Holzschnitten. Leipzig: Seemann & Co. VII + 54 + 8 S. gr. 8°.

Gubatz, Lüdeke, Weigel. 301 Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Maschinenbauer, Kesselschmiede und verwandte Gewerbe. Mit kurzen praktischen Lösungen und 333 Zeichnungen. Leipzig: Seemann & Co. 34 S. Lex. 8°.

M. Kleiber. Katechismus der angewandten Perspective. Nebst Erläuterungen über Schattenconstruction und Spiegelbilder. 3. Aufl. Leipzig: J. J. Weber. VIII + 254 S. 12°. (Weber's illustrirte Katechismen No. 100.)

C. Montanari. Elementi di geometria descrittiva, ad uso degli istituti tecnici. Livorno: Giusti. 40 S. 16mo.

C. Monti. Corso di prospettiva teorico-pratica senza proiezioni ortogonali nè scala prospettiva, d'avviamento alla copia dal vero, per gl' istituti tecnici, le scuole normali, tecniche ecc. Torino: Paravia. 48 S. 4° + 30 Taf.

A. Morel et L. Bécourt. Choix d'épures de géométrie descriptive. Paris.

E. Müller. Die Aufgaben und Methoden der darstellenden Geometrie. Königsberg. Phys.-ökon. Ges. **40,** 23-28 (1899).

F. Nicoli. Geometria descrittiva. Lezioni tenute nella R. Università di Modena nell' anno scolastico 1899-1900. Modena: Pizzolotti. 216 S. 8°.

E. S. Pilsworth. A textbook on perspective. Battle creek, Mich.: School of applied art. II + 52 S. 12mo.

O. H. P. Silber. Praktische Schattenconstructionen und Perspectiven, Isometrie, Dachdurchdringungen und Dachausmittelungen. 21 Tafeln in farbigem Lithographiedruck nebst einem Vorwort. 2. Aufl. Berlin: A. Frantz. Querfolio.

F. Smolik's Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Neu bearbeitet von Jos. F. Heller. 2. vermehrte Auflage. Wien u. Prag: F. Tempsky. — Leipzig: G. Freytag. VI + 304 S. gr. 8°.

J. Streissler. Elemente der darstellenden Geometrie für Ober-Realschulen. Brünn: C. Winiker. IV + 162 S. gr. 8°.

V. Vecchi. Geometria descrittiva. Lezioni dettate nella R. Università di Parma nell' anno 1899-1900 e compilate per cura di E. Beggi. Parma: Zafferri. S. 1-334, 1-32.

W. R. Ware. Modern perspective, a treatise upon the principles and practice of plane and cylindrical perspective. Revised edition. New York: Macmillan. VIII + 336 S. 12mo.

H. Weishaupt. Das Ganze des Linearzeichnens für Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht. 4 Abteilungen in 140 Tafeln, nebst erläuterndem Text. 2. Abteilung: Geometrische Projectionslehre. 2. Stufe, 4. Aufl., neu bearbeitet vom Realschul-Oberlehrer M. Richter. Leipzig: H. Zieger. V + 90 S. gr. 8⁰, 28 Taf. Querfolio.

V. T. Wilson. Free-hand perspective; for use in manual-training schools and colleges. New York: Wiley. XII + 268 S. 8⁰.

H. Lecoq. De l'abatographe et de la méthode abatographique en perspective. Application. J. de math. élém. **25**, 122-125, 135-141, 153-156, 169-171, 185-187.

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

P. van Geer. Grondslagen der synthetische meetkunde. Leiden: A. W. Sijthoff. XII + 186 S. 8⁰.

Erste Abteilung: Figuren erster Stufe. Definitionen. Das Doppelverhältnis. Harmonische Lage. Imaginäre Elemente. Homographie. Doppelelemente der Homographie. Involution.

Zweite Abteilung: Geradlinige Figuren. Vollständiges Vierseit und Dreieck. Viereck und Sechseck. Perspective und projective Figuren.

Dritte Abteilung: Der Kreis. Ein Kreis. Zwei Kreise. Drei und mehr Kreise.

Vierte Abteilung: Elementare Theorie der Kegelschnitte. Die Entstehung der Kegelschnitte. Die Ellipse. Die Hyperbel. Die Parabel.

Fünfte Abteilung: Synthetische Theorie der Kegelschnitte. Bestimmungen. Einbeschriebenes Viereck und umbeschriebenes Vierseit. Einbeschriebenes Sechseck und umbeschriebenes Sechsseit. Polverwandtschaft. Mittelpunkt, Mittellinien, Axen, Brennpunkte und Leitlinien.

Sechste Abteilung: Verwandte Kegelschnitte. Reciproke Polarfiguren. Kegelschnittbündel und Kegelschnittschar.

Anhang: Zusammenhang zwischen der synthetischen und der analytischen Geometrie. Die isotropen Richtungen. Analytische Bestimmung der Brennpunkte.

Aufgaben und Lehrsätze. Ot.

R. Böger. Ebene Geometrie der Lage. (Sammlung Schubert VII). Leipzig: G. J. Göschen. X + 289 S. 8⁰.

Der vorliegende siebente Band der Sammlung Schubert erfüllt das Programm dieser Sammlung, streng wissenschaftliche Grundlage mit leicht

fasslicher Ausdrucksweise zu verbinden, vollkommen und dürfte dem Studirenden nicht nur bei seiner ersten Einführung in die Geometrie der Lage nützlich sein, sondern auch späterhin durch seine Reichhaltigkeit Anregung bieten. Eine weitgehende Gliederung des Textes in kleinere Abschnitte, deren Inhalt durch kurze Ueberschrift kenntlich ist, und ein fortwährendes Zurückverweisen auf die zur Beweisführung notwendigen Sätze erleichtern die Uebersicht und erhöhen die Brauchbarkeit des Buches. Das Ganze zerfällt in zwei Hauptabschnitte, von denen der erste den Kegelschnitt, der zweite die einfacheren geometrischen Verwandtschaften, insbesondere das Polarsystem, behandelt.

In den Principien schliesst sich der Verf. v. Staudt und Reye an; die Sätze der reinen Geometrie der Lage werden ohne Benutzung des Massbegriffes gegeben, die Betrachtungen, in denen auch der Massbegriff eine Rolle spielt, bleiben auf einzelne, auch äusserlich kenntlich gemachte Abschnitte und Anmerkungen beschränkt. Abweichend werden im Anfange nur die projectiven Gebilde nach Thomae als Endglieder einer Kette perspectiver Gebilde definirt. Weiterhin aber zeigt das Werk überall selbständige Arbeit. — Auf Einzelnes soll noch näher eingegangen werden.

Die Untersuchungen der Projectivitäten von Punktreihen und Strahlenbüscheln zweiter Ordnung beherrschen von vorn herein die Theorie der Kegelschnitte. Erst nachdem Axe und Centrum der Involutionen eingeführt sind, folgt die Erklärung von Pol und Polare als derjenigen Elemente, welche zu derselben Involution als Centrum und Axe gehören. Mag diese Einführung von Pol und Polare dem Anfänger vielleicht auch etwas mehr Schwierigkeiten bieten als die gewöhnlich gegebenen, sie führt ihn doch tiefer in das Wesen dieser Beziehungen ein. — Von den Projectivitäten in einem Gebilde zweiter Ordnung werden in ihrem Zusammenhange einmal diejenigen näher studirt, welche dieselbe Axe haben (oder dieselben Ordnungselemente, die jedoch, um Imaginäres zu vermeiden, von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben), danach die Involutionen, deren Centren conjugirt sind. Die Untersuchungen werden sodann von den Begriffen Centrum, Axe losgelöst und können so auch auf Projectivitäten in geraden Trägern übertragen werden. Wir vermissen hier ungern die Einführung des Gruppenbegriffes, mit welchem sich der Studirende nicht zeitig genug vertraut machen kann, sowie überhaupt die für die Zusammensetzung von Operationen jetzt allgemein angenommenen Bezeichnungen. Schwerfällige Benennungen wie componirende, resultirende Involutionen würden dann vermieden worden sein.

Von den Kapiteln des zweiten Hauptteils sei dasjenige über Involutionen dritter Ordnung hervorgehoben, welches zu Constructionen dritten Grades überleitet. Es wird hierbei als Involution dritter Ordnung eine Verwandtschaft bezeichnet, die man sonst als trilinear-symmetrische zu bezeichnen pflegt. Dieselbe ist in der Litteratur noch nicht oft behandelt worden, scheint mir indes in ihrer leicht zu gebenden Verallgemeinerung zur Vorbereitung für eine allgemeine Theorie der alge-

braischen Curven geeigneter zu sein als die Verwandtschaft, welche sonst den Namen Involution n-ter Ordnung führt.

Den Schluss des Buches bildet die Aufgabe, ein Polarsystem aus beliebigen fünf adjungirten Involutionen zu construiren. Unter adjungirter Involution ist eine solche zu verstehen, deren Ordnungselemente in Bezug auf die Curve conjugirt sind. Indes ist hier die Definition unabhängig vom Begriff der Ordnungselemente gegeben, so dass ohne Einführung imaginärer Elemente die Fälle reeller und imaginärer Ordnungselemente zugleich behandelt werden können. Ueberhaupt sind die imaginären Elemente durchweg und principiell vermieden. Man wird dies wohl im Hinblick auf die Grenzen, die einem kurzen Lehrbuch gesteckt sind, billigen können. Leider aber hat der Verf. gemeint, über die Einführung des Imaginären in die Geometrie der Lage überhaupt den Stab brechen, sie als überflüssig und geradezu schädlich verwerfen zu dürfen, und hat dadurch seinem Werke selbst nicht unerheblich geschadet. Es ist allerdings richtig, dass man, so lange nur nach solchen Eigenschaften eindeutiger geometrischer Verwandtschaften gefragt wird, in denen die Ordnungselemente keine Rolle spielen, auch beim Beweise dieser Eigenschaften der Ordnungselemente nicht bedarf. Aber die Frage nach dem Vorhandensein der Ordnungselemente selbst und weitergehende, damit zusammenhängende, wie nach der Zahl der Schnittpunkte zweier Curven u. s. w., sind eben nicht aus der Welt zu schaffen. Und nach wie vor bleibt die Thatsache bestehen, dass die Antworten auf solche Fragen viel einfacher ausfallen bei Einführung imaginärer Elemente als ohne dieselbe. Es trifft ferner den Verf. der Vorwurf der Inconsequenz, wenn er eine besondere Definition für den Begriff „Curven von doppelter Berührung“ aufstellt, welche auch die Fälle einschliesst, in welchen keine reelle Berührung stattfindet. — Der wiederholten Behauptung gegenüber, der Begriff des Imaginären in der Geometrie der Lage könne nur verwirrend wirken, werden gewiss viele Mathematiker bekunden, dass sie an sich diese Wirkung nicht verspürt haben. Es kann sich hier überhaupt nur darum handeln, ob die Theorie logisch einwandfrei ist. Ist sie dies, so wird es doch wohl auch möglich sein, sie klar darzustellen. Nun ist aber die Theorie des Imaginären, wie v. Staudt und Lüroth sie gegeben haben, streng logisch. Ihre Sätze lassen sich ganz ebenso mechanisch anwenden, wie beispielsweise die Sätze der realen projectiven Geometrie, welche zwischen endlichen und unendlich fernen Elementen nicht unterscheiden. Auf die gegenteiligen Behauptungen des Verf. einzugehen, würde zu weit führen und scheint um so weniger geboten, als derselbe allem Anscheine nach die diesbezüglichen Arbeiten v. Staudt's und Lüroth's nicht genügend kennt und gegen die Staudt'sche Theorie kämpft nicht, wie sie ist, sondern wie er annimmt, dass sie sei.

Es wird genügen, bei einer Empfehlung des sonst wertvollen Buches an den Studirenden auf diesen Uebelstand hinzuweisen, um Schaden zu verhüten. Stz.

R. Böger. Elemente der Geometrie der Lage. (Für den Schulunterricht bearbeitet). (53 Fig.) Leipzig: G. J. Göschen. IV + 62 S. 8°.

R. Böger. Der Hesse'sche Satz und die adjungirten Involutionen. Hamb. Mitt. **3**, 390-400 (1899).

Der Verf. begründet seine Bedenken gegen die Einführung der imaginären Elemente nach dem Vorgange v. Staudt's und zeigt, wie nach seiner Ansicht die Theorie zu entwickeln sei. Diese Auseinandersetzungen sind in seine Geometrie der Lage übergegangen und in dem vorstehenden Referate S. 523 besprochen worden. Lp.

R. Böger. Sechseck und Involution. Hamb. Mitt. **3**, 387-390 (1899).

„Vermittelst des einfachen Sechsecks vermag man manche Sätze der Geometrie der Lage von dem Begriffe der projectiven Verwandtschaft loszulösen und ihnen eine einfache, für die Anwendung bequeme Form zu geben.“ Hierfür werden Beispiele gegeben. Lp.

Suhle. Die geometrische Darstellung imaginärer Schnittpunkte. Hoppe Arch. (2) **17**, 244-262.

Um die sämtlichen reellen und imaginären Punkte einer Ebene geometrisch darzustellen, wird unter Zugrundelegung eines gewöhnlichen räumlichen Coordinatensystems der Punkt $x = X + iY$, $z = U + iV$ der (xz)-Ebene durch das reelle Punktepaar (X, Y, U), (X, Y, V) des räumlichen Systems repräsentirt. Die sich hierbei ergebende Darstellung der Curven der (xz)-Ebene durch Flächenpaare des räumlichen Systems und die sich daran schliessende Darstellung der Schnittpunkte zweier Curven wird für Gerade und Kreis um den Nullpunkt der (xz)-Ebene ausführlich erörtert. Stz.

J. Grünwald. Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen. Zeitschr. f. Math. **45**, 10-22.

Die Arbeit, deren Inhalt durch den Titel bereits vollkommen bezeichnet wird, zeichnet sich durch sehr klare Darstellung aus. Es ist dem Verf. aber entgangen, dass die hier behandelte Aufgabe schon durch Stephen Smith gelöst worden ist, dessen Arbeit „Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques“ (Annali di Mat. (2) **3**, 112ff.; F. d. M. **3**, 405, 1869) jedoch wenig bekannt zu sein scheint. Stz.

C. A. Scott. On von Staudt's Geometrie der Lage. Math. Gazette 1900, 26 S.

Enthält in ansprechender Darstellung eine Analyse des von Staudt'schen Gedankenganges bei der Einführung des Imaginären. R. M.

C. A. Scott. The status of imaginaries in pure geometry. American M. S. Bull. **6**, 163-168.

Die Verfasserin unterzieht die beiden Versuche, das Imaginäre in die Geometrie in voller Unabhängigkeit von der Algebra einzuführen, einer Kritik. Gegen v. Staudt, welcher den Bereich des Reellen durch seine formalen Paare erweitert und von diesen nachweist, dass sie alle Eigenschaften der ursprünglichen Elemente besitzen, und dass sie die einzige mögliche Erweiterung darstellen, wird eingewandt, dass der Nachweis der Identität der Eigenschaften der ursprünglichen und der formalen Elemente sehr schwierig und ermüdend ist, und dass zwischen beiden eine Kluft gähnt, so dass, „auch wenn der hinreichend geschulte Verstand sich von der Existenz der formalen Elemente überzeugen lässt, sich alle natürlichen Instincte dagegen empören". Die Verfasserin giebt daher, insbesondere für den Unterricht, dem Verfahren von Reye den Vorzug, d. h. dem Verfahren, das Reye eingeschlagen haben würde, wenn er dem Plane seines ersten Kapitels, so wie ihn die Verfasserin auffasst, treu geblieben wäre. Der Existenzbeweis der unendlich fernen und imaginären Elemente beruht darauf, dass z. B. der Schnittpunkt zweier Geraden, wenn er einmal existirt, durch keine Drehung der Geraden zum Verschwinden gebracht werden kann, ferner die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt, wenn sie existiren, bei jeder Parallelverschiebung der Geraden erhalten bleiben müssen. Der Unterschied der reellen und imaginären Gebilde beschränkt sich darauf, ob sie in der Zeichenebene darstellbar sind oder nicht. Wö.

J. L. Coolidge. A purely geometric representation of all points in the projective plane. American M. S. Trans. **1**, 182-192.

Die von v. Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage), Smith (F. d. M. **3**, 407, 1869) und Kötter (**19**, 579, 1887) benutzte Abbildung aller reellen und imaginären Punkte einer Geraden auf die Geraden einer Ebene wird verallgemeinert, indem nunmehr die reellen und imaginären Punkte einer Ebene auf die reellen Geraden des Raumes abgebildet werden. Die Ebene sei λ, O sei ein reeller Punkt und q eine reelle Gerade in einer Ebene α'; durch q geht eine imaginäre Ebene ι', die als eine der Doppelebenen der durch die harmonischen Ebenenpaare $\alpha'\alpha'_1\ \beta'\beta'_1$ bestimmten Involution gegeben ist. Ein Punkt P wird nun durch die reelle Gerade abgebildet, welche durch den Schnittpunkt von OP mit ι' geht. Ist P reell nicht auf der Geraden $(\alpha'\lambda)$, so bildet sich P in OP ab; wenn P reell ist und auf $(\alpha'\lambda)$ liegt, in den Strahlenbündel durch den Schnittpunkt von OP mit q. Endlich sei P

imaginär als ein Doppelpunkt der durch die harmonischen Punktepaare AA_1 BB_1 bestimmten Involution gegeben, wo A in $(\alpha' \lambda)$ liegt. Die reelle Gerade durch P sei l. Dann schneidet Ol ι' in einer imaginären Linie i', und man kann vermittelst v. Staudt's Construction P darstellen durch die reelle Gerade, welche durch den Schnitt von OP und i' geht. Liegt der imaginäre Punkt auf $(\alpha' \lambda)$, so wird er durch q abgebildet. Die Abbildung ist, von Ausnahmepunkten abgesehen, ein-eindeutig. Alsdann werden die Punkte abgebildet, die auf den imaginären Geraden der Ebene λ liegen, wobei zu unterscheiden ist, ob der reelle Punkt der imaginären Geraden auf $(\alpha' \lambda)$ liegt oder nicht. Im ersteren Fall entsprechen den Punkten der imaginären Linie alle Geraden einer Ebene, im letzteren alle Geraden einer Congruenz erster Ordnung und Klasse. Die folgenden Abschnitte behandeln die Lehre der Punktketten mit Anwendung auf die allgemeine Lehre von der Projectivität. Dann wird gezeigt, dass die Abbildungsstrahlen der Punkte eines reellen oder imaginären Kegelschnitts eine Congruenz zweiter Klasse bilden. Im letzten Abschnitt wird bemerkt, dass auch andere Constructionen zu einer Lösung des vorgelegten Abbildungsproblems führen. Wö.

R. Bonola. Sulla introduzione degli enti improprii in geometria projettiva. Batt. G. **38**, 105-116.

Wie bekannt, haben F. Klein, M. Pasch und F. Schur bewiesen, dass man die ganze projective Geometrie unabhängig von jeder metrischen Betrachtung begründen kann, wenn man ein begrenztes Gebiet des Raumes als Ausgangspunkt wählt. Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist eine Vereinfachung jener Auflösungen des genannten Problems. Der Verf. erhält sie durch Anwendung der Sätze über perspective Dreiecke oder Trieder; aus ihnen leitet er die folgenden ab: I. Sind a, b, c die Durchschnittslinien dreier Ebenen α, β, γ desselben Büschels mit einer Ebene π, und ist O ein beliebiger Raumpunkt, so gehören die Ebenen Oa, Ob, Oc demselben Büschel an. II. Wenn die Geraden c, d mit den Geraden a, b coplanar sind, so gehören sie auch derselben Ebene an. III. Sind L, M, N drei Punkte der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen, so geht jede Ebene, welche durch zwei jener Punkte geht, auch durch den dritten. IV. Gehören drei Punkte einer Geraden an, so kann man dasselbe über ihre Projectionen von einem beliebigen Punkte auf eine beliebige Ebene aussagen. — Diese Sätze genügen, um die ganze Lehre von den uneigentlichen Elementen des Raumes zu begründen. La.

F. Kölmel. Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projectiver Massbestimmung. Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie. Lahr i. B.: O. Schauenburg. VI + 99 S., 1 Tafel. 8°.

Im ersten Teile der Arbeit (S. 1-27) nimmt der Verf. auf der pro-

jectiven Ebene einen beliebigen Anfangspunkt O, denkt sich auf jeder Geraden durch O eine projective Massscala construirt und ebenso in dem Strahlenbüschel durch O eine solche Scala. Mit Hülfe der so erhaltenen Polarcoordinaten bildet er dann die projective Ebene durch Formeln, die eigentlich vom Himmel herabfallen, auf die euklidische Ebene ab, und erhält so homogene Punkt- und Liniencoordinaten, die mit den sogenannten Weierstrass'schen Coordinaten identisch sind. Dabei unterscheidet er zwischen der einfachen und der erweiterten projectiven Ebene: jener entspricht eine einseitige, dieser eine zweiseitige euklidische Bildebene. Die verschiedenen Fälle der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Massbestimmung werden sorgfältig charakterisirt. In Teil 2 (S. 28-64) werden die Formeln für die Bewegungen und Umlegungen der projectiven Ebene abgeleitet, indem nach dem Verfahren von Cayley die projectiven Transformationen aufgestellt werden, die den Fundamentalkegelschnitt invariant lassen. Leider wird der Beweis dafür, dass jede Transformation dieser Art sich auf eine der angegebenen zurückführen lässt, nicht mitgegeben. Die verschiedenen Arten von Bewegungen und Umlegungen werden charakterisirt. Im dritten Teile (S. 65-99) studirt der Verf. die Zusammensetzung von Bewegungen und Umlegungen, nachdem er vorher eine grosse Anzahl von Constructionen der nichteuklidischen Geometrie zusammengestellt hat, die in der That schön und einfach sind, die aber vielfach deshalb unbefriedigend sind, weil die zu construirenden Stücke meist nur durch Formeln und nicht rein geometrisch definirt sind.

El.

E. B. Wilson. The decomposition of the general collineation of space into three skew reflections. American M. S. Trans. **1**, 193-196.

Der Verf. nennt „schiefe Reflexion" die Raumtransformation, be welcher dem Punkte P ein Punkt P' derart entspricht, dass PP' zwei windschiefe Geraden trifft und durch sie harmonisch geteilt wird. Alsdann kann eine Raumcollineation als das Product von drei schiefen Reflexionen angesehen werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass eine Collineation das Product zweier schiefen Reflexionen sein soll, ist, dass die Leitgeraden einer jeden dasselbe Gegenkantenpaar des Fundamentaltetraeders harmonisch schneiden, und dass ein Paar entsprechender Punkte auf einer F_2 durch die andern vier Kanten des Tetraeders liegt.

Wö.

H. B. Newson. On the construction of collineations. Kansas Univ. Quart. **9**, 65-71.

Die fünf Arten von Collineationen zweier ebenen Felder werden aus zwei projectiven, zum nämlichen Strahlenbüschel erster Ordnung perspectiven Kegelschnitten abgeleitet, die dreizehn Arten von Collineationen zweier Räume aus zwei zum nämlichen Strahlenkegel zweiter Ordnung perspectiven Raumcurven dritter Ordnung.

Js.

J. Edalji. **Reciprocally related figures and the principle of continuity.** Ahmedabad: Diamond Jubilee Press. 95 S. 8°.

Zwei ebene Figuren, von denen die eine in die andere durch eine oder mehrere Correlationen übergeht, werden als correlativ verwandt (reciprocally related) bezeichnet. Correlativ verwandt sind z. B. ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte und zwei beliebige Kegelschnitte, Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkte und solche mit zwei gemeinsamen Tangenten u. s. f. Derart auf einander bezogene Kegelschnitte können bekanntlich benutzt werden, um gewisse projective und metrische Eigenschaften der einen Art auf die andere zu übertragen. Js.

A. Sucharda. **Ueber einen besonderen Fall der Nullcorrelation.** Časopis **29**, 89-100 (Böhmisch).

Der Verf. untersucht die Nullsysteme, welche durch die zwölf räumlichen Fünfecke von den Ecken $abcde$ gegeben erscheinen, wenn abc ein gleichseitiges Dreieck bildet und d und e zwei von dessen Ebene gleich entfernte Punkte bedeuten, deren Orthogonalprojection in die Mitte dieses Dreiecks fällt. Constructive und rechnerische Bestimmung der Hauptaxen und der Constanten der beiden verschiedenen Correlationen. Sda.

L. Bickart. **Note de géométrie.** Revue de Math. spéc. **10**, 497-499.

Verf. beweist folgende Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der kinematischen Geometrie: „Zwei ähnliche Figuren im Raume kann man stets und nur auf eine einzige Art durch eine Rotation um eine gewisse Axe und eine darauf folgende Homothetie um einen Punkt dieser Axe zur Deckung bringen.“ Wbg.

J. Fairon. **Note sur les involutions du quatrième ordre.** Belg. Bull. Sciences 1900, 950-955.

F. Deruyts. **Rapport.** Ibid. 884-885.

Untersuchungen bezüglich der Construction der quadratischen Involutionen, deren Elemente die Punkte eines Kegelschnittes sind. Mn. (Lp.)

C. Grolleau. **Note sur l'involution.** Revue de Math. spéc. **10**, 577-578.

Sind e, f die Doppelpunkte einer durch die beiden Punktepaare (a, a'), (b, b') bestimmten Involution, so beweist Chasles in seiner Géométrie Supérieure folgende nützliche Relation:

$$\frac{\overline{ea}^2}{\overline{ea'}^2} = \frac{ab \cdot a'b}{a'b \cdot a'b'}.$$

Verf. giebt einen einfachen Beweis dieser Formel, indem er sich auf die bekannte Eigenschaft der Involution stützt, dass die Doppelpunkte die entsprechenden Punktepaare harmonisch teilen. Wbg.

A. Sucharda. Ueber einige Grundaufgaben der neueren Geometrie. Časopis **29**, 1-9 (Böhmisch).

In Befolgung des von Reye angewandten Vorganges wird bewiesen, dass zwei reciproke ebene Systeme auf vierfache Weise in die involutorische Lage gebracht werden können, und wird die Construction des Directionskegelschnittes für einen jeden der vier Fälle vorgenommen. Ferner wird von zwei reciproken und schliesslich von zwei collinearen (räumlichen) Strahlenbündeln bewiesen, dass sich dieselben auf vierfache Weise in die involutorische Lage bringen lassen. Sda.

J. Neuberg. Sur les transversales réciproques. Brux. S. sc. **24** A, 119-122.

Zur Erforschung der folgenden Transformation: Wenn eine Transversale t_1 die Seiten eines Dreiecks in drei Punkten schneidet, so liegen ihre Symmetralpunkte bezüglich der Mitten der Seiten auf einer Geraden t_2; t_1 und t_2 sind reciproke Transversalen. Die Mitten der Diagonalen des vollständigen Vierseits aus den Seiten des Dreiecks und aus t_1 liegen auf einer Geraden t'_1. Der Verf. untersucht die correspondirenden Figuren, welche von t_1 und t_2, von t_1 und t'_1 eingehüllt werden.

Mn. (Lp.)

G. Marletta. Sulle polarità piane. Periodico di Mat. (2) **2**, 144-150.

Der Verf. giebt die Beweise mehrerer Sätze über ebene Polarsysteme und ihre Anwendungen auf die Lehre von den Kegelschnitten. In einer Anmerkung sagt er hierzu: „Obgleich dieser Satz (der erste) und der folgende bemerkenswerte Sonderfälle allgemeinerer Theoreme sind (vergl. Sannia: Geometria projettiva. Napoli, Pellerano, 1895), so wollte ich doch diese Beweise als sehr einfach hier geben“. Die einzelnen Sätze hier anzuführen, ist nicht angängig. Lp.

G. Lazzeri. Teoria geometrica dell' inversione. Periodico di Mat. (2) **2**, 137-143.

P. Aussant-Carà. Note. Ibid. 143-144.

Der Aufsatz Lazzeri's bezweckt, die Theorie der Inversion von der metrischen Definition $(OA \cdot OA' = k^2)$ unabhängig zu machen. Zu diesem Zwecke werden zuerst antiparallele Gerade genau erklärt,

und dann folgt nach einigen geometrischen Erläuterungen die Definition: „Zwei Figuren heissen „invers“ in Bezug auf einen Punkt O (das „Centrum der Inversion“) in endlicher oder unendlicher Entfernung, wenn ihre Punkte (mit Ausschluss von O) sich eindeutig derart entsprechen, dass die jedes Paar entsprechender Punkte verbindenden Geraden durch O gehen, und dass die durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmten Geraden in Bezug auf OB und OC antiparallel sind. Solche Verwandtschaft heisst Inversion.“ Es ist unnötig, über die weiteren Entwickelungen des Ganges zu berichten. Die Noten des zweiten Autors geben einige sachliche und historische Anmerkungen.

Lp.

C. Alasia. Una trasformación del Professor Allardice. Progreso mat. (2) **2**, 368-378.

Nach einigen Angaben über die wichtigsten Transformationen beschäftigt sich der Verf. mit einer von Allardice in Edinb. M. S. Proc. **6** (F. d. M. **20**, 597, 1888) untersuchten Transformation, welche zur Gruppe der Transformationen durch reciproke Radien gehört.

Tx. (Lp.)

A. S. Gale. Wiener's theory of displacements, with an application to the proof of four theorems of Chasles. Annals of Math. (2) **2**, 1-7.

Die Abhandlung enthält eine sehr angenehm zu lesende Darstellung bekannter Resultate.

Sr.

Th. Reye. Lehrsätze über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelgebüsche. Annali di Mat. (3) **5**, 1-15.

Die Gesamtheit aller Kugeln des Raumes bietet eines der einfachsten Beispiele einer linearen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, und darum ist die Kugelgeometrie ganz besonders geeignet, den abstracten Untersuchungen des vierdimensionalen Raumes ein anschauliches Substrat zu liefern. Man darf sich alsdann nicht auf die Betrachtung reeller Kugeln beschränken, sondern muss auch diejenigen in Betracht ziehen, welche bei reellem Mittelpunkt einen rein imaginären Radius besitzen. Innerhalb der Gesamtheit hat man dann als lineare Gebilde von geringerer Dimension Kugelbüschel (M_1), Kugelbündel (M_2), Kugelgebüsche (M_3) zu unterscheiden. (Der Index bezeichnet die Dimensionenzahl.) Der Umstand, dass die Potenzebenen, welche die Kugeln einer M_i mit zwei beliebigen festen Kugeln bestimmen, einander in projectiven Ebenenbüscheln, -bündeln oder Räumen entsprechen, führt zum Begriff der projectiven Beziehung zwischen zwei M_i.

Das Gebiet der Kugelgeometrie, welches in der vorliegenden Arbeit behandelt wird, umfasst diejenigen Kapitel, welchen in der projectiven

Geometrie der Punkte und Ebenen des Raumes die Lehre von der Erzeugung der Regelflächen zweiten Grades, der Raumcurven dritter Ordnung, der Flächen dritter Ordnung durch projective Ebenenbüschel und -bündel und die hierzu reciproken Betrachtungen entsprechen. Beispielsweise hat man in den ∞^1 projectiven Bündeln, welche das Secantensystem, und in den ∞^2 Büscheln, welche die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung erzeugen, zwei Systeme von (∞^1, bez. ∞^2) Gebilden, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass die Elemente, welche in den Gebilden des einen Systems einander zugeordnet sind, insgesamt ein Gebilde des anderen Systems constituiren, und umgekehrt. In gleicher Weise kann man für jedes Zahlenpaar i, k ($= 1, 2, 3$) (auf mannigfache Weise) ein System von ∞^k projectiven Kugelmannigfaltigkeiten M_i und ein zweites System von ∞^i projectiven Kugelmannigfaltigkeiten M_k angeben von folgender Beschaffenheit. Je ∞^k (∞^i) Kugeln, welche einander in den ∞^k (∞^i) Mannigfaltigkeiten M_i (M_k) zugeordnet sind, constituiren eine der ∞^i (∞^k) Mannigfaltigkeiten M_k (M_i). Den 6 möglichen Zahlenpaaren $(ik) = (11), (12), (13), (22), (23), (33)$ entspricht die Einteilung des Stoffes in 6 Paragraphen. Von den Kugelmannigfaltigkeiten höheren Grades, welche sich bei diesen Betrachtungen ergeben, seien die (aus ∞^3 Kugeln bestehenden) Complexe hervorgehoben. Es ergeben sich in voller Allgemeinheit die Complexe der ersten vier Grade. Die in einem Complex vom Grade r enthaltenen Punktkugeln bilden eine Fläche vom Grade $2r$. Die so erhaltenen speciellen Flächen $2r$-ten Grades sind dadurch charakterisirt, dass sie durch den unendlich fernen Kugelkreis r-mal hindurchgehen. Durch Transformationen nach reciproken Radien werden sie in Flächen derselben Art übergeführt. Man erhält für $r = 1$ die Kugel, für $r = 2$ die Darboux'sche Cyklide, welche zwei Scharen von Kreisen enthält, und für welche mehrere Erzeugungsarten angegeben werden. Stz.

Weitere Litteratur.

J. Sachs. Lehrbuch der projectivischen (neueren) Geometrie (synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). 1. Teil: Elemente und Grundgebilde. Projectivität. Dualität. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet. Stuttgart: J. Maier. IV + 182 S. gr. 8° (Kleyer's Encyklopädie).

A. Darreye. Polare Felder und Kegelschnitte mit gemeinsamem Poldreieck. Diss. Strassburg. 41 S. 8°.

Hertter. Die Dreipunktreihe. I-III. Württ. Korrespbl. 7, 260-265, 294-307, 335-343.

F. Viola. La planimetria independente dal concetto di misura. Padova. 80 S. 8° (1899).

B. Besondere ebene Gebilde.

J. Lange. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Zweite, verbesserte Auflage. Berlin: H. W. Müller. 68 S. 8°.

Der Verf. behandelt in dieser Arbeit die Lehre von den Kegelschnitten in synthetischer Weise, so dass sie sich an das geometrische Pensum der Secunda anschliesst. Er erklärt zuerst die harmonischen Gebilde, definirt hierauf Ellipse, Hyperbel, Parabel aus Brennpunkten und Hauptaxe, sowie aus Brennpunkt und Directrix, giebt die Haupteigenschaften dieser Curven und weist ihre Identität mit den ebenen Schnitten eines geraden Kegels nach. Dann wird die Untersuchung für alle drei Kegelschnitte gemeinsam geführt. In einem Anhang werden endlich projective Beziehungen behandelt, ferner involutorische Beziehungen und dahin gehörende Aufgaben, vor allem die Construction von Kegelschnitten aus fünf Elementen (Punkten und Tangenten). Das Buch, welches dem Lernenden mancherlei Anregung bietet, ist entschieden empfehlenswert. Druck und Ausstattung sind gut (vergl. F. d. M. **25**, 987, 1893). Mz.

F. Frech. Kegelschnittaufgaben in geometrischer Behandlung. Progr. (28) Gymn. Dt.-Krone. 16 S. 4°. 1 Taf.

Im Anschluss an Erler: „Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung" werden 101 einfache Aufgaben über Parabel, Ellipse, Hyperbel gelöst, wie sie Schüler eines Gymnasiums innerhalb des vorgeschriebenen Rahmens wohl bewältigen können. Lg.

A. Tresse. Sur les propriétés projectives des coniques. S. M. F. Bull. **28**, 131-136.

Elementarer (von den Brennpunkteigenschaften ausgehender) Beweis des Satzes, dass die Centralprojection eines Kegelschnittes wieder ein Kegelschnitt ist. Stz.

J. Adamczik. Zur Construction der conjugirten Durchmesser ebener Kegelschnitte. Zeitschr. f. Math. **45**, 174-176.

Praktische Winke für die darstellend-geometrische Ausführung. Stz.

O. Danielson. Et Bevis for Saetningen om Nipunktcirklen i dens projektive Form. Nyt Tidss. for Math. **11B**, 41-42.

Der Verf. beweist mittels elementarer Betrachtungen, dass, wenn vier Kegelschnitte durch zwei gegebene Punkte gehen und drei gegebene Geraden berühren, es immer einen Kegelschnitt giebt, der durch die zwei gegebenen Punkte geht und alle vier Kegelschnitte berührt. V.

R. BRICARD. Au sujet d'un théorème de M. G. Humbert. Nouv. Ann. (3) **19,** 369-370.

Directer geometrischer Beweis des Satzes von G. Humbert (C. R. **129,** 640; F. d. M. **30,** 569, 1899): Gegeben 4 Gerade und eine C_2; existirt ein Kegelschnitt derart, dass er durch die Ecken eines von dreien der Geraden gebildeten Dreiecks und die Schnittpunkte der vierten Geraden mit C_2 geht und C_2 berührt, so giebt es noch drei weitere Kegelschnitte, indem jede der drei Seiten des Dreiecks an Stelle der vierten Geraden treten kann. Wö.

J. L. COOLIDGE. On the intersection of two conics having a common focus. Annals of Math. (2) **1,** 173-174.

Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte durch zwei gegebene Punkte lassen sich leicht mit Zirkel und Lineal construiren, wenn dieselben einen Brennpunkt gemein haben. Die Constructionen wendet Verf. auf das Problem des Apollonius an. Sr.

L. RIPERT. Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique. S. M. F. Bull. **28,** 196-200.

Auf eine von Lemoine im Intermédiaire des Mathématiciens gestellte Frage hin hat sich der Verf. mit den dreifach perspectiven Dreiecken beschäftigt, die einem Kegelschnitt ein- oder umbeschrieben sind, und ist zu einer Reihe interessanter Ergebnisse gelangt: Man kann zu jedem Kegelschnitt eine zweifach unendliche Schar von In- und Umdreiecken (P, Q) zeichnen, die unter einander und zu jedem gegebenen In- und Umdreieck (A) dreifach perspectiv gelegen sind. Dabei liegen die 9 Perspectivitätscentren in gerader Linie, und die 9 Desargues'schen Geraden gehen durch einen Punkt, falls die Dreiecke A, P, Q sämtlich ein- oder umbeschrieben sind. Sind aber A ein Indreieck und P, Q Umdreiecke oder umgekehrt, so bleiben die Centren von (P, Q) zwar immer noch in gerader Linie, und die zugehörigen Axen laufen durch einen Punkt; aber die 6 Perspectivitätscentren der Paare (A, P) und (A, Q) liegen auf einem Kegelschnitt, und die sechs entsprechenden Desargues'schen Geraden berühren einen davon verschiedenen Kegelschnitt. Jhk.

G. FONTENÉ. Correspondances simples pour des coniques. Revue de Math. spéc. **10,** 521-524.

Anwendungen der zweifach quadratischen symmetrischen (involutiven) Correspondenz zwischen zwei Punkten eines Kegelschnittes, der auch in zwei Gerade degeneriren kann. Fälle der Zerlegung in zwei homographische Correspondenzen. Wbg.

E. Cahen. Démonstration du théorème de Poncelet sur les polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. Revue de Math. spéc. **11**, 1-3. (Rectification **11**, 58).

Verf. bedient sich der von Fontené (Revue de Math. spéc. **10**, 521-524; vergl. das vorangehende Referat) angewandten involutiven Correspondenz zweier Kegelschnittpunkte, um zunächst einen Satz desselben zu verallgemeinern: „Ist ein p-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben, und berühren $p-1$ seiner Seiten einen anderen Kegelschnitt, so hüllt auch die p-te Seite einen Kegelschnitt ein". Es gilt auch der duale Satz. — Ferner beweist er mittels derselben Correspondenz den im Titel angegebenen Satz von Poncelet. — Endlich wird folgender Satz bewiesen: „Ist ein Polygon von gerader Seitenzahl einem Kegelschnitte ein- und einem anderen umgeschrieben, so schneiden sich die Diagonalen, welche entgegengesetzte Ecken verbinden, in einem Punkte, der fest bleibt, wenn das Polygon variirt". Es gilt wieder der duale Satz. Im Falle des Sechseckes ergiebt sich der Brianchon'sche Punkt, bez. die Pascal'sche Gerade. Wbg.

M. Lelieuvre. Sur les polygones de Poncelet. Ens. math. **2**, 410-423.

Eine zur Einführung in den Gegenstand wohlgeeignete Bearbeitung des Problems der einem Kegelschnitte eingeschriebenen und einem anderen umgeschriebenen Polygone und der mit diesem zusammenhängenden Fragen. Im ersten Teil wird das Problem rein geometrisch behandelt, im zweiten mittels der Theorie der elliptischen Functionen. Ein Hinweis auf die Litteratur des Problems wäre zweckmässig gewesen. T.

E. Wölffing. Ueber Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind. Böklen Mitt. (2) **2**, 17-18.

Nachtrag zu der in F. d. M. **30**, 524, 1899, besprochenen Abhandlung. Wö.

J. Ser. Note pour servir à l'étude des faisceaux de coniques. Nouv. Ann. (3) **19**, 126-129.

Ist ein Dreieck ABC, ausserdem ein Punkt P und eine Gerade p gegeben, so induciren der Kegelschnitt, der ABC zum Polardreieck hat, und für den p die Polare von P ist, der durch $ABCP$ bestimmte Kegelschnittbüschel und die durch die Seiten des Dreiecks ABC und p bestimmte Kegelschnittschar auf p drei Involutionen, deren Identität leicht einleuchtet. Aus dieser Identität lässt sich eine Reihe bekannter Sätze über Kegelschnitte unmittelbar ablesen. T.

A. Vacquant. Démonstration géométrique d'une propriété des normales à une conique à centre. Nouv. Ann. (3) **19**, 502-506.

Schneiden sich die Normalen in drei Punkten P_1, P_2, P_3 eines Kegelschnittes k_2 immer auf der Normalen eines vierten Punktes N, so liegen bekanntlich die Pole Q_1, Q_2, Q_3 der Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auf einer gleichseitigen Hyperbel h_2. Das h_2 eingeschriebene und k_2 umgeschriebene Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ ist auch noch einem mit k_2 coaxialen Kegelschnitte k'_2 eingeschrieben. Js.

K. Rohn. Construction des Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte. Leipz. Ber. **52**, 17-27.

Die Kreise k_i, welche einen Kegelschnitt k in einem Punkte O berühren, schneiden ihn bekanntlich noch in Punktepaaren, deren Verbindungsstrahlen parallel laufen. Zwischen dem Kegelschnitt k und jedem Kreise k_i besteht je eine perspective Beziehung. Zu jeder gehört je eine Perspectivitätsaxe a_i und das Perspectivitätscentrum O. Soll nun der Krümmungkreis k_ϱ im Punkte O construirt werden, wenn noch vier weitere Punkte P, Q, R, S von k gegeben sind, so bestimme man die Tangente und Normale in O, sowie einen beliebigen, k in O berührenden Kreis k_i, der OP, OQ, OR in P_i, Q_i, R_i schneidet. Zu k_i gehört als a_i die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $(PQ, P_i Q_i)$ und $(QR, Q_i R_i)$, zu k_ϱ als a_ϱ also die durch O zu a_i parallel gezogene Gerade. Mit Hülfe von a_i und a_ϱ ergiebt sich in einfacher Weise der Mittelpunkt M_ϱ von k_ϱ. Js.

A. Droz-Farny. Notes géométriques. Progreso mat. (2) **2**, 313-318.

Einige Bemerkungen über zwei vorher von Duran Loriga betrachtete Transformationen (Progreso mat. (2) **2**, 121 ff.). Der Verf. gelangt dadurch zu einigen Sätzen betreffs der Dreiecksgeometrie und der Kegelschnitte. Tx. (Lp.)

A. Jerrold. Concours de l'École des ponts et chaussées (1899); géométrie analytique; solution. Nouv. Ann. (3) **19**, 224-225.

Rein geometrischer Beweis des Satzes: Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt geht und von einer gegebenen Geraden eine constante Strecke abschneidet, ist eine Parabel; die Grösse ihres Parameters ist von der Länge der Strecke unabhängig. T.

A. Gob et J. Neuberg. Question de concours. Mathesis (2) **10**, 17-19, 195-198.

Verschiedene Verallgemeinerungen des schönen Chasles'schen Satzes: Der Ort des Schnittpunktes der gemeinsamen Tangenten einer Ellipse

und eines veränderlichen, die Ellipse in einem gegebenen Punkte berührenden Kreises ist ein confocaler Kugelschnitt. Mn. (Lp.)

A. SAUVE. Alcuni nuovi teoremi sulle curve del terzo ordine. Rom. Acc. P. d. N. L. **58,** 129-138.

1. Construirt man die zwei Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte einer durch einen festen Punkt einer C_3 gehenden Geraden mit der C_3 und je ein auf der C_3 gelegenes Punktetripel gehen, so schneiden sich diese noch in zwei festen Punkten auf einer festen Geraden.

2. Liegt auf einer C_3 ein Punktetripel und ein Punktequadrupel, so schneiden die drei Kegelschnitte durch die Punkte des Quadrupels und je durch einen Schnittpunkt einer Tripelseite mit der C_3 resp. die Tripelseiten in drei Punkten, die in gerader Linie liegen; jeder Kegelschnitt durch die Punkte des Quadrupels schneidet die C_3 und die genannte Gerade in vier Punkten, die mit den Punkten des Tripels auf einer C_2 liegen.

Beide Sätze werden zur Construction weiterer Punkte einer C_3 angewandt, wenn 9 Punkte derselben gegeben sind; der zweite, welcher das Pascal'sche Theorem als Specialfall enthält, dient auch zur Construction der Tangente, des Krümmungskreises, eines drei- und vierpunktig berührenden Kegelschnitts in einem der 9 Punkte, durch welche eine C_3 bestimmt ist. Wö.

G. CARDOSO-LAYNES. Una curva notevole. Suppl. al Period. **3,** 33-37.

Elementare Behandlung der Kardioide als Kreiskonchoide, als Epicykloide und als Inverse einer Parabel für den Brennpunkt als Pol.

Lp.

H. E. TIMERDING. Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. J. für Math. **122,** 209-226.

Der Verf. giebt eine grosse Reihe von Sätzen über Anordnungen der Doppeltangenten zu Gruppen von bestimmter Zahl und Art, wie sie von Steiner, Hesse, Aronhold, Geiser und in neuerer Zeit von Caporali, de Paolis und Ciani betrachtet wurden. Wie Ciani, benutzt er die einfache Beziehung, die zwischen der Theorie der Doppeltangenten und den Doppelebenen der Kummer'schen Fläche besteht, und die sich darin ausdrückt, dass ein ebener Schnitt der Fläche aus den 16 Doppelebenen zugleich eine gewisse Gruppe von 16 Doppeltangenten der Schnittcurve ausschneidet, als Ausgangspunkt, resp. als Führer. Besonderes Gewicht wird auch darauf gelegt, ob die bezüglichen in eine Gruppe eintretenden Doppeltangenten syzygetisch, resp. asyzygetisch sich verhalten. Sfs.

C. Juel. **Indledning i Laeren om de grafiske Kurver (avec résumé en français).** Kjøb. Skrift. 1899, 1-90.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Theorie der geschlossenen Curven, von denen man nichts anderes weiss, als dass eine Gerade sie höchstens in einer gegebenen Anzahl von Punkten schneidet (der Ordnung der Curven); sonst können sie ganz willkürlich sein, algebraisch oder nicht.

Untersucht werden die Curven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

Da die Curven vierter Ordnung (und höherer Ordnung) aus einer willkürlichen Anzahl geschlossener Zweige zusammengesetzt sein können, so beschäftigt sich die Abhandlung nur, wenn die Curven vierter Ordnung sind, mit unzusammengesetzten Curven. Der Verf. führt zuerst eine Art von Correspondenzprincip ein, indem er beweist: Wenn zwei Punktreihen auf einer Curve so einander entsprechen, dass jedem Punkte der ersten Reihe p Punkte der zweiten entsprechen, während jedem Punkte der zweiten Reihe q Punkte der ersten entsprechen, dann befinden sich auf der Curve $p+q$ Punkte, in denen zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zusammenfallen, doch nur unter den Bedingungen, dass niemals zwei Punkte der einen Reihe, welche beide einem Punkte der anderen Reihe entsprechen, zusammenfallen können, und dass, wenn ein Punkt der einen Reihe sich in einer Richtung auf der Curve bewegt, die entsprechenden Punkte der anderen Reihe sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Aus diesem Princip werden beinahe alle Resultate hergeleitet.

Als Singularitäten der Curve werden Doppelpunkte, Spitzen, Wendepunkte und vorspringende Punkte betrachtet und die ihnen dualistisch entsprechenden Geraden. Erst werden nun die Curven zweiter Ordnung betrachtet. Sie sind immer zweiter Klasse. Zwei solche Curven schneiden sich immer in einer geraden Anzahl von Punkten, die übrigens willkürlich sein kann. Wenn zwei Curven sich nicht schneiden, kann die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten Null oder vier sein; sonst ist die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten gleich der Anzahl der Schnittpunkte. Eine Curve zweiter Ordnung kann willkürlich viele vorspringende Punkte haben.

Jetzt folgen einige allgemeine Sätze über graphische Curven. Wenn ein Bogen einer Curve einen Teil einer Curve zweiter Ordnung ausmachen kann, wird er elementar genannt. Eine geschlossene Curve, welche keine Singularitäten besitzt, oder doch nur vorspringende Punkte, muss zweiter Ordnung sein.

Eine geschlossene Curve, welche keine vorspringenden Punkte besitzt, wird vollkommen continuirlich genannt. Von solchen vollkommen continuirlichen geschlossenen Curven werden verschiedene Sätze bewiesen, z. B.: Eine solche kann nicht nur eine einzelne Singularität haben, einen Doppelpunkt oder eine Spitze oder eine Doppeltangente oder einen Wendepunkt. Die Ordnung einer vollkommen continuirlichen Curve und die Anzahl ihrer Wendepunkte müssen gleichzeitig entweder gerade oder ungerade sein.

Eine geschlossene Curve von gerader Ordnung begrenzt einen Teil der Ebene.

Eine geschlossene Curve ungerader Ordnung begrenzt keinen Teil der Ebene.

Eine geschlossene Curve zweiter Ordnung kann nicht durch mehr als fünf vollständig willkürlich gewählte Punkte gelegt werden.

Jetzt folgen die Curven dritter Ordnung. Der Hauptsatz ist hier: Jede Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt hat immer drei Wendepunkte. Hat die Curve einen Doppelpunkt, so hat sie auch einen Wendepunkt. Die Klasse einer vollständig continuirlichen Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt oder Spitze ist sechs oder vier. Die Klasse einer Curve mit Doppelpunkt ist vier, mit Spitze drei. Ist eine Curve dritter Ordnung und vierter Klasse, so kann noch eine Curve zweiter Ordnung hinzugefügt werden, so dass die beiden Curven zusammen eine Curve dritter Ordnung bilden.

Eine Curve dritter Ordnung ohne Spitzen oder Doppelpunkt kann immer aus drei elementaren Bogen zusammengesetzt werden. Der Verf. teilt jetzt die vorspringenden Punkte in drei Gattungen. Er zieht eine Tangente zu einem Punkte des einen Astes der Curve in der Nähe des vorspringenden Punktes und sieht zu, ob diese Tangente den anderen Ast in der Nähe des vorspringenden Punktes schneidet. Wenn dieses von beiden Aesten gilt, so ist der Punkt erster Art; wenn es nur für einen Ast gilt, zweiter Art, sonst aber dritter Art. Ein Punkt erster Art kann als die Grenze eines gewöhnlichen Punktes gelten, in dessen Nähe zwei Wendepunkte liegen; ein Punkt zweiter Art als die Grenze eines Punktes, in dessen Nähe ein Wendepunkt liegt; ein Punkt dritter Art als die Grenze eines ganz gewöhnlichen Punktes.

Daraus folgt: Eine Curve dritter Ordnung kann höchstens einen vorspringenden Punkt erster Art haben. Hat sie einen solchen, so kann sie höchstens noch einen vorspringenden Punkt zweiter Art haben. Eine Curve dritter Ordnung kann höchstens drei vorspringende Punkte zweiter Art haben. Hat die Curve einen Doppelpunkt, so kann sie höchstens noch einen vorspringenden Punkt zweiter Art haben und keinen erster Art. Dagegen kann jede Curve dritter Ordnung beliebig viele vorspringende Punkte dritter Art haben.

Die Formen, welche die Curven dritter Ordnung annehmen können, werden leicht aus dem Satze hergeleitet, dass eine solche Curve aus drei elementaren Bogen zusammengesetzt werden kann.

Es folgen jetzt die Curven vierter Ordnung. Dieser Abschnitt ist der grösste und wichtigste der ganzen Abhandlung (S. 40 bis S. 79). Da, wie früher gesagt, eine Curve vierter Ordnung aus unendlich vielen geschlossenen Curven zusammengesetzt sein kann, betrachtet der Verf. nur Curven, die in einem Zuge durchlaufen werden können. Curven vierter Ordnung können Doppeltangenten haben oder nicht. Finden sich aber Doppeltangenten, so ist ihre Anzahl immer gleich der Anzahl der Doppelpunkte, vermehrt um die halbe Anzahl der Wendepunkte.

Der Satz wird bewiesen, indem der Verf. die Curven vierter Ordnung

in verschiedene Gattungen teilt und nachweist, dass der Satz für jede Gattung gilt.

Nimmt man an, dass eine Tangente in einer Spitze (eine Spitzentangente) die Curve in drei Punkten schneidet, so kann eine Curve vierter Ordnung höchstens drei Spitzen haben. Betrachtet man jedoch eine Spitze als einen gewöhnlichen Punkt, so kann die Curve beliebig viele Spitzen haben.

Dagegen kann die Curve beliebig viele Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten haben. Von einem Doppelpunkte kann man entweder keine (Doppelpunkte erster Art) oder zwei (Doppelpunkte zweiter Art) Tangenten an die Curven ziehen. Der Verf. beweist nun, dass immer alle Doppelpunkte einer Curve derselben Art sind, den Fall ausgenommen, dass die Curve drei Doppelpunkte hat. In diesem Falle kann die Curve entweder zwei Doppelpunkte der ersten Art und einen der anderen Art haben oder umgekehrt.

Wenn man, von einem Doppelpunkte ausgehend, eine Curve durchläuft, so kommt man zu demselben Doppelpunkte zurück, ohne die ganze Curve zu durchlaufen. Man kann daher bei jedem Doppelpunkte die Curve in zwei geschlossene Curven teilen. Jeder dieser Teile wird als zu dem Doppelpunkte gehörig bezeichnet, und die beiden Teile müssen entweder beide von gerader oder von ungerader Ordnung sein. Im letzten Falle sind die beiden Teile dritter Ordnung. Der Verf. teilt die Curven vierter Ordnung in vier Haupttypen.

1. Curven ohne Doppelpunkte. 2. Curven mit Doppelpunkten erster Art. Diese können nur in Curven gerader Ordnung geteilt werden. 3. Curven, die in zwei Curven dritter Ordnung geteilt werden können. Diese haben zwei oder drei Doppelpunkte. Im letzten Falle sind immer die zwei Doppelpunkte der einen Art, der dritte der anderen Art. 4. Curven mit lauter Doppelpunkten zweiter Art, die nur in Curven gerader Ordnung geteilt werden können.

Es wird gezeigt, dass alle Curven vierter Ordnung einem dieser Typen angehören. Endlich wird gezeigt, wie man die Hauptformen der verschiedenen Typen zeichnen kann. Die ganze Abhandlung ist ausserordentlich reichhaltig an neuen Sätzen. V.

Weitere Litteratur.

T. Crivetz. Essai sur l'équidistante. Bucarest: Göbl. 50 S. 8°.

A. Droz-Farny. Sur trois hyperboles associées à un triangle. Mathesis (2) **10**, 11-13.

A. Droz-Farny. Sur trois paraboles associées à un triangle. Mathesis (2) **10**, 63-64. Mn.

J. Gehrke. En geometrisk Saetning. Nyt Tidsskr. **10** B, 65-67 (1899).

Hack. Der Fall der Unbestimmtheit der Castillon'schen Aufgabe. Neues Korrespbl. Württ. **6**, 384-389, 419-421 (1899).

E. KURTZ. **Das Netz der Kegelschnitte, die ein gegebenes Poldreieck haben.** Diss. Münster. 23 S. 8°.

H. MANDART. Notes sur les coniques. Mathesis (2) **10**, 33-37.

CH. MICHEL. Sur les triangles conjugués et inscrits (ou circonscrits) à deux coniques. Bull. math. spéc. **6**, 81-82.

H. VALENTINER. Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel à la démonstration d'un théorème récent. Kjøb. Overs. 18.9, 655-659.

Ein Satz von Joh. Petersen (vgl. F. d. M. **29**, 473, 1898). Lp.

S. VECCHI. Sulle figure complete determinate da un numero qualunque di punti o da un numero qualunque di tangenti di una conica e sulle loro correlative nello spazio. Parma. 16 S. 4° (1899).

C. Besondere räumliche Gebilde.

E. HESS. Ueber die unilineare Lage zweier Tetraeder und eine Verallgemeinerung des Desargues'schen Satzes. Gesellsch. z. Beförd. d. ges. Naturwissensch. Marburg. 1900, 27-37.

Werden die vier Verbindungslinien der Eckpunkte zweier eindeutig auf einander bezogenen Tetraeder von zwei zusammenfallenden Geraden geschnitten, so haben die vier Schnittgeraden entsprechender Seitenflächen die gleiche Eigenschaft. Js.

JOH. GEHRKE. En geometrisk Sätning. Nyt Tidss. for Math. **10 B**, 65-67.

Es wird der Satz bewiesen: Auf einer Kugelfläche liegen drei Kreise: von drei willkürlichen Punkten der Kugelfläche, die nicht auf demselben Grosskreise liegen, werden die sphärischen Tangenten der Kreise gezogen, dann berühren diese sechs Tangenten einen sphärischen Kegelschnitt. V.

R. STURM. Ueber die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades. J. für Math. **122**, 263-264.

Werden in einer Ebene die Abstände r, r_1 eines beweglichen Punktes P von zwei festen Punkten durch die Gleichungen

$$r^2 = a + 2bl + cl^2, \quad r_1^2 = a_1 + 2b_1 l + cl^2$$

gegeben, wo l einen variablen Parameter bezeichnet, so ist der Ort von P ein Kegelschnitt. Von dieser Bemerkung ausgehend, giebt der Verf. einen neuen Beweis für die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades. Stz.

H. NEUMANN. Construction einer Fläche zweiter Ordnung F_2 aus neun ihr conjugirten Flächen zweiter Klasse Φ_2. Monatsh. f. Math. **11,** 114-117.

Die Construction geht aus von dem ganz speciellen Fall, in welchem jede der neun Klassen-Flächen in zwei zusammenfallende Ebenenbüschel ausartet, d. h. von der Construction der Fläche F_2 aus neun Punkten. Darauf wird successive je eine der speciellen Flächen durch eine allgemeine ersetzt. In dem allgemeinsten Falle, wo alle neun Flächen Φ_2 allgemeine sind, ist natürlich nur das Polarsystem von F_2 linear construirbar, die Ermittelung der Punkte von F_2 (welche ja auch imaginär sein kann), erfordert eine quadratische Construction. Vorausgeschickt ist die gleichartige Behandlung des analogen Problems in der Ebene. Stz.

E. MÜLLER. Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene. J. für Math. **122,** 30-33.

„Ist ein Tetraeder einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung eingeschrieben, und projicirt man die Pole dreier seiner Ebenen aus einem auf der vierten Ebene liegenden Flächenpunkt auf die Fläche, dann liegen diese Projectionen mit demjenigen Tetraedereckpunkte, durch den die drei ersten Ebenen gehen, in einer Ebene.“

„Liegen die Ecken zweier einander doppelt umschriebenen Tetraeder auf einer Fläche zweiter Ordnung, und projicirt man aus einer der Ecken die Pole der durch die Gegenecke gehenden Ebenen auf die Fläche, so liegen diese Punkte mit der Gegenecke in einer Ebene.“

Aus vorstehenden Sätzen folgen solche der ebenen Kreisgeometrie durch stereographische Projection der als Kugel zu nehmenden Fläche auf eine Ebene. Stz.

G. KOHN. Ueber eine besondere Lagenbeziehung von zwei Oberflächen zweiter Ordnung. Monatsh. f. Math. **11,** 102-106.

„Es ist eine einfache Bedingung für zwei Oberflächen zweiter Ordnung, wenn es entweder ein beiden Flächen eingeschriebenes einfaches Viereck geben soll, von dessen Kanten eine der ersten, die drei übrigen der zweiten Fläche angehören, oder ein beiden Flächen umschriebenes einfaches Vierflach, von dessen Kanten drei der ersten und eine der zweiten angehört. Es giebt dann immer (zugleich) sowohl ∞^1 solche Vierecke, als auch ∞^1 solche Vierflache.“

Das Zusammentreffen der beiden dualen Fälle ergiebt sich aus der zu sich selbst dualen Erzeugungsweise solcher Flächen. Nämlich: Wird von zwei projectiven Ebenenbüscheln auf zwei Geraden je eine Punktreihe ausgeschnitten, so stehen die von den projectiven Ebenenbüscheln und von den projectiven Punktreihen erzeugten beiden Flächen in der angegebenen Lagenbeziehung. Stz.

J. Stringham. A proof of the directro-focal property of the plane sections of a cone in non-euclidean space. Lond. M. S. Proc. **32,** 308-311.

Der Verf. bemerkt, es existire noch kein Beweis dafür, dass auch in der nichteuklidischen Geometrie der Schnitt eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Ebene ein Kegelschnitt ist. Er giebt daher einen Beweis, indem er zeigt, dass dieser Schnittcurve die bezügliche Focaleigenschaft zukommt, die die Ellipse definirt. Sfs.

Joh. Petersen. En Konstruktion af den vindskjaeve Hyperboloides Striktionslinie. Nyt Tidss. for Math. **10B,** 38-41.

Construction der Strictionslinie des einen Systems von Erzeugenden auf einem windschiefen Hyperboloid. Die Construction beruht auf dem folgenden Satz, welcher bewiesen wird: Die Strictionslinie des einen Systems der Erzeugenden hälftet das Stück der Erzeugenden, welches zwischen zwei bestimmten Ellipsen liegt, nämlich die Berührungscurven der umgeschriebenen Umdrehungscylinderflächen. V.

G. Gallucci. Géométrie du cercle dans le plan. Deuxième concours des „Nouvelles Annales“ pour 1899. Nouv. Ann. (3) **19,** 145-169.

E. Duporcq. Deuxième concours des „Nouvelles Annales“ pour 1899. Nouv. Ann. (3) **19,** 193-213.

Durch die stereographische Projection auf eine Kugel oder allgemeiner durch die Centralprojection der Punkte einer Ebene π auf eine Fläche zweiter Ordnung Σ aus einem Nabelpunkte derselben mit zu π paralleler Tangentialebene werden die Kreise in π eindeutig umkehrbar in die Ebenen und nach Belieben auch ebenso in die Punkte des Raumes abgebildet. Dieses schon vielfach zur Untersuchung der Kreissysteme verwendete Princip (vgl. z. B. Thomae, Zeitschr. f. Math. **29,** 1884) wird in den vorliegenden Arbeiten hauptsächlich für die quadratischen Kreisbüschel und -netze, die Abbilder der Kegeln und Flächen zweiter Klasse (bezw. Ordnung) verwandt. Besonders wichtig für diese Systeme sind die in Gerade oder Punkte ausartenden Kreise; in einem quadratischen Netze ist der Ort dieser Punkte (Basis des Netzes) eine bicirculare Curve vierter Ordnung, während jene Geraden einen Kegelschnitt (Directrix des Netzes) umhüllen; im quadratischen Büschel giebt es vier solcher Punkte und zwei solcher Geraden. Ein quadratischer Büschel ist nichts anderes als die Gesamtheit der Kreise, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, und die einen festen Kreis rechtwinklig schneiden; diese umhüllen eine bicirculare Curve vierter Ordnung.

In der ersten Arbeit werden die sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Flächen zweiter Klasse ergebenden Eigenschaften der Kreissysteme durch interessante specielle Fälle und Beispiele illustrirt und daran viele Aufgaben geknüpft. In der zweiten Arbeit wird von den allgemeinen Eigen-

schaften des Kreisnetzes beliebiger Ordnung ausgegangen; die Basis eines solchen ist im allgemeinen eine Curve $2m$-ter Ordnung, die durch die absoluten Punkte m-fach geht; seine Directrix eine Curve m-ter Klasse, die Brennpunkte dieser identisch mit den singulären Brennpunkten jener. In sehr einfacher Beziehung zu einander stehen die Basis und Directricen und linearen Büschel zweier reciproken Netze, d. h. solcher, deren Bildflächen in Bezug auf Σ polar reciprok sind. Aus den Eigenschaften der allgemeinen Netze fliessen dann unmittelbar die zahlreichen der quadratischen Netze, besonders der reciproken, wobei sich viele Eigenschaften der bicircularen Curve vierter Ordnung und der circularen Curve dritter Ordnung in einfacher Weise ergeben.

In beiden Abhandlungen wird das verwendete Uebertragungsprincip schliesslich zur Lösung des Apollonischen Berührungsproblems benutzt; dies führt in der ersten auf die von Fouché in den Nouv. Ann. (3) **11** (vergl. F. d. M. **24**, 535, 1892) angegebene, auch schon vorher bekannte Lösung, in der zweiten auf die Poncelet'sche. T.

A. Lagrange. Premier concours des „Nouvelles Annales“ pour 1900. Nouv. Ann. (3) **19**, 529-536.

Die erste Preisaufgabe der Nouvelles Annales für 1900 fordert einen Beweis der Behauptung, dass zwei dreipunktige Punktgruppen (A, B, C) und (A', B', C') so liegen können, dass die neun Verbindungsgeraden zwischen je zwei Punkten verschiedener Gruppen auf zweierlei in ihr angegebene Weisen eine Fläche zweiten Grades berühren. Ferner wird Auskunft darüber verlangt, ob beide Punktgruppen jene Fläche zweiten Grades eindeutig bestimmen, oder ob sie einer Bedingung genügen müssen und dann unendlich viele solcher Flächen liefern. Sollte dies nicht beantwortet werden können, so wird doch eine Antwort für den Sonderfall verlangt, indem die Verbindungsstrahlen AA', BB', CC' durch einen Punkt gehen. A. Lagrange giebt den verlangten Beweis, zeigt, dass eine Gruppe von neun solchen Verbindungsgeraden unendlich viele nach sich zieht, und dass insbesondere diese stets vorhanden sind, wenn AA', BB', CC' durch einen Punkt gehen. Js.

A. Sucharda. Einige Betrachtungen über den Axencomplex der Flächen zweiter Ordnung. Časopis **29**, 100-108 (Böhmisch).

Mit Hülfe der synthetischen Geometrie werden die folgenden Fragen beantwortet: 1. Welches ist der geometrische Ort der Pole der Axen eines Complexkegels zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in einer Hauptebene liegt? 2. Welches ist der geometrische Ort der Fusspunkte des degenerirten Complexkegels der vorigen Aufgabe? 3. Welches ist der geometrische Ort der Axen der Kegelschnitte, längs deren eine beliebige F^2 getroffen wird von einer Ebene, welche um ihre Schnittgerade mit einer Hauptebene rotirt? Sda.

V. Havlíček. **Ebene Schnitte der Rotationsflächen zweiter Ordnung.** Časopis **29**, 81-85 (Böhmisch).

Elementarer Beweis des Satzes, dass eine Fläche, welche durch Rotation eines Kegelschnittes um eine seiner Axen entsteht, von einer beliebigen Ebene in einem Kegelschnitte getroffen wird. Sda.

Kilbinger. **Sphère et ellipsoïde; sphères concentriques et ellipsoïdes concentriques homothétiques.** Ens. math. **2**, 196-200.

Fortsetzung zu dem Artikel „Cercle et ellipse" (F. d. M. **30**, 481, 1899); das Ellipsoid als der Kugel affin. Lp.

M. Stuyvaert. **Note sur les cubiques gauches.** Belg. Bull. Sciences 1900, 820-846.

F. Deruyts. **Rapport.** Ibid. 790-791.

Analytischer Beweis eines Reye'schen Satzes (Annali di Mat. (2) **2**, 130); Klasse der Enveloppe der Ebenen, welche zwei Curven dritter Ordnung oder eine der sechsten Ordnung in sechs Punkten schneiden: Eigenschaften der Sehnen einer kubischen Raumcurve, die von einem Punkte der Curve unter rechtem Winkel erscheinen; Eigenschaften der Normalebenen zu den kubischen Curven; neue Beweise von Eigenschaften der Netze von kubischen Raumcurven. Mn. (Lp.)

M. Stuyvaert. **Le théorème de Chasles relatif aux cubiques gauches.** Mathesis (2) **10**, 181-183.

Variante der Beweise von Staudt's und Schröter's für den Satz: Der Schnittpunkt dreier Schmiegungsebenen einer kubischen Raumcurve liegt in der Ebene der drei Osculationspunkte. Mn. (Lp.)

Th F. Holgate. **Note additional to a former paper: On certain ruled surfaces of the fourth order.** American J. **22**, 27-30.

Die Hauptarbeit ist in F. d. M. **25**, 1893-94, 1264 angezeigt. die Ergänzung bezieht sich auf diejenige Fläche, deren Doppelgeraden imaginär sind, weil bei synthetischer Behandlung dieser Fall von dem der reellen Doppelgeraden getrennt werden muss. R. M.

C. Rosati. **Sulle superficie di Veronese e di Steiner.** Torino Atti **35**, 12-19.

„Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Kegel-

schnitte, die auf einer Steiner'schen Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse liegen, ist wiederum eine solche Fläche", so lautet der schöne Lie'sche Satz (vgl. F. d. M. **10**, 1878, 531), welcher als Ausgangspunkt der Untersuchungen des Verf. dient. Rosati fand ferner: „Der Ort der Pole der Sehnen einer Raumcurve vierter Ordnung, welche einer Steiner'schen Fläche angehört, in Bezug auf die Kegelschnitte der Fläche, welche durch ihre Durchschnittspunkte gehen, ist eine zweite Steiner'sche Fläche; wenn aber die Raumcurve in zwei Kegelschnitte zerfällt, so besteht dieser Ort aus den Ebenen derselben und aus einer Fläche zweiter Ordnung; wenn ferner die Raumcurve eine asymptotische Curve ist, so fällt die zweite Steiner'sche Fläche mit der ersten zusammen". Andere ähnliche Sätze erhält man, wenn die betrachtete Raumcurve andere besondere Lagen annimmt; viele derselben (wie auch die vorigen) umfassen als besondere Fälle andere, welche für die Regelflächen dritter Ordnung ihre Geltung haben. Alle werden vom Verf. durch eine geschickte Projection derjenigen Mannigfaltigkeit vierter Ordnung des fünf-dimensionalen Raumes erhalten, welche zuerst Veronese erforschte (vgl. F. d. M. **16**, 733, 1884), und welche der Verf. infolge dessen die Veronese'sche Fläche nennt. La.

F. W. Williams. Geometry on ruled quartic surfaces. Amer. Ac. Proc. **36**, 19-60.

Der Verf. verweist auf frühere Untersuchungen von Cayley (Papers **5**), Story (in seinen Vorlesungen) und Ferry (Arch. for Math. og Nat. **21**) über die Geometrie auf Regelflächen zweiter und dritter Ordnung und reiht hieran seine eigenen Untersuchungen über Regelflächen vierter Ordnung. Es sei $S^{(\nu)}$ eine Fläche ν-ter Ordnung, $\Sigma^{(\mu)}$ eine Regelfläche μ-ter Ordnung, $C^{(a)}$ eine Curve a-ter Ordnung auf derselben, endlich a_α eine Curve a-ter Ordnung auf $\Sigma^{(\mu)}$, welche jede Erzeugende derselben in α Punkten schneidet; (a_α, b_β) die Zahl der Schnittpunkte der Curven a_α und b_β auf $\Sigma^{(\mu)}$. Der Verf. teilt nun 3 Sätze von Story mit.

1. Ist α die Zahl der Punkte, welche C^a mit einer beliebigen Erzeugenden gemein hat, so hat C^a mit jeder Erzeugenden α Punkte gemein. Hierfür existirt kein allgemeiner Beweis; der Satz muss für jede Art der Regelflächen vierter Ordnung später besonders geführt werden.

2. Ist a_α der vollständige Schnitt von $\Sigma^{(\mu)}$, und $S^{(\nu)}$, und hat b_β auf $\Sigma^{(\mu)}$ keinen Bestandteil mit a_α gemein, so ist

$$(a_\alpha, b_\beta) = a\beta + b\alpha - \mu\alpha\beta.$$

3. Ist a_α irreducibel, und haben $\Sigma^{(\mu)}$ und $S^{(N)}$ die Curven a_α und $a'_{\alpha'}$ als vollständigen Schnitt, und gilt die vorstehende Formel für jeden irreducibeln Bestandteil von $a'_{\alpha'}$ und b_β, so gilt sie auch für a_α und b_β.

Es wird nun der Satz 1. für alle Arten von Regelflächen vierter Ordnung bewiesen und die Zahl der gemeinsamen Punkte von Geraden, Kegelschnitten, Ebenen und räumlichen Curven dritter und vierter Ordnung auf denselben ermittelt. Die betrachteten Arten von Regelflächen

vierter Ordnung sind folgende: a) 1 dreifache, 1 einfache Leitgerade (die auch zusammenfallen können), b) 1 dreifache Leitgerade, c) zwei doppelte Leitgeraden, 1 Doppelerzeugende (erstere können auch zusammenfallen), d) zwei doppelte Leitgeraden (die auch zusammenfallen können), e) 1 doppelter Leitkegelschnitt, doppelte Leitgerade, denselben treffend, f) 1 doppelte Leitraumcurve dritter Ordnung (von jeder Erzeugenden zweimal geschnitten), 1 Leitgerade, g) 1 doppelte Leitraumcurve dritter Ordnung (von jeder Erzeugenden zweimal geschnitten), h) abwickelbare Flächen vierter Ordnung, i) Kegel vierter Ordnung. Hierbei wird das Vorkommen der Raumcurve vierter Ordnung auf den verschiedenen Kegeln vierter Ordnung in einer Tabelle dargestellt.

Wö.

D. Lo Piano. **Intorno ad una superficie dell' ordine $n+2$ dotata di una curva doppia dell' ordine $\frac{1}{2}n(n-1)+1$.** Napoli Rend. (3) **6,** 130-135.

Stehen zwei Strahlenbündel (S), (S') in einer Cremona'schen Verwandtschaft n-ter Ordnung, und legt man durch einen beliebig gewählten festen Punkt O alle diejenigen Geraden, welche gleichzeitig entsprechende Strahlen der Bündel treffen, so ist die behandelte Fläche der Ort des vierten, dem Punkte O in Bezug auf zwei solche Treffpunkte zugeordneten harmonischen Punktes. Die Fläche ist von der Ordnung $n+2$, enthält eine durch O gehende Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)+1$; zu ihren einfachen Geraden gehören OS und OS', und die von den Schnittpunkten einander treffender zugeordneter Strahlen erzeugte Raumcurve $(n+2)$-ter Ordnung liegt einfach auf der Fläche. Die Ebene $\varepsilon=[OSS']$ ist eine $2n$-fache Tangentenebene, deren Berührungspunkte zu je n auf den Geraden OS und OS' liegen, und die die Fläche ausserdem in n Geraden schneidet; jede dieser n Geraden ist der vierte harmonische Strahl zu einem der n in ε gelegenen Paare zugeordneter Strahlen und der Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit O. Es werden ferner auf der Fläche zwei homaloidische Netze von Raumcurven $(n+1)$-ter Ordnung nachgewiesen, unter denen sich auch die ebenen Curven befinden, die von den Ebenen durch OS und denen durch OS' ausgeschnitten werden. Die Fläche lässt sich, wie weiter gezeigt wird, eindeutig derart auf eine Ebene abbilden, dass das eine oder andere der zwei homaloidischen Curvennetze in die Geraden der Bildebene übergeht. Zum Schluss werden einige Specialfälle besprochen. Im Falle $n=1$ ergiebt sich eine Regelfläche dritter Ordnung, die die von den collinearen Bündeln erzeugte Raumcurve dritter Ordnung einfach enthält; die Doppelsecante aus O an diese ist die Doppelgerade der Fläche. Der Fall $n=2$ führt zu einer F^4 mit Doppelkegelschnitt, aber nicht zu der allgemeinsten dieser Art. Es wird weiter noch $n=3, 4, 5$ discutirt.

T.

A. Jarkovski. Bestimmung der Berührungspunkte der Ebenen mit den Regelflächen (Weiterentwickelung des Satzes von Chasles). St. Petersb. 19 S. 8°. Hrsg. vom Institut der Strassenbauingenieure. (Russisch.)

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

H. W. Richmond. The figure formed from six points in space of four dimensions. Math. Ann. 53, 161-176.

Diese Arbeit enthält einen neuen Beitrag zu der Methode, complicirtere Eigenschaften und Beziehungen ebener und räumlicher Gebilde aus einfacheren Sätzen über vierdimensionale Gebilde dadurch abzuleiten, dass man die letzteren in den dreidimensionalen Raum, eventuell weiter in eine Ebene projicirt, bezw. mit einem R_3 oder einer Ebene zum Schnitt bringt, eine Methode, die zuerst in umfassender Weise von Veronese verwendet wurde und lediglich eine Erweiterung des Verfahrens ist, durch welches Sätze der ebenen aus solchen der Raumgeometrie gewonnen werden. Da n die kleinste Anzahl von Punkten ist, die im R_{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Figur bilden können, so können speciell die Eigenschaften einer Gruppe von 6 Punkten und der durch sie bestimmten 15 Geraden in dem durch sie bestimmten R_5, aber auch schon in dem durch 5 von ihnen bestimmten R_4 studirt werden. Der Verf. betrachtet zunächst die von Veronese zusammengestellten und ergänzten Eigenschaften des Pascal'schen Sechsecks und stellt im Zusammenhange mit einer Oberfläche dritter Ordnung mit Knotenpunkt ($\Sigma x_r^3 = 0$) ein System von Gleichungen auf ($x_r + x_s = 0$; $r, s = 1, 2, \dots, 6$), aus welchem alle Veronese'schen Resultate sich leicht ableiten lassen. Sodann wird gezeigt, dass die 15 Doppeltangenten einer ebenen C_4, in Hesse'schen Symbolen ausgedrückt durch die aus den Buchstaben $a, b, \dots, f$ gebildeten Paare, alle Eigenschaften der 15 Linien eines Pascal'schen Sechsecks aufweisen. Hierbei erscheinen diese Linien als Projectionen einer räumlichen Configuration von 15 Geraden, die zu dreien in 15 Ebenen liegen und den obigen Gleichungen nebst der Gleichung $\Sigma x_r = 0$ genügen. — Nunmehr werden die obigen Gleichungen im R_4 interpretirt; sie stellen 15 Ebenen dar, die zu dreien in 15 R_3 liegen. Diese Ebenen sind die Schnitte von 6 R_3 im R_4. Durch den Schnitt der ganzen Figur mit einem R_3 entsteht wieder die oben erwähnte räumliche Configuration. Andererseits kann die vierdimensionale Figur auf einen R_3 projicirt werden, und diese Projection liefert durch Schnitt mit einer Ebene Liniengruppen, die wieder allgemeinere Eigenschaften besitzen, als die durch blosse Projection aus dem R_3 gewonnenen Gruppen. Zuletzt wird in reciproker Weise eine Gruppe von 6 beliebigen Punkten im R_4 (Hexastigma) als Ausgangspunkt gewählt. Dieselbe bestimmt 15 Linien, 20 Ebenen und 15 R_3, ferner 15 Schnittpunkte der Kanten mit den gegenüberliegenden Räumen („Kreuzungspunkte"). Diese Punkte liegen zu dreien auf 15 „Transversalen". Durch die Projection der ganzen Figur gelangt

man wieder zu den im ersten Abschnitt zusammengestellten Sätzen über das Pascal'sche Sechseck. Schg.

S. L. van Oss. Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen. Amst. Verh. 7, No. 1, 1-18.

Bereits in seiner Inaugural-Dissertation (1894) hatte der Verf. die Bewegungsgruppen der vier einfacheren unter den sechs regelmässigen vierdimensionalen Körpern abgeleitet, aber für das 600-Zell (dem das 120-Zell reciprok ist) nur die Resultate angegeben, mit Rücksicht auf die grosse Complicirtheit der zur Untersuchung erforderlichen Figuren. In der vorliegenden Abhandlung wird die Begründung dieser Resultate für das 600-Zell nachgeholt, unter Hinzufügung von 6 Projectionstafeln für diesen Körper, von denen zwei zur Ableitung weiterer Tafeln für das 120-Zell benutzt worden sind, die für das Verständnis dieses Körpers ausreichen. Vorausgeschickt sind Bemerkungen über die Construction der Projectionen des 600-Zells (im Anschluss an Puchta), topographische Resultate aus diesen Projectionen, ihr Zusammenhang mit den von Schoute behandelten Projectionen, endlich über die Abweichungen von der tetraedrischen Symmetrie, welche die vom Ref. bei der Herstellung des entsprechenden Modells benutzten inneren Drahtkörper aufweisen.

Schg.

P. H. Schoute. Over de meetkundige plaats der middelpunten van hyperspherische kromming bij de normaalkromme der n-dimensionale ruimte. Amst. Ak. Versl. 8, 622-629.

P. H. Schoute. Over rationale ruimtekrommen. Amst. Ak. Versl. 8, 548-555.

P. H. Schoute. De stelling van Joachimsthal bij de normaalkrommen. Amst. Ak. Versl. 8, 744-751.

A. Boole Stott. On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids. Amst. Akad. Verh. 7, No. 3, 21 S.

Referat über diese Arbeit und die drei voranstehenden in Abschnitt IX, Kap. 3, E.

E. Abzählende Geometrie.

H. G. Zeuthen. Om en Art antalgeometriske Beviser. Nyt Tidss. for Math. 10 B, 49-51 (1899).

Beispiele von anzahlgeometrischen Beweisen, welche darauf gegründet sind, dass bewiesen wird, eine Grösse sei constant, weil die Gleichung,

von der sie eine Wurzel sein muss, keine Wurzeln hat. Um zu beweisen, dass eine Grösse constant ist, genügt es, wenn die Grösse sonst algebraisch mittels gegebener Grössen ausgedrückt werden kann, zu zeigen, dass die Grösse einen bestimmten Wert, 0 oder ∞, nicht annehmen kann. Dieses wird angewandt, um zu beweisen, dass das Doppelverhältnis der vier Geraden, welche einen variablen Punkt eines Kegelschnittes mit vier festen Punkten des Kegelschnittes verbinden, constant ist, oder dass das Doppelverhältnis der vier Tangenten, welche von einem Punkte einer Curve dritter Ordnung an die Curve selbst gezogen werden können, constant ist. In beiden Fällen kann das Doppelverhältnis nicht Null werden. V.

J. Schröder. Bemerkung über die Schubert'sche Function $\psi(u_0, u_1\, u_2, \cdots, u_n)$. Hamb. Mitt. **3**, 382-387 (1899).

In Math. Ann. **45,** 177 hat H. Schubert die für seine anzahlgeometrischen Untersuchungen grundlegende Function ψ definirt und durch geometrische Ueberlegungen gefunden, dass stets $\psi(0, 1, 2, \ldots, n) = 1$ ist. Diesen Satz aus der Definition von ψ arithmetisch zu beweisen, ist, wie Schubert auch in dem Selbstreferate (F. d. M. **25,** 1038, 1894) bemerkt, bis jetzt noch nicht gelungen. Der Verf. des vorliegenden Artikels führt den ausstehenden arithmetischen Beweis auf den Beweis eines anderen, allgemeineren Theorems zurück, ohne dass es ihm bis jetzt völlig gelungen sei, das letztere zu beweisen. Lp.

L. Berzolari. Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. Lomb. Ist. Rend. (2) **33,** 664-674, 809-821.

Das Problem, dem diese beiden Noten gewidmet sind, lautet wie folgt: „Gegeben eine oder mehrere algebraische Raumcurven; zu finden die Zahl der Kegelschnitte, welche dieselben in α Punkten treffen, durch $\beta\,(\leq 3)$ Punkte gehen und γ Ebenen berühren, vorausgesetzt, dass $\alpha + 2\beta + \gamma = 8$ sei." Durch eine passende Anwendung des Princips der Erhaltung der Anzahl gelangt der Verf. dazu, es in einer grossen Anzahl besonderer Fälle aufzulösen. Diese Anwendung beruht auf der Ersetzung allgemeiner Curven durch zerfallende Curven derselben Ordnung und desselben Geschlechtes; über die Berechtigung dieser Methode hat man Zweifel ausgesprochen, und zur Prüfung derselben hat die dänische Akademie der Wissenschaften eine sehr passende Preisaufgabe für das Jahr 1902 gestellt. Der Verf. hat diese Frage nicht einmal berührt und begnügt sich damit, den Wortlaut zu geben, zu welchem er durch jenen Weg gelangt. In der ersten Note sind die Aussagen in 25 Sätzen enthalten, zu denen der Verf. interessante Erläuterungen giebt und Andeutungen macht; in der zweiten füllen die Aussagen nicht weniger als 57 Sätze. Die Natur der Arbeit erlaubt keine längere Besprechung. La.

C. SEGRE. **Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_2$, 253-260.

Durch den vorliegenden Aufsatz giebt der Verf. einen wichtigen Beitrag zur abzählenden Geometrie der höheren Räume, indem er der Gedankenrichtung folgt, deren Ursprung man besonders H. Schubert verdankt.

Als Ausgangspunkt wählt er eine auf zwei correlative Räume bezügliche Formel, welche dieser Gelehrte aufgestellt (F. d. M. **23**, 701, 1891 und **28**, 493, 1897), bis jetzt aber noch nicht bewiesen hat. Indem der Verf. dieselbe specialisirt und passend interpretirt, gelangt er zu dem folgenden Satze: „Die zerfallenden Reciprocitäten von der Species h zwischen zwei n-dimensionalen Räumen bilden eine Mannigfaltigkeit, deren Stufe n^2+2n-h^2 und deren Ordnung

$$\frac{(2h)_h\,(2h+1)_h\cdots(n+h)_h}{(h)_h\,(h+1)_h\cdots(n)_h}$$

ist," wo, wie gewöhnlich

$$(n)_\nu=\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}.$$

Die angeführte Formel Schubert's führt ferner auf das Theorem: „Schreibt man auf, dass eine Matrix mit $m+1$ Colonnen und $n+1$ Zeilen den Rang $q+1$ hat (d. h. dass alle ihre Determinanten $(q+2)$-ter Ordnung Null sind, aber nicht alle $(q+1)$-ter), so setzt man unter ihren Elementen ein Gleichungssystem fest, welches mit $(m-q)\,(n-q)$ Gleichungen äquivalent ist, und dessen Ordnung wie folgt ausgedrückt ist:

$$\frac{(m+n-2q)_h\,(m+n-2q+1)_h\cdots(m+n-q)_h}{(h)_h\,(h+1)_h\cdots(n)_h}.\text{“}$$

Danach wendet der Verf. eine andere allgemeine Formel an, welche Schubert aufgestellt (F. d. M. **23**, 702, 1891) und dann bewiesen (F. d. M. **25**, 1038, 1893-94) hat. So erhält er den dem vorigen analogen Satz: „Schreibt man auf, dass eine symmetrische Determinante die Ordnung $n+1$ und den Rang $n-h+1$ hat, so setzt man zwischen ihren Elementen ein Gleichungssystem fest, welches mit $\frac{1}{2}h\,(h+1)$ Gleichungen äquivalent ist und von der Ordnung:

$$\frac{(n+1)_h\,(n+3)_h\cdots(n+h)_h}{(h)_h\,(h+2)_h\cdots(2h-1)_h}\ \text{(wenn } h \text{ ungerade)},$$

$$\frac{(n+2)_{h+1}\,(n+4)_{h+1}\cdots(n+h)_{h+1}}{(h+1)_{h+1}\,(h+2)_{h+1}\cdots(2h-1)_{h+1}}\ \text{(wenn } h \text{ gerade)}.$$

Alle diese algebraischen Sätze sind zahlreicher geometrischer Anwendungen fähig; eine Fülle derselben wird vom Verf. am Schluss seiner Arbeit angemerkt. Dadurch werden viele Berührungspunkte zwischen der vorliegenden Arbeit und anderen in klares Licht gesetzt. La.

———

A. Tanturri. Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica. Annali di Mat. (3) **4**, 67-121.

Bedienen wir uns, dem Beispiel des Verf. folgend, der Schubert'schen Bezeichnungen, so bedeutet das Symbol $[k]$ einen k-dimensionalen linearen Raum. Man betrachte nun in $[n]$ eine Curve Γ der Ordnung m und des Geschlechtes p und die $[k]$ von $[n]$, welche Γ in i Punkten schneiden; ihre Zahl ist endlich, unendlich oder Null, je nachdem $(k+1)(n-k)$ gleich, grösser oder kleiner als $i(n-k+1)$ ist. Nach Ausschluss der dritten Annahme als bedeutungslos beschäftigt sich der Verf. zuerst mit der ersten, welche auf die folgende Fundamentalaufgabe führt: „Man soll die Zahl der eine Curve von $[n]$ i-schneidenden $[k]$ bestimmen, wo $i = \frac{(k+1)(n-k)}{n-k-1}$." Wenn $i = k+2$ oder $= 2(k+1)$ ist, so wurde dieselbe schon von Castelnuovo aufgelöst (vgl. F. d. M. **21**, 674, 1889). Der Verf. setzt eine Methode auseinander, um jenes Problem für rationale und elliptische Curven aufzulösen, nachdem er die Voraussetzung gemacht hat, dass die gesuchte Zahl $F_p^m(k, q)$ $(q = i-k-1)$ nur von m und p abhängig sei, nicht aber von der Structur der betrachteten Curve. Die in Rede stehende Methode ist im Grunde eine Anwendung des Princips der Erhaltung der Anzahl, weil sie als Grundsatz die Substitution der gegebenen Curve für ein zusammenhängendes System von m Geraden hat, welche $p+m-1$ einfache Durchschnitte besitzen. Unter Annahme der Rechtfertigung dieser Substitution (vgl. das Referat S. 549) zerlegt sich die Lösung der Fundamentalaufgabe in die folgenden drei: 1. Die Gruppen zusammenzusetzen, deren jede $k+1+q$ der Geraden enthält, welche die gegebene Curve bilden. 2. Die $[k]$ zu berechnen, deren jeder in i verschiedenen Punkten die Geraden einer Gruppe treffen. 3. Die Summe der so entstehenden Zahlen zu bilden.

Die erste dieser Fragen ist von der folgenden nicht verschieden: die ganzen nicht-negativen Wertsysteme von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ zu finden, welche der Gleichung $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + q\alpha_q = i$ genügen. Die zweite besteht in der Bestimmung dreier Functionen:

$$V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q),\ V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q),\ L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q).$$

Nun findet der Verf. für die beiden ersten die folgenden Werte:

$$V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_q)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_q!} \binom{m-i+1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}$$

$$= \binom{\alpha_1}{\alpha_1}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_q}{\alpha_q}\binom{m-i+1}{\alpha_1+\dots+\alpha_q},$$

$$V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = \binom{\alpha_1}{\alpha_1}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\cdots\binom{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_q}{\alpha_q}$$

$$\times \frac{m}{\alpha_1+\dots+\alpha_q}\binom{m-i+1}{\alpha_1+\dots+\alpha_q-1}.$$

Die Bestimmung von $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ ist eine Frage, welche durch Pieri in jedem besonderen numerischen Falle schon aufgelöst wurde (F. d. M. **25**, 1038, 1893-94; **27**, 453, 1896); allgemein ist sie noch nicht aufgelöst worden. Der Verf. aber beleuchtet sie durch neue Betrachtungen; als Folgerung derselben mag die Möglichkeit der Bestimmung von L angeführt werden in den Fällen, wo

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_{i-1} = 0,\ \alpha_i = 1,\ \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{n-1} = 0.$$

An anderen Bemerkungen, welche für die Bestimmung von $F_p^m(k, q)$ nützlich werden können, wie an einigen besonderen Anwendungen der allgemeinen Methode, müssen wir der Kürze wegen vorübergehen.

Was aber nicht übergangen werden darf, ist, dass der Verf. im zweiten Kapitel seiner Abhandlung sich mit den $\infty^{\frac{k+1}{q}}$ $[k]$ beschäftigt, welche eine C_p^m des $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ $(k+q)$-mal schneiden. Sie bilden eine Mannigfaltigkeit der Ordnung $A_p^m(k, q)$, von der die gegebene Curve eine Curve der Vielfachheit $B_p^m(k, q)$ ist; die Werte dieser zwei neuen Functionen werden vom Verf. der Reihe nach für $q = 1, 2, 3$ gegeben.

Mit der Aufzählung weiterer noch zu lösender Aufgaben schliesst die inhaltreiche Abhandlung. La.

A. Tanturri. Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di ∞^1 spazî. Torino Atti **35**, 427-442.

Der Verf. fährt in seinen Untersuchungen fort und wendet dieselben Methoden an, von denen im vorigen Referate die Rede war. Die Hauptfrage, welche er sich gestellt hat, kann man wie folgt aussprechen: „Wie viele $[q-1]$ von $[q]$ enthalten die grösstmögliche Zahl der $[k]$, welche eine algebraische Mannigfaltigkeit von $\infty^1 [k]$ erzeugen?“ Es ist ein Problem, welches von Castelnuovo (F. d. M. **21**, 674, 1882) im Falle $k = 1$ aufgelöst wurde, und welches im allgemeinen wie folgt präcisirt werden kann: „Gegeben die Zahlen $k (>0)$ und $q (>1)$; wie viele $[kq-1]$ enthalten q unter den $\infty^1 [k]$, welche eine algebraische Mannigfaltigkeit der Ordnung m und des Geschlechtes p erzeugen?“ Bezeichnet man durch $\Phi_p^m(k, q)$ die gesuchte Zahl, so ergiebt sich zuerst:

$$\Phi_0^m(k, q) = \binom{m-kq+k}{q},\quad \Phi_1^m(k, q) = \frac{m}{q}\binom{m-kq-1}{q-1}.$$

Ist $p > 1$, so findet Tanturri zwei Reductionsformeln, die eine für die Ordnung, die andere für das Geschlecht. Die eine ist:

$$\Phi_p^m(k, q) = \Phi_p^{m-1}(k, q) + \Phi_p^{m-k-1}(k, q-1),\ \text{wenn } q > 2,$$

$$\Phi_p^m(k, 2) = \Phi_p^{m-1}(k, 2) + m - k - 1;$$

die andere ist:

$$\Phi_p^m(k, q) = \Phi_{p-1}^{m-k-1}(k, q) + (k+1)\Phi_{p-1}^{m-2k-1}(k, q-1).$$

Combinirt man diese Gleichungen, so erhält man schliesslich für die gesuchte Zahl den folgenden Ausdruck:

$$\Phi_p^m(k, q) = \sum_{i=0}^{i=q} k^i \binom{m-k(q-1+p)-i}{q-i}\binom{p}{i}.$$

La.

F. Severi. I gruppi neutri con elementi multipli, in un' involuzione sopra un ente razionale. Rom. Acc. L. Rend. (5) 9_1, 379-381.

Es ist allgemein bekannt, dass man als Bild einer Involution I_r^n n-ter Ordnung und r-ter Stufe das Punktgruppensystem wählen kann, welches auf einer rationalen Curve C n-ter Ordnung des Raumes $[r]$ durch die $[r-1]$ desselben ausgeschnitten wird. Dies vorausgesetzt, ist das Problem, „die Zahl der Gruppen von I_r^n zu finden, welche aus Punkten der Vielfachheit $\nu_i\,(\geqq 1, \nu_1 > \nu_2 > \cdots, \nu_t)$ bestehen und die neutralen q-ter Art sind", mit dem folgenden gleichwertig: „wie gross ist die Zahl der $[k]$ von $[r]$, (wo $k = \sum_{i=0}^{i=t} \nu_i - (q+1)$ ist), welche mit $C\,t$ ν_i-punktige $(i = 1, \ldots, t)$ Berührungen haben?" Wenn man nun annimmt, dass

$$(r-k)\,\Sigma\nu_i - t = (k+1)(r-k),\; n \geqq \Sigma\nu_i + r - k - 1$$

sei, so findet man für die gesuchte Zahl den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\nu_1\,\nu_2 \ldots \nu_l}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_l!}\, l!\binom{t}{l}\frac{\binom{n-k-1}{r-k}\binom{n-k-2}{r-k}\cdots\binom{n-k-q+1}{r-k}\binom{n-k-q}{r-k}}{\binom{r-k-q-1}{r-k}\binom{r-k-q-2}{r-k}\cdots\binom{r-k+1}{r-k}\binom{r-k}{r-k}},$$

wo l die Zahl der ν bedeutet, welche von 1 verschieden sind, α_1 die Zahl derjenigen, welche gleich ν_1 sind, u. s. w. Sind alle $\nu_i = 1$, so reducirt sich dieser Ausdruck auf einen, welchen man W. Franz Meyer verdankt („Apolarität und rationale Curven", Tübingen 1883, S. 363). Die allgemeine Formel wird vom Verf. durch eine geistreiche Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips erhalten. La.

F. Severi. Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) 9_2, 321-326.

Nach Schubert bezeichnet man mit $[k]$ einen linearen Raum k-ter Dimension und mit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ die Grundgebilde, welche aus allen $[k]$ besteht, die mit einem $[a_n]$ einen $[r]$ gemeinschaftlich haben (für $r = 0, 1, \ldots, k-1$) und ferner in einem $[a_k]$ liegen, vorausgesetzt, dass $0 \leqq a_0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_k \leqq r$, dass r die Dimension des ganzen Ope-

rationsraumes, und dass $[a_i]$ in $[a_{i+1}]$ liege. Die Bedingung, dass ein $[k]$ einem Gebilde $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ angehöre, hat die Dimension

$$d = (k+1)r - \frac{k(k+1)}{2} - \sum_0^k a_i$$

und wird mit $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ bezeichnet. Dies vorausgesetzt, beweist der Verf. durch die vollkommene Induction den folgenden sehr allgemeinen und wichtigen Satz. „Wenn ein algebraisches System $\infty^{(k+1)(r-k)}$, welches aus Paaren S, S' von $[k]$ besteht, eine endliche Zahl von Coincidenzen enthält, so ist ihre Zahl:

$$\Sigma (a_0, a_1, \ldots, a_k)(r - a_k, r - a_{k-1}, \ldots, r - a_0)',$$

wo das Symbol $(a_0, a_1, \ldots, a_k)(r - a_k, r - a_{k-1}, \ldots, r - a_0)'$ die Zahl der Paare bezeichnet, in welchen S dem Gebilde $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ und S' dem conjugirten Gebilde $(r - a_k, r - a_{k-1}, \ldots, r - a_0)$ angehört, und die Summe auf alle möglichen Producte obiger Art ausgedehnt wird."

Die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ sind bekannt; über den ersten vergleiche man die „Memorie di geometria" di E. Caporali und zwei Arbeiten von M. Pieri (F. d. M. **19**, 668, 1887 und **23**, 700, 1891): und über den zweiten einen Aufsatz des letzteren (F. d. M. **22**, 687, 1890). Zum Schlusse bemerkt der Verf., dass aus dem vorigen Satze eine Formel Schubert's (vgl. F. d. M. **18**, 631, 1886) ableitbar ist.

La.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene. Berlin: Hans Th. Hoffmann. 350 S. 8° mit 85 Fig.

Referent begrüsst mit besonderer Freude das vorliegende Werk, dessen Verf., ein langjähriger Docent der Charlottenburger Hochschule, es verstanden hat, in seinem Buche den frischen lebendigen Stil des mündlichen Vortrages festzuhalten; die Probleme werden nicht bloss gelöst, sondern auch genau die Schwierigkeiten, die Klippen hervorgehoben, an denen der Anfänger scheitern kann. Die Elemente sind musterhaft klar und breit dargestellt. Nirgends aber wird es dem Leser bequem gemacht; auch bei den einfachsten Dingen werden die Beziehungen zu tiefer liegenden Fragen aufgedeckt und angeregt. Jedem Paragraphen sind einige Uebungsaufgaben angehängt; ihre Lösung erfordert nicht bloss genaues Verständnis, sondern meist auch längere algebraische oder numerische Rechnungen. Im Anhang sind die Lösungen in knapper Form mitgeteilt.

Im ersten Abschnitt (§ 1-5) finden wir zunächst die Geometrie der geraden Linie und des Strahlenbüschels; die ganz ausführliche Behandlung des Doppelverhältnisses und der linearen Substitutionen wird alsdann für perspective und projective sowie involutorische Beziehungen verwertet. Dann erst kommen die Coordinatensysteme, die Transformationsformeln und die Grundaufgaben der analytischen Geometrie zur Erledigung. Der zweite Abschnitt (§ 6-11) erläutert die Beziehungen zwischen Curve und Gleichung ausführlich an gut gewählten Beispielen, die historisch oder technisch interessant sind; es folgt die Parameter-Darstellung, die Einteilung der Curven. An die verschiedenen Formen der Gleichung der

geraden Linie knüpft sich die Einführung der Liniencoordinaten; die Methode der abgekürzten Bezeichnung wird unter anderem auf die Configuration von perspectiven Dreiecken angewandt. Der dritte Abschnitt (§ 12-18) behandelt Kreis und Kreisbüschel, die wichtigsten speciellen Eigenschaften und Erzeugungsarten der Kegelschnitte, die Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, ihre Ausnahmefälle und einige numerische Beispiele. Der vierte Abschnitt endlich (§ 19-26) giebt eine Reihe von Ergänzungen. Er beginnt mit dem Transversalensatz und den Sätzen von Pascal und Brianchon; nach einer Darstellung der Determinantenlehre folgt die Einführung homogener Coordinaten, die Theorie von Pol und Polare, und zwar auf quadratische und bilineare Formen gestützt, die projectiven Erzeugungen der Kegelschnitte, Kegelschnittbüschel und Schar, Abbildungen und geometrische Verwandtschaften. R. M.

W. Killing. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Erster Teil: Die ebene Geometrie. Mit 50 Figuren im Text. Paderborn: Ferd. Schöningh. XIII u. 220 S. gr. 8°.

Der Verf. giebt in seinem Lehrbuche, dessen erster Teil zur Besprechung vorliegt, den zweiten Teil seiner Vorlesungen über analytische Geometrie an der Akademie zu Münster, setzt somit die Bekanntschaft mit den cartesischen Coordinaten und einige Uebung in ihrem Gebrauche voraus. Von analytischen Vorkenntnissen beansprucht er die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Determinanten; dagegen verzichtet er auf die Darstellung derjenigen Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung, bei deren Herleitung die Infinitesimalrechnung nicht entbehrt werden kann. Weil es so viele Fälle giebt, bei denen die mit den rechtwinkligen Coordinaten vorzunehmenden Operationen erst in ihrer Bedeutung zu würdigen sind, wenn man die Beziehung zu allgemeinen projectiven Untersuchungen kennt, befürwortet Killing eine recht frühe Einführung der homogenen Coordinaten. Mit den Gundelfinger'schen Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte verglichen (F. d. M. **26**, 633ff., 1895), die doppelt so stark sind wie der vorliegende Band, ist das gegenwärtige Werk in seinem systematischen, vorsichtig fortschreitenden Aufbau zur ersten Einführung besser geeignet. Die zahlreichen Uebungen sind ebenfalls elementar gehalten und passen sehr gut für Anfänger, die sich in das Gebiet einarbeiten wollen.

Zur Uebersicht des Inhaltes setzen wir die Ueberschriften der einzelnen Paragraphen her. 1. Theorie der Doppelverhältnisse. 2. Das Coordinatendreieck. 3. Die gerade Linie. 4. Die auf eine gerade Linie gefällten Senkrechten. 5. Die allgemeinen trimetrischen Coordinaten in der Ebene. 6. Die Verhältnisse der Coordinaten als Doppelverhältnisse. 7. Das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit. 8. Die uneigentlichen Gebilde in der Ebene. 9. Die Doppelverhältnisse bei uneigentlichen Gebilden. 10. Die Coordinaten der unendlichfernen Punkte. 11. Coordinatendreiecke mit unendlichfernen Eckpunkten. Anhang über

Projectivität und Metrik. 12. Die Curven zweiter Ordnung. 13. Pol und Polare der Curven zweiter Ordnung. 14. Die Tangenten an eine Curve zweiter Ordnung. 15. Die Polardreiecke einer Curve zweiter Ordnung. 16. Das Linienpaar. 17. Die Doppelgerade. 18. Einteilung der Curven zweiter Ordnung. 19. Die Curven zweiter Ordnung und die unendlichferne Gerade. 20. Die Curven zweiter Klasse. 21. Einteilung der Curven zweiter Klasse. 22. Die Involution. Anhang über collineare und reciproke Zuordnung. 23. Der Kegelschnittsbüschel. 24. Die Kegelschnittsschar. 25. Ein specieller Kegelschnittsbüschel. 26. Der Pascal'sche Satz. 27. Der Brianchon'sche Satz. 28. Die projective Erzeugung der Kegelschnitte. 29. Der Kreis und die unendlichfernen Kreispunkte. 30. Das Hauptaxenproblem der Curven zweiter Ordnung. 31. Confocale Kegelschnitte. Lp.

M. Simon. Analytische Geometrie der Ebene. 372 S. 8°. (Sammlung Schubert VIII.)

M. Simon. Analytische Geometrie des Raumes. I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel. 152 S. 8°. (Sammlung Schubert IX.)

M. Simon. Analytische Geometrie des Raumes. II. Teil: Die Flächen zweiten Grades. 176 S. 8°. (Sammlung Schubert XXV.) Leipzig: G. J. Göschen.

In den von der Verlagsbuchhandlung über die Sammlung Schubert verbreiteten Prospecten wird ausdrücklich betont, dass diese Lehrbücher wegen ihrer leicht fasslichen Ausdrucksweise sich ganz besonders für das einführende Studium eignen sollen, und dass sie dem Bedürfnisse der Praktiker, Techniker, Naturwissenschaftler im weitesten Masse Rechnung tragen. In Bezug auf die vorliegenden Bücher muss Referent unumwunden aussprechen, dass sie seiner Meinung nach keine der genannten Forderungen erfüllen, und dass Leser dieser Art wahrscheinlich eine grosse Enttäuschung erfahren würden; dass aber diese drei Werke sehr wertvolle Bücher darstellen für den, der das Gebiet so ziemlich übersieht und seine Detailkenntnisse vermehren will; denn die Fülle des Gebotenen ist erstaunlich und eine glänzende Bestätigung für die wohlbekannte Sachkenntnis und Belesenheit des Verf. Die Eigenart seiner Darstellungsweise und der ungewöhnliche Umfang des behandelten Gebietes ist schon bei Gelegenheit des früheren kleineren Werkes gekennzeichnet (F. d. M. **28**, 494, 1897; **29**, 482, 1898). Die gegenwärtige Bearbeitung ist vor allem vergrössert durch ein reichhaltiges Aufgabenmaterial; in ihm ist ein erheblicher Teil des Lehrstoffes untergebracht, und die rein geometrischen und projectiven Methoden sind so stark betont, dass elementare, synthetische und analytische Geometrie in gleicher Weise zum Recht kommen. Von den transcendenten Curven sind neu aufgenommen die Astroide, Kardioide, die dreispitzige Hypocykloide. Im Raume finden wir neu die analytische Sphärik und die ausführliche Darstellung des linearen Complexes und der Reye'schen Axen. Die zahlreichen Figuren sind durchweg, besonders aber für die räumlichen Gebilde, wohl gelungen.

Im einzelnen kann man bei einem so umfangreichen Werke natürlich vieles aussetzen. Vor allem wäre ein zweckmässiges Sachregister bei der Fülle der Einzelheiten dringend erforderlich. Bei der Behandlung der Involution erscheint es als Mangel, dass eine rein geometrische Definition nur für den Fall reeller Doppelelemente gegeben wird. Sehr störend erweist es sich, dass die Gesamtheit aller Kegelschnitte, die durch vier feste Punkte gehen, Büschel oder Schar genannt wird. Nach der sonst üblichen Terminologie bezeichnet Schar alle Kegelschnitte, die vier feste Tangenten haben; Verf. benutzt hier den Ausdruck Kegelschnittsreihe. Uebrigens liest man im ersten Teil überall das Büschel, nachher aber der Büschel. Die historischen Hinweise wird man überall dankbar begrüssen; doch stösst man dabei mehrfach auf Wunderlichkeiten. Hierher rechnet Referent z. B. die Nachricht, dass eine gewisse Aufgabe von Robert Burg im Reye'schen Seminar 1889 behandelt sei, und dass derselbe zur Zeit in Frankfurt a. M. lebe. R. M.

M. Simon. Analytische Geometrie der Ebene. Zweite verb. Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 207 S. 12° (Sammlung Göschen 65).

Die erste Ausgabe ist F. d. M. **28**, 494, 1897 besprochen. Die gegenwärtige Auflage zeigt im einzelnen vielfach die bessernde Hand des Verf.; man vergleiche z. B. die Bemerkungen über die Coordinaten der Punkte einer Geraden, über den unendlich fernen Punkt, über den Schnitt von Kreis und Gerade u. a. m. Hinzugekommen ist je ein Paragraph über die confocalen Kegelschnitte und über die Kreisverwandtschaft. R. M.

H. Ganter und F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. 1. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 180 S. gr. 8°.

Zwischen der dritten und der vierten Auflage liegen wiederum nur 3 Jahre (vergl. F. d. M. **28**, 495, 1897). Das Buch ist um ein alphabetisches Register vermehrt worden. R. M.

K. A. Andrejew. Analytische Geometrie. 3. Aufl. Moskau. VI + 610. gr. 8°. (Russisch.)

Das vortreffliche Lehrbuch von K. A. Andrejew gelangt schon zur dritten Ausgabe, ein genügender Beweis für seinen Wert. Diese Auflage ist durch Einfügung von Beispielen und Aufgaben am Ende jedes Kapitels und durch eine Zusammenstellung von Repetitionsfragen am Schluss des Buches vermehrt. Beide Zusätze sind der Aufgabensammlung desselben Verf. entnommen. Si.

W. P. Ermakow. Analytische Geometrie. Vorlesungen. Teil I. Geometrie der Ebene. Teil II. Geometrie des Raumes. Kiew. IV u. 120, 208 S. 8° (Russisch).

Ein sehr gutes elementares Lehrbuch. Die Geometrie des Raumes ist ausführlicher behandelt und führt bis zu den confocalen Linien und Flächen zweiter Ordnung unter Berücksichtigung der Doppelverhältnisse und der Polaren. Uebungen sind leider nicht mit eingeschlossen.

Si.

F. Michel. Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Polytechnique de 1860 à 1900. Paris: Gauthier-Villars. VI + 240 S. 8°.

Zunächst für französische junge Leute bestimmt, die sich für die Aufnahmeprüfung an der École Polytechnique vorbereiten wollen, ist diese Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie, deren vollständig discutirte Lösungen sorgfältig entwickelt sind, ein Uebungsbuch, dessen Durcharbeitung den Anfängern in der analytischen Geometrie sehr zu empfehlen ist. Unsere deutschen Studenten der ersten Semester sollten sich die Frage vorlegen, ob sie in der Klausur diese Aufgaben innerhalb vorgeschriebener Zeit bewältigen könnten. Mit den litterarischen Hinweisen auf solche Schriften versehen, in denen die bezüglichen Fragen beantwortet worden sind, stellt das Buch ein Blatt Geschichte aus dem französischen mathematischen Unterrichte der letzten 40 Jahre dar auf einem Gebiete, wo Frankreich immer Vorzügliches geleistet hat, und zwar schon in den Classes de mathématiques spéciales der Collèges, während bei uns die analytische Geometrie in diesem Umfange erst auf den Hochschulen gelehrt wird. Besonders auch die graphische Darstellung der Ergebnisse in der vortrefflichen Wiedergabe der rühmlich bekannten Verlagshandlung ist noch zu erwähnen.

Lp.

R. Ziegel. Zur Coordinatentransformation. Hoppe Arch. (2) 17, 263-268.

Es wird die Transformation der Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten in eine solche in Liniencoordinaten behandelt. Stz.

W. Männel. Grundriss des geometrischen Calcüls. 27. Jahresbericht der k. k. II. deutschen Staats-Realschule in Prag-Kleinseite. 1899-1900. 37 S.

Der Verf. entwickelt das Wesentliche aus der Theorie des geometrischen Calculs im Sinne von Schlegel's Raumlehre und der Grundzüge des „Geometrischen Calculs" von Genocchi-Peano, unter Beschränkung auf das Gebiet der Ebene. Sda.

P. MANSION. Rapport sur le travail intitulé: „Mémoires de géométrie générale analytique“ par M. P. Barbarin. Belg. Bull. Sciences 1900, 28-42.

Diese Arbeit ist unter dem Titel: „Études de géométrie analytique non euclidienne“ im Bande 60 der Mémoires in 8° der belgischen Akademie 1901 veröffentlicht worden. Folgendes ist der Inhalt:

I. Viereck mit drei rechten Winkeln, grundlegende Constructionen. Dieses Kapitel enthält drei neue elementare Sätze, die Bolyai entgangen sind und die grundlegenden Constructionen der nichteuklidischen Geometrie sehr vereinfachen. 1. Es seien $ABCD$ ein in B, C, D rechtwinkliges Lobatschewskij'sches Viereck, E ein Punkt zwischen A und D, F ein Punkt zwischen A und B, und zwar $CE = AB$, $CF = AD$. Dann ist CE Asymptote zu AB, CF zu DA. 2. $BF = DE$ und $\text{th} BF = \cos A$. 3. Wenn man auf CF eine Länge $CH = CE$ abträgt, so schneiden sich die von E auf CB, von H auf CD gefällten Lote auf CA.

II. Ebene, Coordinaten, Gerade und Kreis. III. Linien zweiten Grades, Reduction, Einteilung. IV. Coordinaten des Raumes, Ebene, Gerade. Wir führen hier einen merkwürdigen Satz der Riemann'schen Geometrie an: Es giebt Riemann'sche Geraden, welche ihre gleich entfernten Punkte paarweise auf gemeinschaftlichen Loten haben. V. Flächen zweiter Ordnung, Reduction, Einteilung, Eigenschaften. Die meisten Resultate dieses Kapitels sind neu. VI. Geodätische Linien der Kanalflächen und Pseudosphären. Die eigentliche Geometrie der Geodätischen auf den Kanalflächen (Flächen gleichen Abstandes von einer Geraden) ist euklidisch, die der Pseudosphären ist lobatschewskijsch, und zwar in den drei Systemen der Geometrie. Der Satz über die Kanalflächen ist 1898 in Lond. M. S. Proc. veröffentlicht worden; die Arbeit von Barbarin wurde aber der belgischen Akademie schon am 4. December 1897 überreicht. Mn. (Lp.)

G. FONTENÉ. Métrica aninvolutiva. Progreso mat. (2) **2**, 3-11, 81-90.

Zusammenfassende Darstellung der Untersuchungsergebnisse in dem Werke des Verf.: „L'hyperespace, propriétés métriques d'une corrélation générale“ (1892) nach Art des Artikels in S. M. F. Bull. **26**, über den in F. d. M. **29**, 484, 1898, berichtet ist. Tx. (Lp.)

Weitere Litteratur.

A. L. CANDY. The elements of analytic geometry. Lincoln, Neb. 303 S. 8°.

M. FRIEDRICH. Katechismus der analytischen Geometrie. 2. Aufl. Durchgesehen und verbessert von E. Riedel. Leipzig: J. J. Weber. VIII + 217 S. (Weber's illustrirte Katechismen, No. 116).

H. B. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie. 14. Aufl. Leipzig. IV + 214 S. 8°.

G. Loria. Bemerkungen über Polarcoordinaten. Wiad. mat. **4,** 44-51. (Polnisch.)

S. F. d. M. **30,** 1899, 499-500.

A. Macfarlane. Space analysis. Public. Univers. Pennsylvania **4,** 184-190.

Referat auf S. 92 dieses Bandes.

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

G. Scheffers. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Erster Band. Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume. Leipzig: Veit & Co. VIII u. 360 S. gr. 8°.

Das vorliegende Werk soll den Studirenden zur ersten Einführung dienen und ist daher möglichst elementar gehalten. Während sonst der Anfänger die betreffenden Gebiete aus den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung zuerst kennen lernt, wo sie als nicht unmittelbar zum Gegenstande gehörig oft etwas kurz behandelt werden, erscheint hier die Differentialgeometrie als Selbständiges und Ganzes. Bei der Ausführlichkeit der Darstellung wird der Lernende keine erhebliche Schwierigkeit in der Aneignung des Inhaltes finden, und die vielen litterarischen Hinweise auf die Quellenwerke bis in die neueste Zeit hinein werden beim weiteren Arbeiten gute Dienste leisten. Mit Rücksicht auf die leichte Verständlichkeit hat der Verf. auf die Forderungen der Exactheit zuweilen verzichtet. Obschon Referent meint, dass an manchen Stellen ohne Erhöhung der Schwierigkeit in der Auffassung eine strengere Betrachtung möglich gewesen wäre, so will er seine pädagogischen Bedenken doch nicht zu stark betonen, weil ja ein gründliches Kolleg über Functionentheorie dem Lernenden die Schulung in begrifflich strengen Methoden zu geben hat. Anzuerkennen ist die Reichhaltigkeit der gebotenen Gesichtspunkte, wie man dies ja von einem Schüler und Mitarbeiter Lie's zu erwarten berechtigt war; zur Vorbereitung auf das Studium der neueren Schriften wird sich das Buch daher sehr nützlich erweisen. In keinem anderen elementaren Werke dürfte der Anfänger wohl die neueren Ideen so bequem zusammengestellt finden. Die Figuren (in axonometrischer Orthogonalprojection, soweit Räumliches darzustellen war) unterscheiden sich in ihrer sorgfältigen Ausführung sehr vorteilhaft von den oft ungenauen und skizzenhaften Beigaben anderer ähnlicher Werke.

Von den drei Abschnitten des vorliegenden ersten Bandes behandelt der erste die Curven in der Ebene, der zweite die Curven im Raume, der dritte die Curven und die abwickelbaren Flächen. In einem Anhange

werden tabellarisch die wichtigsten Formelgruppen zusammengestellt, und zuletzt wird ein ausführliches, alphabetisch nach Stichwörtern geordnetes Sachregister gegeben.

Aus dem ersten Kapitel, das die Berührung der verschiedenen Ordnungen, die Krümmung, die einhüllenden Curven, die singulären Punkte enthält, erwähnen wir ausser diesen auch sonst überall abgehandelten Dingen als eigentümlich die natürliche Gleichung einer Curve, die Differentialinvarianten derselben, die Einbeziehung der durch Differentialgleichungen definirten Curvensysteme, flächentreue Abbildung in der Ebene, Isothermen der Ebene. Bei der Darstellung der Raumcurven im zweiten Abschnitte ist die Anwendung des begleitenden Dreikants und seiner Bewegung hervorzuheben, ferner die Behandlung der Differentialinvarianten, der natürlichen Gleichung, der Berührung zwischen Curven und Flächen, die sphärische Abbildung und der osculirende Rotationskegel. Der dritte Abschnitt endlich, der in guter Darstellung die Eigenschaften der abwickelbaren Flächen vorträgt und damit ein viel behandeltes Thema zu erledigen hat, dringt in den letzten Paragraphen über Minimalcurven bis an die Schwelle der Untersuchungen von Lie vor. Lp.

G. Scheffers. Functionen der Abstände von festen Punkten. Böklen Mitt. (2) **2**, 33-49; auch sep. Stuttgart: J. B. Metzler. 17 S. 8°.

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ die Abstände eines Punktes X von gegebenen Polen $P_1, \ldots, P_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ die Gleichung einer durch diese Abstände bestimmten Curve. Dann erhält man bekanntlich die Richtung der Normale von $f = 0$ in X, wenn man auf allen Strecken $P_r X$ über X hinaus $\partial f / \partial x_r$ abträgt und von allen diesen Strecken die Resultante bildet. Der Verf. wendet die hieraus folgende Tangentenconstruction auf einige Beispiele an und zeigt, wie die Ausnahmefälle behandelt werden, in welchen entweder X in einen Pol P_r hineinfällt oder jene Resultante verschwindet. Zuletzt wird die Bedingung aufgestellt, dass zwei Curvenscharen $f(x_1, x_2) = 0$ und $\varphi(x_1, x_2) = 0$ ein Orthogonalsystem bilden. Wö.

C. Reuschle. Das Divisionsprincip in der analytischen Geometrie nebst Curvendiscussion mittelst Signirungsprincip und Princip der linearen Combination. Böklen Mitt. (2) **2**, 49-62.

Die Gleichung einer Curve $f_n(x, y) = 0$ (Dividentencurve) wird durch Division mit der linken Seite einer Geraden $g = 0$ (Divisorgeraden) auf die Form $f_n \equiv g f_{n-1} + \varphi_{n-1} = 0$ gebracht. $f_{n-1} = 0$ nennt Verf. Quotientcurve, $\varphi_{n-1} = 0$ Restcurve. Die umgeformte Gleichung dient zur Untersuchung des angenäherten Verlaufs der Curve auf Grund des Princips der linearen Combination und des Signirungsprincips (vergl. des Verf. Abh. im Tageblatt der 62. Vers. Deutscher Naturf. und Aerzte). Besonders hervorgehoben wird der Fall, dass die Divisorgerade eine Asymptote, die Restcurve also nur vom $(n-2)$-ten

Grade wird. Auch die Division mit nichtlinearen Formen kann zu bemerkenswerten Umformungen der Curvengleichung führen (z. B. Asymptotenpaar als Divisorgeradenpaar). Auch auf die vollständige Division mit g, d. h. die Reihenentwickelung von f_n nach Potenzen von g, wird zum Schluss eingegangen. Wö.

ÉD. COLLIGNON. Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. Nouv. Ann. (3) **19,** 11-25.

Aus der Beaune'schen Aufgabe (F. d. M. **30,** 506, 1899) leitet der Verf. die folgende ab: Gesucht eine Curve derart, dass vom Schnitt der Tangente mit der x-Axe aus das Stück der Normale von der Curve bis zu einer mit der Axe den Winkel β bildenden Geraden unter dem Winkel α erscheint. Man erhält algebraische oder interscendente Curven mit Ausnahme der Fälle, wo $\alpha=\beta$ oder $\beta=\pi$ ist; der letztere entspricht der verallgemeinerten Beaune'schen Aufgabe (vgl. a. a. O.). Für $\alpha+\beta=\pi$ erhält man binomische Hyperbeln. Die unter den definirten Curven auftretenden Kegelschnitte werden besonders besprochen. Auch zeigt der Verf., dass die Curve sich nicht ändert, wenn α und β durch ihre Ergänzungen zu $\frac{1}{2}\pi$ ersetzt werden. Wö.

Éd. COLLIGNON. Problème sur les normales aux courbes planes. Courbes dans lesquelles la somme $N+N'$ est constante. Nouv. Ann. (3) **19,** 433-442.

Die Evolvente der geraden Astroide wird als Ort der Punkte definirt, deren Normalenstücke bis zur x-Axe und y-Axe eine constante Summe haben, und wird mittels Fusspunktcoordinaten (Ursprungslot auf die Tangente und dessen Winkel mit einer festen Axe) gestaltlich untersucht. Wö.

M. D'OCAGNE. Sur les adjointes infinitésimales d'une courbe plane. Nouv. Ann. (3) **19,** 219-224.

In einer Reihe von Abhandlungen in dem American J., in den Nouv. Ann. und in dem Journ. de Math. (vergl. u. a. F. d. M. **20,** 1888 und **24,** 1892) hat der Verf. von dem Princip Gebrauch gemacht, einer ebenen Curve eine andere so zuzuordnen, dass jedem Punkte der ersten nebst der Tangente in diesem ein Punkt der zweiten (courbe adjointe infinitésimale) in der Weise entspricht, dass die Krümmungsmittelpunkte jener durch die Tangenten dieser bestimmt sind. In der vorliegenden Notiz wird zunächst bemerkt, dass sich die in dem vorliegenden Bande der Nouv. Ann. S. 11 von Collignon angestellten Untersuchungen (vergl. das Referat oben) aus demselben Gesichtspunkte betrachten lassen, wodurch sich eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes ergiebt, und sodann, da Laisant in seiner Abhandlung über eine

Methode, die Construction des Krümmungsmittelpunktes einer graphischen Curve auf diejenige einer Tangente zurückzuführen (Nouv. Ann. (2) **13**, 367; F. d. M. **6**, 410, 1874) auf Ausnahmefälle aufmerksam gemacht hatte, in denen die Methode versagt, ein einfaches Kriterium dafür aufgestellt, in welchem Falle eine Construction, die einem Punkte einer ebenen Curve und der Tangente in diesem einen bestimmten anderen Punkt der Ebene zuordnet, in der That zu einer in dem obigen Sinne adjungirten Curve führt. T.

G. Pirondini. Una corrispondenza particolare fra i punti di due linee piane. Batt. G. **38**, 92-104.

Zwei ebene Curven L und $\varLambda$ werden als associirt bezeichnet, wenn sie sich punktweise derart entsprechen, dass die Tangenten in correspondirenden Punkten einen constanten Winkel bilden. Ist Gestalt und Grösse von L gegeben und die Beziehung zwischen den Bogenlängen oder auch zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte festgesetzt, so ist dadurch Gestalt und Grösse von $\varLambda$ bestimmt, aber es sind dann L und $\varLambda$ noch auf unendlich viele andere Arten einander associirt; und durch gleichzeitige Festsetzung beider Beziehungen sind zwei (auf unendlich viele verschiedene Arten) einander associirte Linien L und $\varLambda$ bestimmt. Die analytischen Ausdrücke für die gesuchten Linien werden auf Grund der Darstellung der Curven durch ihre „natürlichen“ Gleichungen hergeleitet. Schliesslich wird der Fall einer als sich selbst associirt betrachteten Curve behandelt. Die allgemeinen Entwickelungen werden in speciellen Fällen näher durchgeführt. T.

G. Pirondini. Quelques applications des coordonnées intrinsèques. Progreso mat. (2) **2**, 161-171.

Der Verf. bestimmt den analytischen Charakter, der die Aehnlichkeit aller Linien einer und derselben Familie bedingt. Als Anwendung bestimmt er die Familie ebener Curven, deren einzelne Glieder als Meridiancurven einer Folge von Umdrehungsflächen, die auf einander abwickelbar sind, angesehen werden können. Tx. (Lp.)

E. H. Moore. On certain crinkly curves. American M. S. Trans. **1**, 72-90.

Es seien $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ stetige reelle Functionen der reellen Variable t, so kann durch dieselben eine ebene (xy)-Curve dargestellt werden. Peano und Hilbert haben zuerst Beispiele für Curven gegeben, welche ein Flächenstück oder auch die ganze Ebene vollständig ausfüllen. Die definirenden Functionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dieser Curven haben an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten oder, mit anderen Worten, die durch $x = \varphi(t)$ (und ebenso die

durch $y = \psi(t)$) dargestellte (xt)-Curve hat an keiner Stelle eine bestimmte Tangente. Moore giebt eine ausführliche geometrische und analytische Darstellung dieser Curven und führt die Untersuchung der zur Peano'schen Curve gehörigen Functionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ weiter, indem er auf die Frage nach dem etwaigen Vorhandensein eines bestimmten vorwärts oder rückwärts genommenen Differentialquotienten eingeht. Es ergeben sich folgende Resultate: Die in Rede stehenden Functionen haben an keiner Stelle einen bestimmten endlichen, vorwärts oder rückwärts genommenen Differentialquotienten; auch giebt es keine Stelle, an welcher sowohl ein bestimmter unendlich grosser vorwärts genommener, als auch ein bestimmter unendlich grosser rückwärts genommener Differentialquotient vorhanden ist. Wohl aber existiren Stellen, an denen nur der vorwärts (rückwärts) genommene Differentialquotient einen bestimmten unendlich grossen Wert hat, während der rückwärts (vorwärts) genommene unbestimmt ist. Diese Stellen sind überall dicht verteilt. Stz.

E. Cesàro. Sur une classe de courbes planes remarquables. Nouv. Ann. (3) **19,** 489-494.

Diese Curven sind in natürlichen Coordinaten definirt durch die Gleichung:

$$s = \int \frac{\lambda\, d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\mu} - 1}}.$$

Je nach den Werten der Parameter λ, μ sind darin enthalten: Cykloiden, Hypo- und Epicykloiden, Lemniskate, Parabel, gleichseitige Hyperbel u. a. Durch Teilung des jeweiligen Krümmungsradius in gewissem constanten Verhältnis kann man Punkte dreier neuen Curven erhalten, welche zu derselben Art gehören. R. M.

A. B. Basset. Autotomic curves. Nature **62,** 572; **63,** 82.

H. Richmond. Curves without double points. Nature **63,** 58.

Basset schlägt für eine mit einer Punkt-Singularität behaftete Curve den Namen „autotomisch“ vor, möchte aber nicht unautotomisch für Curven ohne solche Singularität sagen. In Nature **63,** 7 ersetzt H. L. Orchard das griechische Wort durch das lateinische „sesecting“ und „non-sesecting“, A. S. Thorn findet aber nichts an der Form unautotomisch auszusetzen. H. Richmond meint, ein neuer Ausdruck sei überhaupt unnötig; sonst könnte man auch „knotenfrei“ (nodeless) gebrauchen. Dem gegenüber hält Basset an seiner Ansicht fest und hat gegen Orchard's Vorschlag nichts einzuwenden. Lp.

B. Theorie der algebraischen Cuven.

F. S. MACAULAY. The theorem of residuation, being a general treatment of the intersections of plane curves at multiple points. Lond. M. S. Proc. **31**, 401-422.

Eine Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in F. d. M. **30**, 509, 1899 referirt wurde. Lsg.

A. R. FORSYTH. Note on Halphen's birational transformation. Messenger **30**, 1-7.

Unter den verschiedenen Beweisen für den wichtigen Satz, dass eine algebraische Curve durch eine birationale Transformation in eine solche transformirt werden kann, welche nur einfache Doppelpunkte besitzt, hängt der eine von einer geometrischen Transformation ab, die von Halphen herrührt (Journ. de Math. (3) **2**, 87-114, 1876); es ist die folgende: Man nehme auf der gegebenen Curve einen Punkt P an, ziehe in P die Tangente und bestimme deren Schnittpunkt P' mit der Polare von P in Bezug auf einen willkürlich angenommenen Kegelschnitt; die Correspondenz zwischen P und P' liefert die fragliche Transformation. Verf. giebt nun in der vorliegenden Note den analytischen Ausdruck für diese Transformation, indem er die Coordinaten von P durch die von P', und umgekehrt, ausdrückt und nachweist, dass diese Transformation birational ist. Wbg.

CH. A. SCOTT. Studies in the transformation of plane algebraic curves. Quart. J. **32**, 209-239.

Fortsetzung der Abhandlung aus Quart. J. **29**, 329-381 (F. d. M. **29**, 497, 1898). Zu den dort bereits abgedruckten fünf Paragraphen werden jetzt die beiden folgenden veröffentlicht: § 6. Die Fundamentalpunkte, ihre correspondirenden und complementaren Curven. § 7. Die Fundamentalcurven, ihre correspondirenden und complementaren Punkte. Da in dem früheren Referate bereits nach der Einleitung eine Uebersicht über das Ganze gegeben ist, da ferner gemäss dem in jener Einleitung enthaltenen Inhaltsverzeichnis noch immer zwei Paragraphen fehlen, so gehen wir jetzt nicht näher auf das vorliegende Bruchstück ein, in dem sich besonders viele Berührungspunkte mit den Ergebnissen italienischer Arbeiten finden. Lp.

W. WEISS. Bemerkung über eine Abzählung der Wendepunkte algebraischer Curven. Monatsh. f. Math. **11**, 367-368.

Die Abzählung geschieht in der Weise, dass eine beliebige Gerade so oft überdeckt wird, als die Klasse der Curve angiebt, womit in bekannter Weise eine Riemann'sche Fläche erhalten wird, auf welche die Curve als Tangentengebilde eindeutig umkehrbar bezogen ist; dann er-

giebt sich die gesuchte Zahl aus der Bemerkung, dass Verzweigungspunkte auf der Geraden nur ihre Schnittpunkte mit der Curve und deren Wendetangenten sind. In derselben Weise wird auch die Zahl der Wendeberührungsebenen einer Raumcurve von gegebener Ordnung und gegebenem Geschlechte ermittelt. T.

J. SCHICK. **Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.** Münch. Ber. **30**, 249-272.

Diese Arbeit bildet einen beachtenswerten Beitrag zur Theorie des Dreiecks, insofern sie das bisher nur vereinzelt herangezogene Hülfsmittel der complexen Grössen und deren linearer Transformation systematisch verarbeitet. Der Verf. stützt sich bei seinen Untersuchungen und eigenartigen Bezeichnungen vielfach auf eine frühere Schrift von ihm (Grundlagen einer Isogonalcentrik. Tübingen, 1887), die leider ziemlich unbekannt geblieben zu sein scheint (vergl. das Referat in F. d. M. **21**, 568, 1889). Dieser Umstand erschwert die Lectüre der inhaltsreichen Abhandlung einigermassen; der Referent muss sich daher darauf beschränken, einige Hauptgesichtspunkte hervorzuheben. Die Grundlage bildet eine bekannte geometrische Deutung des Doppelverhältnisses $D = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ von vier Punkten (A, B, C, P) in der complexen Ebene. Einmal ist der absolute Wert $|D|$ von $D = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$ gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden vier Strecken, andererseits ist das Argument $\sphericalangle(D)$ von D gleich dem Winkel der Kreise (z_1, z_2, z_3) und (z_1, z_3, z_4), also der Kreise (A, B, C) und (A, C, P). Nun lassen sich, wie ganz elementar zu zeigen ist, $|D|$ und $\sphericalangle(D)$ in einem Dreiecke vereinigt zur Anschauung bringen, nämlich dem Fusspunktsdreieck von P bezüglich des Dreiecks (ABC). Sind X, Y, Z die Fusspunkte der Lote, die von P auf die Seiten BC, CA, AB gefällt werden, so ist (bei geeigneter Definition von D) $|D| = \frac{XY}{ZY}$, und $\sphericalangle(D)$ gleich dem Winkel beider Strecken, also gleich $\sphericalangle(XYZ)$.

Da aber bei linearer Transformation (S) $\zeta = \frac{\alpha z + \delta}{\gamma z + \delta}$ das Doppelverhältnis von vier Punkten ungeändert bleibt, so geht das Fusspunktsdreieck XYZ in ein ähnliches über, oder, wie der Verf. sagt, es ändert seine „Form“ nicht. Das liefert den grundlegenden Satz: Bei linearer Transformation von 4 Punkten in der complexen Ebene behält das Fusspunktsdreieck je des vierten Punktes in Bezug auf das Dreieck der drei übrigen Punkte invariante Form.“ Es ist das um so bemerkenswerter, als alle bei Construction des Fusspunktsdreiecks benutzten Linien nicht gegenüber S invarianten Charakter haben, sondern in irrelevante Kreise übergehen. Da irgend zwei Kreise vermöge S wieder in zwei Kreise mit Erhaltung des Schnittwinkels übergehen, hat Möbius den

Namen Kreisverwandtschaft eingeführt. Den entsprechenden griechischen Terminus „Isogonalcentrik" verwendet der Verf. in engerem Sinne für die Theorie der Fusspunktsfiguren.

P heisst das „Orthogonalcentrum" der Fusspunktsfigur und erscheint als Spezialfall des „Isogonalcentrums", wenn nämlich die Strahlen PX, PY, PZ unter einem beliebigen gleichen Winkel gezogen werden. Es giebt eine grosse Reihe von (zum Teil bekannten) Sätzen über die geometrischen Oerter, die das Isogonalcentrum beschreiben muss, damit gewisse Elemente der Fusspunktsfigur constant bleiben. Von solchen Sätzen werden die von Strecken und Flächeninhalten handelnden für die Invariantentheorie keine Bedeutung haben, wohl aber die sich auf Streckenverhältnisse und Winkel beziehenden. In diesem Sinne werden die verschiedenen „merkwürdigen" Punkte des Dreiecks ABC, resp. XYZ des näheren untersucht. Solche invarianten Punkte ergeben sich z. B. aus der stereographischen Projection des Oktaeders und Ikosaeders. Punkte, die absolut invariante, von den Elementen des Urdreiecks ABC unabhängige Coordinaten haben, werden Punkte „primärer" Invarianz genannt. Anders steht es mit einer weiteren Gruppe merkwürdiger Punkte. So z. B. geht das Umkreiscentrum O des Dreiecks ABC keineswegs in das des transformirten Dreiecks $A'B'C'$ über, ist also in dieser Eigenschaft nicht invariant. Nun ist aber O auch Orthogonalcentrum eines Fusspunktsdreiecks, dessen Winkel die des Urdreiecks selbst sind. Der entsprechende Punkt O' hat dann in seinem Fusspunktsdreieck auf $A'B'C'$ gleichfalls die Winkel des Urdreiecks. Hier hängen also die Coordinaten der Punkte O, O' von den Elementen des Urdreiecks ab. Solche Punkte werden daher als Punkte „secundärer" Invarianz bezeichnet. Dahin gehören u. a. die Brocard'schen Punkte des Dreiecks, ferner der Grebe'sche oder Lemoine'sche Punkt.

Weiterhin dehnt der Verf. seine Untersuchungen auf Vierecke, Vierseite und höhere Polygone aus. Bei einem Vierseit ist bekanntlich vor allem der (nicht invariante) Punkt von Interesse, in dem sich die Umkreise der vier zugehörigen Dreiecke schneiden, der Brennpunkt der dem Vierseit einbeschriebenen Parabel. Der Verf. nennt ihn daher „Eschara" des Vierseits (ἐσχάριον heisst im Neugriechischen Brennpunkt). Zu einem Viereck gehört so ein „Escharendreieck". Desgleichen erweisen sich eine Reihe anderer merkwürdiger Punkte des Vierecks als nicht invariant. Um wirklich invariante Punkte zu finden, bedient sich der Verf. eines einfachen Princips. Wenn die Fusspunktsdreiecke XYZ, $X_1Y_1Z_1$ eines Punktes P in Bezug auf zwei beliebige Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ ähnlich sind, so sind die Doppelverhältnisse $(PABC)$ und $(PA_1B_1C_1)$ einander gleich. Dadurch ist P endlich-deutig bestimmt, und zwar als primär invarianter Punkt.

Liegt nun ein Viereck $ABCD$ vor, so giebt es z. B. ein invariantes Punktepaar Γ, Γ', das sowohl zu A, C wie zu B, D harmonisch liegt.

Das Angeführte mag genügen, um die Aufmerksamkeit der Dreiecksgeometer und Invariantentheoretiker auf die vorliegende Abhandlung zu lenken. Die dargelegten Sätze und Methoden drängen, wie betont wird,

auf Schritt und Tritt zu weiterer Ausgestaltung und führen zu neuen Problemen. My.

A. GRASSI. Sulle curve di ordine n e in particolare sulle quartiche che ammettono coniche apolari. Batt. G. **38**, 244-264.

Eine Curve C_n n-ter Ordnung besitze einen apolaren Kegelschnitt, d. h. die Polarcurve von g in Bezug auf C_n ist unbestimmt. Ueber diese Curven werden verschiedene Sätze entwickelt. Aus den ersten drei Lehrsätzen ergiebt sich, dass jede Curve C_n mit apolarem Kegelschnitt g ∞^1 polare $(n+1)$-Seite besitzt. Umgekehrt, wenn einem Kegelschnitte zwei $(n+1)$-Seite umgeschrieben sind, so giebt es eine C_n, in Bezug auf welche g apolarer Kegelschnitt ist und die beiden $(n+1)$-Seite polare Vielseite sind. Insbesondere wird der Fall untersucht, dass g in zwei Punkte ausartet: Jede Curve C_n gerader Ordnung mit apolarem Kegelschnitt, der in ein Punktepaar A, B ausartet, besitzt ∞^1 polare $(n+1)$-Seite, die sich in zwei Gruppen scheiden. Die $(n+1)$-Seite einer Gruppe bestehen aus $\frac{1}{2}n$ Geraden, die von einem der beiden Punkte A, B ausgehen, und aus $\frac{1}{2}n+1$ Geraden, die von dem andern Punkte ausgehen. Die polaren $(n+1)$-Seite der C_n sind einer Curve n-ter Ordnung σ_n einbeschrieben, die weder Doppel- noch Rückkehrpunkte besitzt. Die Sätze für den Fall $n=4$ werden besonders hervorgehoben; auf dieselben wurde zuerst von Lüroth in Math. Ann. **1** und **13** (F. d. M. **2**, 511, 1869 u. **10**, 466, 1878) hingewiesen. Für die allgemeinen C_n werden ferner Eigenschaften der Hesse'schen, der Jacobi'schen und der Steiner'schen Curven hergeleitet. Der zweite Paragraph handelt von solchen C_n, die ein polares Vierseit besitzen, also auch eine Schar apolarer Kegelschnitte. In § 3 wird die Curve mit einer Schar von apolaren Kegelschnitten betrachtet, welche aus einem festen Punkte und den Punkten einer Geraden gebildet sind. Endlich in § 4 wird der Fall erledigt, dass die Curve C_n ein polares Dreiseit besitzt oder ein Netz apolarer Kegelschnitte, welche die drei Seiten eines Dreiecks berühren. Lp.

W. BOUWMAN. Ueber den Ort der Berührungspunkte von Strahlenbüscheln und Curvenbüscheln. Nieuw Archief (2) **4**, 258-268.

Der Ort Γ_A der Schnittpunkte eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel A und eines Curvenbüschels B_n ist eine Curve $(2n-1)$-ter Ordnung und $(2n-1)(2n-2)$-ter Klasse ohne Doppel- und Rückkehrpunkte. Durchläuft A eine Gerade, so bilden die Curven Γ_A einen Büschel; bewegt sich A in der ganzen Ebene, so bilden sie ein Netz N, welches die Wendepunkte von B_n als Doppelpunkte hat. Die zu den Curven Γ_A mit Doppelpunkt gehörigen Punkte A (pseudo-Steiner'sche Punkte) liegen auf der Enveloppe der Wendetangenten von B_n, die zugleich Cayley'sche Curve des Netzes ist. Alsdann wird das Netz N^{2n-1} der Curven Γ untersucht, welche man erhält, wenn man A festhält, B_n aber der Reihe nach mit

den Büscheln eines Netzes N^n zusammenfallen lässt. Die durch geometrische Abzählung erhaltenen Resultate werden schliesslich mittels symbolischer Rechnung analytisch bestätigt. Wö.

F. P. Ruffini. Linee radicali e punti radicali. Bologna Rend. (2) 4, 23-29.

Ist: $$f(x,y)\equiv(x^2+y^2)^k+\psi(x,y)=0,$$
wo die Ordnung von $\psi(x,y)$ höchstens $2k-1$ ist, die Gleichung einer cyklischen Curve, und sind $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ die Schnittpunkte derselben mit einer von einem Punkte $O(x_0, y_0)$ ausgehenden Geraden, so hat das Product $OA_1 \cdot OA_2 \cdots OA_{2k}$ für alle durch O gehenden Geraden einen und denselben Wert, nämlich $f(x_0, y_0)$; dieser wird als die „Potenz der Curve in Bezug auf den Punkt O“ bezeichnet. Sind nun zwei cyklische Curven von gleicher Ordnung $2k$:
$$(x^2+y^2)^k+\psi(x,y)=0, \qquad (x^2+y^2)^k+\omega(x,y)=0$$
vorhanden, so ist:
$$\psi(x,y)-\omega(x,y)=0$$
die Gleichung ihrer „Radicallinie“, oder des Ortes der Punkte, in Bezug auf welche die zwei Curven gleiche Potenz haben; ihre Ordnung ist $\leqq 2k-1$. Sind endlich drei cyklische Curven von gleicher Ordnung $2k$ vorhanden, so existiren für dieselben höchstens $(2k-1)^2$ „Radicalpunkte“. Vi.

R. A. Roberts. On foci and confocal systems of plane curves. Quart. J. 32, 141-182.

Ist ein Kegelschnitt durch die Gleichungen $\theta x=a\theta^2+2b\theta+c$, $\theta y=a'\theta^2+2b'\theta+c'$ gegeben, so dass die Werte 0 und ∞ des Parameters θ den unendlich fernen Punkten der Curve entsprechen, so werden die Brennpunkte durch Nullsetzung der als Functionen des Parameters betrachteten Discriminanten jener Gleichungen gefunden. Die Bemerkung, dass diese Discriminantengleichungen durch eine auf θ ausgeübte projective Transformation nicht geändert werden, ist die Grundlage einer Methode, die der Verf. zur Bestimmung gewisser Curven bei gegebenen Brennpunkten sowie zur Auffindung bemerkenswerter Eigenschaften von confocalen Systemen dieser Curven benutzt.

Den Hauptgegenstand der Untersuchung bilden die Unicursalcurven dritter und vierter Ordnung. Von geometrischen Hülfsmitteln wird kein Gebrauch gemacht. Zahlreiche Abschweifungen in die Formen- und Functionentheorie beleben die Darstellung. Ot.

S. Mangeot. Sur la symétrie de deux figures algébriques par rapport à un point. Nouv. Ann. (3) 19, 451-466.

Der Verf. behandelt hier folgende Aufgabe: Es seien in cartesischen Gleichungen, also mit ganzen Functionen der Punktcoordinaten, zwei ebene Curven, oder auch zwei Flächen, oder endlich zwei Raumcurven, die vertauscht werden können, gegeben; man soll die Bedingung finden, unter welcher ein Punkt ω existirt, in Bezug auf welchen die beiden Figuren zu einander symmetrisch sind; und man soll die Lage dieses Punktes bestimmen. Mz.

F. Kosch. Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Curven. Zeitschr. f. Math. **45**, 161-166.

Es wird bewiesen: Die Curven von der Gleichung $x^\lambda y^\mu = a$ $(\lambda, \mu > 0)$ (polytropische Curven) haben die Eigenschaft, dass auf ihren Normalen durch zwei bestimmte feste Geraden ein Stück abgeschnitten wird, welches durch die Curve selbst halbirt wird; und diese Eigenschaft ist für die angeführten Curven charakteristisch. Es folgt eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes. Stz.

Ch. Michel. Remarques sur quelques théorèmes généraux de géométrie métrique. Nouv. Ann. (3) **19**, 169-176.

Zweck der Arbeit ist der Nachweis des Zusammenhanges zwischen gewissen verschiedenartigen, von Chasles, Liouville und Laguerre herrührenden, metrischen Sätzen, die von Humbert in seinem Aufsatz über das Abel'sche Theorem und geometrische Anwendungen desselben (Journ. de Math, (4) **3**, 237; F. d. M. **19**, 432, 1887; vgl. auch American J. **10**, 258; F. d. M. **20**, 686, 1888) vervollständigt und verallgemeinert worden sind. Die eine Gruppe dieser Sätze handelt von dem durch Laguerre eingeführten Begriff der Orientirung von Geraden einer Ebene, d. i. der Summe der Winkel, welche diese Geraden mit einer festen Axe in ihrer Ebene einschliessen, die andere von dem Centrum der mittleren Entfernungen eines Systems von Punkten. Die allgemeinsten unter diesen Sätzen, aus denen sich die übrigen als Corollare ableiten lassen, lauten: Die Orientirung des Systems der gemeinsamen Tangenten einer festen Curve und einer veränderlichen einer Schar von Curven ist, wenn jeder reelle Brennpunkt der festen Curve Brennpunkt einer Curve der Schar ist, constant, und: das Centrum der mittleren Entfernungen der gemeinsamen Punkte einer festen Curve und einer veränderlichen eines Büschels von Curven bleibt, wenn jede Asymptote der festen Curve Asymptote einer Büschelcurve ist, unverändert dasselbe. Der Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen von Sätzen besteht nun darin, dass man, wenn man in den Sätzen der ersten nach projectiver Verallgemeinerung den einen der beiden beliebigen Punkte, in welche die absoluten Punkte hierbei übergeführt werden, in den anderen hineinrücken lässt, und durch reciproke Polaren so transformirt, dass dieser Punkt in die unendlich ferne Gerade übergeht, unmittelbar zu den Sätzen der zweiten Gruppe gelangt. Der-

angewandte Ausartungsprocess ist derselbe wie der, vermittelst dessen Poncelet in seiner Analyse des transversales aus dem Carnot'schen Transversalensatze den Satz von Cotes über die harmonische Polare eines Punktes in Bezug auf eine algebraische Curve herleitet. Derselbe Process vermittelt auch den Zusammenhang zwischen dem Chasles'schen Satze (vergl. Quetelet, Correspondance 6, 8), dass das Centrum der mittleren Entfernungen der Berührungspunkte eines Systems von parallelen Tangenten einer gegebenen Curve ein fester, von ihrer Richtung unabhängiger Punkt ist, und dem Laguerre'schen (C. R. 1865), dass die Orientirung des Systems der Tangenten aus einem Punkte an eine algebraische Curve derjenigen der Verbindungslinien dieses Punktes mit ihren reellen Brennpunkten gleich ist. T.

H. Valentiner. Om de hyperelliptiske Kurver. Nyt. Tidss. for Math. **10** B, 51-60 (1899).

Eine hyperelliptische Curve n-ter Ordnung χ_n ist eine Curve von der Beschaffenheit, dass eine adjungirte Curve $(n-3)$-ter Ordnung φ_{n-3} immer durch einen bestimmten Punkt der Curve gehen muss, wenn sie durch einen anderen geht.

Solche Curven sind von K. Küpper untersucht in seiner Abhandlung: Ueber die Curven C_p^m von n-ter Ordnung und dem Geschlecht $p > 1$, auf welchen die einfachen Specialscharen $g_2^{(1)}, g_3^{(1)}$ vorkommen (Prag. Abh. (7), **3**; F. d. M. **21**, 647, 1889). Hier werden diese Eigenschaften auf andere Weise gefunden, indem bewiesen wird, dass die hyperelliptischen Curven von der $(p+3)$-ten Ordnung und vom Geschlechte p Projectionen von Raumcurven sind, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und dass alle hyperelliptischen Curven durch eindeutige Transformation in solche Curven übergehen können.

$\varphi_n, \psi_n, \dots$ bezeichnen ebene Curven n-ter Ordnung, oder Kegelflächen n-ter Ordnung. Hyperelliptische Curven n-ter Ordnung oder ihre projicirenden Kegel werden immer χ_n genannt. F_n ist eine Fläche n-ter Ordnung, c_n eine Raumcurve. Ein Punktepaar auf einer χ_n, das so beschaffen ist, dass eine adjungirte φ_{n-3}, welche durch den einen Punkt geht, auch durch den anderen gehen muss, wird einfach ein specielles Punktepaar genannt.

Es wird zuerst bewiesen, dass jede hyperelliptische Curve vom Geschlechte p immer durch eindeutige Transformation in eine χ_{p+3} umgewandelt werden kann, so dass χ_{p+3} die Projection einer Curve ist, welche auf einer F_2 liegt.

Umgekehrt wird gezeigt, dass jede χ_{p+3} die Projection einer c_{p+3} ist, welche auf einer F_2 liegt.

Dies wird mittels einer Reihe von Sätzen bewiesen. Eine Curve φ_p sei einer χ_{p+3} vom Geschlechte p adjungirt; dann geht sie durch alle Schnittpunkte der Verbindungslinien, welche die Punkte der Punktepaare verbinden, die von φ_p auf χ_{p+3} ausgeschnitten werden. Wenn eine adjungirte φ_{p+1} durch alle speciellen Punktepaare geht, die von einer

adjungirten φ_p auf einer χ_{p+3} ausgeschnitten werden, so geht sie auch durch alle die Punkte, in denen die Verbindungslinien der genannten Punktepaare einander schneiden. Eine adjungirte φ_{p+1} der eben genannten Art wird χ_{p+3} noch in Punkten schneiden, die auf einem Kegelschnitt liegen.

Hieraus fliesst leicht der obengenannte Satz, dass φ_{p+3} die Projection einer c_{p+3} ist, welche auf einer F_2 liegt. Die c_{p+3} ist ein Teil der Schnittcurve einer F_2 und einer F_{p+1}. F_{p+1} schneidet F_2 noch in $p-1$ Geraden. Dieses zeigt, dass die Verbindungslinien der speciellen Punktepaare einer χ_{p+3} einen Kegelschnitt k einhüllen.

Eine adjungirte ψ_{p+1}, die χ_{p+3} in p willkürlich speciellen Punktepaaren schneidet, wird χ_{p+3} noch in $p+1$ Punkten schneiden, welche auf einer Geraden liegen, die k berührt.

χ_{p+3} berührt k in allen Punkten, die χ_{p+3} mit k gemein hat.

V.

F. S. Macaulay. Extensions of the Riemann-Roch theorem in plane geometry. Lond. M. S. Proc. **32**, 418-430.

Es handelt sich um eine Ausdehnung des Riemann'schen Satzes, bei welcher an Stelle des ganzen Schnittsystems einer C_n mit einer adjungirten C_{n-3} der gesamte Durchschnitt irgend zweier Curven tritt, welche nicht im Verhältnis der Adjunction zu stehen brauchen. Die Formulirung des Theorems wird durch geschickt gewählte Bezeichnungen der charakteristischen Zahlen für die Curvenscharen sehr einfach.

Sr.

F. Amodeo. Curve di gonalità k con punti fissi nella $(k-1)^{\text{esima}}$ serie canonica e rappresentazioni normali piane delle curve trigonali. Napoli Rend. (3) **6**, 174-191.

Die k-gonalen Curven ${}_kC_p^m$ sind eine Verallgemeinerung der hyperelliptischen Curven, nämlich solche, auf welchen Punktgruppen g_k^1 durch adjungirte Curven ausgeschnitten werden. Der Verf. untersucht gewisse allgemeine Typen solcher Curven, ferner die Punktgruppen $g_{N_{k-2}}^{R_{k-2}}$, speciell für Curven, für welche $\varrho_{k-2}=0$, $t=0$ (s. u.) ist. Die Untersuchung lässt zwei einschränkende Voraussetzungen fallen, welche wesentlich vom Verf. und anderen gemacht worden sind. 1. Es dürfen die kanonischen Punktgruppen, welche durch adjungirte Curven möglichst niedriger Ordnung $C^{m-3-(k-2)}$ ausgeschnitten werden, feste Punkte besitzen. 2. Setzt man das Geschlecht

$$p=(k-1)m-\tfrac{1}{2}(k-1)(k-2)-\theta,$$

wo θ, einer gewissen Ungleichheit genügend, die Zahl ist, um welche sich p vom grösstmöglichen Geschlecht unterscheidet, so soll $\theta \geq 0$ sein, und wird die Klasse der Umhüllungscurve der Verbindungslinien je zweier Punkte einer Punktgruppe der g_k^1:

$$y = \tfrac{1}{2}k(k-1) + \theta$$

durch das Vorhandensein mehrfacher Punkte der Curve um ξ verringert, so soll auch $\xi \geqq 0$ sein, also

$$y = \tfrac{1}{2}k(k-1) + \theta - \xi.$$

Für Curven mit Adjungirten niedrigster Ordnung, wenn die g_k^1 durch Gerade ausgeschnitten werden, ist die Klasse der Umhüllungscurve s der $\frac{1}{2}k(k-1)$-te Teil von y, also:

$$s = 1 + \frac{2(\theta-\xi)}{k(k-1)} = 1 + t.$$

Die wichtigsten Resultate sind alsdann: Jede ${}_kC_p^m$, deren Enveloppe der g_k^1 von der Klasse s ist, lässt sich durch ein-eindeutige Transformation zurückführen auf eine Curve derselben Ordnung mit einem $(m-k)$-fachen Punkte V, mit t je k-fachen Punkten und anderen mehrfachen Punkten, deren Multiplicität kleiner und zusammen gleich ξ ist.

Ferner haben diese Normalcurven, oder k-gonalen Curven mit Adjungirten vom Minimalgrade und von der Species $s > 1$ die $(k-1)$-te kanonische Punktgruppe $g_{N_{k-2}}^{R_{k-2}}$ von der Dimension:

$$R_{k-2} = m - k - 1 - \xi - (k-1)t + \frac{(k-2)\xi - \sigma}{k}$$

mit σ festen Punkten, dem „Ueberschuss“

$$\varrho_{k-2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}t + \frac{(k-2)\xi - \sigma}{k}$$

und der Ordnung $N_{k-2} = kR_{k-2} + \sigma$.

Für hyperelliptische Curven ist z. B. stets $\sigma = 0$; ferner ist bemerkenswert die Relation zwischen ϱ_{k-2} und σ. Unter speciellen Fällen untersucht der Verf. noch die trigonalen Curven und stellt zwei Typen her, auf welche dieselben zurückgeführt werden können. Sr.

F. Amodeo. Contributo alla determinazione delle sovrabbondanze dei sistemi di curve aggiunte alle curve algebriche. Napoli Rend. (3) **6**, 224-232.

In einer früheren Note hat der Verf. gezeigt, dass das Maximum des Ueberschusses ϱ_α eines Systems adjungirter Curven der $(m-3-\alpha)$-ten Ordnung $\varrho_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha)$ ist. Im Anschlusse an eine Formel von Bertini stellt nun der Verf. Typen von Curven auf, für welche das relative Minimum von ϱ_α sich bestimmen lässt, indem $\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)(s-1) \leqq \varrho_\alpha$. Die Untersuchungen erstrecken sich auf den allgemeinen Fall, wo

$$p = \tfrac{1}{2}(k-1\ (2m - s\cdot k - 2) - \xi$$

ist und $\xi \geqq 0$. Sr.

F. Amodeo. Courbes normales trigonales du plan. C. R. **130**, 1744-1745.

Ebenso wie die hyperelliptische Curve vom Geschlecht p in eine ebene Curve $(p+2)$-ter Ordnung mit einem p-fachen Punkte eindeutig transformirt werden kann, besitzt jede trigonale Curve vom Geschlecht p als Normalcurve eine Curve von der Ordnung $\frac{1}{2}p+3$ mit einem $\frac{1}{2}p$-fachen und einem Doppelpunkte, wenn p gerade, und eine Curve von der Ordnung $\frac{1}{2}(p-1)+3$ nur mit einem $\frac{1}{2}(p-1)$-fachen Punkte, wenn p ungerade ist. Der Beweis dieses Satzes soll demnächst in den Annali di Mat. erscheinen. T.

F. Amodeo. Uno sguardo alle curve algebriche in base alla gonalità. Periodico di Mat. (2) **3**, 69-80.

Der Aufsatz giebt den Vortrag wieder, den der Verf. am 9. August 1900 auf dem internationalen Mathematiker-Congresse zu Paris gehalten hat, und ist im wesentlichen ein ausführlicher Bericht über die Forschungen, die Amodeo seit einer Reihe von Jahren auf diesem Gebiete angestellt hat. § 1. Begriff der Gonalität einer Curve. § 2. Methoden und Kunstausdrücke bei der Erforschung der Gonalität. § 3. Die weiteren Ergebnisse bezüglich der algebraischen Curven. § 4. Ergebnisse hinsichtlich der Curven von gegebener Gonalität. § 5. Eigenschaften der k-gonalen Curven, die adjungirte Curven C^{m-k-1} besitzen. § 6. k-gonale Curven ohne feste Punkte für die C^{m-k-1}. § 7. k-gonale Curven mit festen Punkten für die C^{m-k-1}. — Die Bibliographie am Ende des Artikels zählt 19 Schriften auf, von denen dem Verf. 11 angehören.

Lp.

L. Fuchs. Ueber eine besondere Gattung von rationalen Curven mit imaginären Doppelpunkten. Berl. Ber. 1900, 74-78.

Der Verf. ist in einer analytischen Untersuchung zu folgendem Probleme geführt worden: Es soll eine rationale Function $z=F(t)$ der unabhängigen Variable t so gebildet werden, dass (I) die Pole der Function $F(t)$ sämtlich endlich sind und in der positiven Halbebene gelegen sind, (II) die der realen t-Axe in der z-Ebene entsprechende Curve C durch eine endliche Anzahl vorgeschriebener Punkte hindurchgeht, (III) keinem Punkte der Curve C zwei verschiedene oder zusammenfallende reale Lösungen t der Gleichung $z=F(t)$ entsprechen. Die Erfüllung der ersten beiden Bedingungen ist leichter; man setzt:

$$(1)\qquad {}^{(n)}f(x)=(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\cdots(x-\varrho_n),$$
$$(2)\qquad {}^{(n)}g(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n),$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ die Pole der Function $F(t)$ bedeuten, also positiv imaginäre Coordinaten haben, und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ die n reellen Werte von t sind, die den vorgeschriebenen Werten $z_1, z_2, \dots, z_n$ entsprechen. Dann genügt die Function:

$$(3)\quad {}^{(n)}F(t)=\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{c_\varkappa}{t-\varrho_\varkappa},\qquad c_\varkappa=-\frac{g(\varrho_\varkappa)}{{}^{(n)}f'(\varrho_\varkappa)}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{{}^{(n)}f(\beta_\lambda)}{{}^{(n)}g'(\beta_\lambda)}\frac{z_\lambda}{\beta_\lambda-\varrho_\varkappa}$$

den Bedingungen (I) und (II). Schwieriger ist aber die Erfüllung von (III). Zu diesem Zwecke bedient sich der Verf. eines Recursionsverfahrens, indem er annimmt, dass die Function (3) für $n=m$ die geforderte Eigenschaft (III) besitzt, und dann die Werte ϱ_{m+1}, β_{m+1}, z_{m+1} so wählt, dass die zu der Function ${}^{(m+1)}F(t)$ gehörige Curve ebenfalls nur imaginäre Doppelpunkte besitzt. Die nähere Begründung der nur andeutungsweise dargelegten Methode soll in einer späteren Abhandlung erfolgen. Lsg.

Weitere Litteratur.

P. Cousin. Recherche des points doubles des courbes unicursales. Grenoble Ann. **11**, 210-217 (1899).

Aufstellung einer Gleichung des Grades $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ mit einer Unbekannten zur Bestimmung der Doppelpunkte einer unicursalen C_n; Erläuterung der Methode für $n=4$. Lp.

H. Guradze. Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde behandelt mittels einer besonderen Art bilinearer Formen. Diss. Breslau. 68 S. 8°.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Bartl. Eine Aufgabe der analytischen Geometrie. Pr. I. Deutsche Staatsrealschule in Prag. 19 S.

Der Verf. versucht eine eindeutige Lösung der Aufgabe, die Winkel eines Dreiecks zu berechnen. Der Winkel zweier Geraden. Die Winkel des Dreiecks. Die Halbirungslinie des Winkels zweier Geraden. Das verdienstvolle Vorhaben des Autors erscheint dadurch beeinträchtigt, dass er bei seiner Lösung eine gezeichnete Figur voraussetzt. Man vergl. den Aufsatz von Sommer, Věstník der böhm. Professoren 1898 (böhmisch) S. 208. Den Abschluss bildet die Aufstellung und Discussion der Gleichung einer Curve vierter Ordnung, des geometrischen Ortes aller Punkte, für welche das Product der Entfernungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden constant ist. Sda.

J. Griffiths. Note on the representation of a circle by a linear equation. London M. S. Proc. **32**, 316-320.

Jeder Punkt P in der Ebene des Fundamentaldreiecks ABC kann eindeutig bestimmt werden als Schnitt der drei Kreise PBC, PCA, PAB, und jeder dieser Kreise ist definirbar durch eine Coordinate, z. B. in Folge des Potenzsatzes durch das Verhältnis des Abschnittes der einen geschnittenen Seite zur anderen; in diesem Coordinatensystem besteht

zwischen den drei Coordinaten des Punktes P eine fundamentale Gleichung zweiten Grades, und jede lineare nicht homogene Gleichung stellt einen Kreis dar. R. M.

C. van Aller. De herleiding van een kegelsnee op de assen als hare vergelijking op een scheefhoekig coördinatenstelsel gegeven is. Nieuw Archief (2) **4,** 278-283.

Die Aufgabe, einen auf die Hauptaxen bezogenen Kegelschnitt zu bestimmen, dessen Gleichung in Bezug auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem gegeben ist, wird hier durch Coordinatentransformation gelöst. Die dabei angewandte Methode giebt zur Bestimmung der Axenrichtungen eine ebenso einfache Anleitung, wie in dem gebräuchlichen Falle des rechtwinkligen Systems. Bei den Curven mit Mittelpunkten wird der Coordinatenanfang als mit dem Mittelpunkte zusammenfallend vorausgesetzt. Ot.

Leau. Note sur quelques propriétés des coniques. Soc. Philom. Bull. (9) **2,** 74-76.

Eine Ellipse sei auf ihre Hauptaxen bezogen. Die nicht durch die Brennpunkte F und F' gehende Axe möge die im Punkte M des Kegelschnittes errichtete Normale in P schneiden. Die Anwendung des Ptolemäischen Lehrsatzes auf das Viereck $PFMF'$ führt dann zu der Gleichung $MP\cdot FF' = PF\cdot MF' + PF'\cdot MF$, aus der $\frac{PF}{PM} = \text{const.}$ folgt. Auf ähnliche Weise wird die Constanz mehrerer anderer Abstandsverhältnisse bewiesen. Ot.

E. Janisch. Die Kegelschnitte als Erzeugnisse der zwei-zweideutigen Focalstrahlen-Verwandtschaft. Monatsh. f. Math. **11,** 170-175.

Zieht man durch einen Brennpunkt F eines Centralkegelschnittes K einen Strahl und weist diesem die nach seinen Schnittpunkten mit K durch den andern Brennpunkt F_1 gezogenen Strahlen als entsprechende Strahlen zu, so sind hierdurch die Büschel (F), (F_1) zwei-zweideutig auf einander bezogen. Diese Verwandtschaft wird durch folgende Aufgabe einfach dargestellt:

Es seien $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zwei Kreise und A ein Aehnlichkeitspunkt derselben; ferner heisse a irgend ein durch A gehender Strahl, welcher $\mathfrak{K}$ in P und Q, $\mathfrak{K}'$ in P' und Q' schneiden möge, und hierbei sollen P, P' und Q, Q' nicht homologe, sondern inverse Punkte sein. Endlich werden auf a die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ construirt, so dass $A\mathfrak{P} = PP'$ und $A\mathfrak{Q} = QQ'$. Welche Curve beschreiben $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$, wenn a sich um A dreht? Es wird nun gezeigt, dass die fragliche Curve die Fusspunktencurve eines Centralkegelschnittes für A als Pol ist. Die Hauptaxe des Kegelschnittes fällt in die Centrale der Kreise $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$. Wird A zum Coordinatenanfang ge-

nommen, und haben die Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ respective die Gleichungen:

$$(\mathfrak{K})\quad (x-m)^2+y^2=r^2,$$
$$(\mathfrak{K}')\quad (x-km)^2+y^2=k^2r^2,$$

so wird die Gleichung dieses Centralkegelschnitts

$$\left[\frac{(X+2m)-(k+1)m}{(k+1)r}\right]^2+\frac{Y^2}{(k+1)^2(r^2-m^2)}=1,$$

wo X, Y die laufenden Coordinaten eines Punktes desselben sind. Es werden nun die Beziehungen zwischen den Bestimmungselementen dieses Kegelschnittes, der Lage der Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ und der Grösse der Radien ermittelt, woraus mehrere Sätze gewonnen werden. Nachher wird eine Sonderuntersuchung für die Parabel angestellt. Mz.

L. van Emelen. Définition et détermination des foyers d'une conique. Ens. math. **2**, 423-442.

Dieser Aufsatz besteht aus zwei Teilen: Im ersten Teile spricht der Verf. von den verschiedenen Definitionen, die man für die Brennpunkte eines Kegelschnittes gegeben hat, um dann die folgende zu bevorzugen: Ein Brennpunkt eines Kegelschnitts ist ein Punkt von der Eigenschaft, dass je zwei durch ihn gehende zu einander senkrechte gerade Linien in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind. Der Verf. giebt verschiedene Gründe dafür an, dass diese wohlbekannte Eigenschaft als Definition vor anderen den Vorzug verdiene. Im zweiten Teile wird gezeigt, wie diese Definition auf elegantere und bequemere Weise als sonst zur Bestimmung der Brennpunkte führt. Mz.

E. M. Radford. Some elementary methods in analytical geometry. Messenger (2) **30**, 52-60.

I. Die Umkreise von Dreiecken, die einer Parabel ein- oder umbeschrieben sind. — Analytische Behandlung mit Hülfe der Darstellung $x=am^2$, $y=2am$, wenn m Wurzel der kubischen Gleichung $m^3+pm^2+qm+r=0$. II. Ableitung der Brennpunkte und Leitlinien des allgemeinen Kegelschnitts aus den ersten Principien durch Zurückführung auf die Form

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=e^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)^2.$$

III. Einige Formeln in trilinearen Coordinaten mit Anwendungen auf die Kegelschnitte. Lp.

F. Dingeldey. Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung und die Bedingungen für den Kreis bei allgemeinen projectiven Coordinaten. J. für Math. **122**, 186-197.

Es wird zunächst die Bedingung dafür, dass ein Kegelschnitt ein Kreis sei, unter der allgemeinsten Annahme über Coordinatendreieck und Einheitspunkt, in einfachster Weise abgeleitet in der Gestalt des identischen Uebereinstimmens zweier quadratischen ternären Formen. Hierauf gestützt, wird dann die Discriminante der quadratischen Gleichung für die Hauptaxentransformation eines auf allgemeine projective Dreieckscoordinaten bezogenen Mittelpunktskegelschnitts als Summe von zwei Quadraten in durchsichtiger Form erhalten. Gleichzeitig ergiebt sich eine neue Lösung der entsprechenden, zuerst von Henrici (J. für Math. **64**, 187, 1864) gelösten Aufgabe für die ebenen Schnitte einer auf rechtwinklige cartesische Coordinaten bezogenen Fläche zweiter Ordnung. Der Arbeit sind historische Bemerkungen mit Litteraturangaben über das Problem des Nachweises der Realität der Hauptaxen und seine Verallgemeinerungen vorausgeschickt.

T.

F. Morley. On the metric geometry of the plane n-line. American M. S. Trans. **1**, 97-115.

Die Umkreise der vier Dreiecke, die sich aus je drei der Seiten eines gegebenen Vierseits bilden lassen, gehen durch einen Punkt, den Miquel'schen Punkt, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kreise, dem Steiner'schen Kreise des Vierseits; weiter liegen die Miquel'schen Punkte der fünf Vierseite, die man aus je vier Seiten eines Fünfseits bilden kann, auf einem Kreise, dem Miquel'schen Kreise, und ihre Steiner'schen Kreise gehen durch einen Punkt, den Steiner'schen Punkt des Fünfseits. Diese merkwürdigen Sätze sind durch Clifford (Messenger **5**) und Kantor (Wiener Berichte **76** und **78**; F. d. M. **9**, 424, 1877 und **10**, 385, 1878) weiter fortgebildet worden, indem ausser Fünfseiten nach einander Sechsseite, Siebenseite u. s. w. betrachtet werden, die immer wieder zu Kreisen führen, die einen Punkt gemeinsam haben, und zu Punkten, die immer wieder auf je einem Kreise liegen (Clifford'sche Punkte und Kreise); andrerseits liegen auch die Mittelpunkte der fünf Steiner'schen Kreise der fünf in einem Fünfseit enthaltenen Vierseite wieder auf einem Kreise (dem Kantor'schen Kreise des Fünfseits). In dem vorliegenden Aufsatze gelingt es dem Verf. durch den Gebrauch der imaginären Coordinaten $(x+iy)$ und die Darstellung der betrachteten Punkte und Linien durch einen Parameter t von dem absoluten Betrage Eins diese ganze Theorie in sehr eleganter Weise mit dem geringsten Aufwand von Rechnung im Zusammenhange darzustellen und durch neue Gesichtspunkte zu bereichern. Neu ist zunächst der Satz, dass die Mittelpunkte der sechs Kantor'schen Kreise der sechs in einem Sechsseit enthaltenen Fünfseite wieder auf einem Kreise liegen u. s. w. fort, der also ein einfacheres Verhalten als das alternirende Verfahren der Clifford-Kantor'schen Sätze aufdeckt. Als wesentlich für die Behandlung des n-Seits erweisen sich gewisse charakteristische Constanten, durch die sich diese Morley'schen Mittelpunktskreise in sehr einfacher Weise analytisch ausdrücken; diese Ausdrücke führen sofort zu dem ferneren Ergebnis, dass

die zu einem n-Seit gehörigen n Mittelpunktskreise sich auch stets in einem Punkte schneiden, und auf eine mit diesen Kreisen eng verknüpfte Pascal'sche Schneckenlinie, aus deren Gleichung sich diejenigen der Kreise durch Polarisiren ergeben; ihr Knotenpunkt ist der gemeinsame Punkt der Kreise. Allgemein bezeichnet der Verf. die Linien, deren Gleichungen durch ein- oder mehrmaliges Polarisiren aus einer ganzen rationalen Function des Parameters t hervorgehen, als Penosculanten der durch das Polynom dargestellten Curve und gelangt, von den Penosculanten der Schneckenlinie ausgehend, zu neuen Gesichtspunkten für den behandelten Gegenstand, gleichzeitig zu einer Ausdehnung der Sätze von den Mittelpunktskreisen auf eine Figur, in der an Stelle der geradlinigen n-Seite andere treten, gebildet von Kreislinien, die durch einen Punkt gehen, und deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise liegen. Die wichtige Rolle, welche die eingeführten Penosculanten rationaler Curven für die behandelte Gruppe von Sätzen spielen, zeigt sich dann ferner in den beiden ausser der Schneckenlinie betrachteten Fällen der Ellipse und der Hypocykloide. T.

F. H. Loud. Sundry metric theorems concerning n lines in a plane. American M. S. Trans. **1**, 323-338.

Den interessanten Betrachtungen von Morley über die Gruppirung der Kreise, die aus den Umkreisen der von je drei von n gegebenen Geraden gebildeten Dreiecke und ihren Mittelpunkten entspringen (vgl. das vorhergehende Referat), wird durch eine andere Interpretation der von ihm gegebenen analytischen Entwickelungen eine neue Seite abgewonnen. Diese führt auf eine Reihe ganz ähnlicher Sätze über das Verhalten von Kreisen, die aus den Berührungskreisen (statt Umkreisen) aller möglichen aus n Geraden zu bildenden Dreiseite und ihren Mittelpunkten hervorgehen. Den Ausgangspunkt bildet hier der Satz, dass die vier Punkte, welche von je drei von vier gegebenen Geraden gleiche Entfernung haben, auf einem Kreise C_4 liegen, wobei die Eindeutigkeit der Bestimmung eines jeden solchen Punktes durch Festsetzung des Richtungssinnes der Geraden herbeizuführen ist. Fünf, auch dem Richtungssinne nach, gegebene Geraden bestimmen fünf solche Kreise C_4, deren Mittelpunkte wieder auf einem Kreise C_5 liegen, und die sich selbst in einem Punkte N_5 treffen u. s. w. Ausserdem wird der Zusammenhang zwischen dieser Gruppe von Sätzen mit den Morley'schen Sätzen auseinandergesetzt und dann das gegenseitige Verhalten der verschiedenen Kreissysteme ermittelt, die zwar demselben n-Seit entspringen, von denen aber der Richtungssinn einzelner Seiten gewechselt wird. Dies führt im speciellen Falle des Vierseits zu einer interessanten Configuration, und eine andere Behandlungsweise des Vierseits führt noch zu einer zweiten Configuration, die ein specieller Fall einer solchen eines $2p$-Seits ist, die von den Clifford'schen Kreisen sowohl der darin enthaltenen $(2p-1)$-Seite als der durch rechtwicklige Drehung von je $2p-1$ Seiten um ihre Schnittpunkte mit der $2p$-ten Seite entstehenden $(2p-1)$-Seite

gebildet wird; diese Kreise sind paarweise orthogonal und gehen durch einen festen Punkt, den Brennpunkt einer Parabel p-ter Ordnung, welche die Seiten des $2p$-Seits zu Tangenten hat. T.

H. E. Timerding. Ueber lineare Systeme von Kegelschnitten. Gött. Nachr. 1900, 103-116.

In jedem Complex, d. h. linearen System dritter Stufe, von Kegelschnitten giebt es bekanntlich vier Doppelgerade, die gemeinsamen Tangenten der Schar von Kegelschnitten, die auf denen des Complexes ruhen. Sind $X_0 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ (wo $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 0$ ist) ihre Gleichungen, so ist jeder Complexkegelschnitt in der Form $\sum_{i=0}^{3} s_i X_i^2 = 0$ darstellbar; interpretirt man die s_i als räumliche homogene Punktcoordinaten, so ist damit der Complex auf den Punktraum eindeutig abgebildet. Dabei entsprechen den zerfallenden Kegelschnitten des Complexes die Punkte einer Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten, den Ecken des Koordinatentetraeders. Neben dieser Abbildung wird noch eine andere untersucht. Diejenigen Punkte des Raumes nämlich, die dem quadratischen Netze von Complexkegelschnitten entsprechen, die selbst auf einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt K der Ebene ruhen, bilden eine dem Fundamentaltetraeder umschriebene Fläche zweiter Ordnung; diese artet in einen Kegel aus, wenn K eine Doppelgerade ist, also alle Complexkegelschnitte diese berühren; die Spitzen dieser den Geraden der Ebene zugeordneten Kegel bilden wieder die obige Fläche dritter Ordnung, die deshalb als Discriminantenfläche bezeichnet wird; ist K ein Kegelschnitt des Complexes selbst, so ist die entsprechende Fläche die erste Polare des den Kegelschnitt repräsentirenden Raumpunktes. Schliesslich wird noch kurz auf die, übrigens durch keine Punkttransformation zu erreichende, „Hauptverwandtschaft" zwischen den Kegelschnitten der Ebene eingegangen; in dieser stehen zwei Kegelschnitte, wenn ihnen zwei dem Fundamentaltetraeder umschriebene Flächen zweiter Ordnung entsprechen, die durch Vertauschung der Coordinaten mit ihren reciproken Werten in einander übergehen. Vorausgeschickt ist der Arbeit eine elegante Durchführung der Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades nach Darboux (Liouv. J. (2) **18**, 220; F. d. M. **5**, 80, 1873), die in der Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, von denen der eine auf dem anderen ruht, besteht. T.

A. Darreye. Polare Felder und Kegelschnitte mit gemeinsamem Polardreieck. Diss. Strassburg. C. u. J. Goeller, 41 S. 8°.

Bekanntlich ist durch ein Polardreieck, einen Pol und dessen Polare ein polares Feld samt seiner Ordnungscurve bestimmt. Der Verf. sucht zunächst die Bedingungen für die Realität der Ordnungscurve auf und

betrachtet alsdann die Construction des polaren Feldes bei speciellen Lagen des bestimmenden Pols und seiner Polare (Mittelpunkt, Axe, Brennpunkt, Tangente mit Berührungspunkt, Asymptote). Bei letzterer Gelegenheit wird unter anderem gezeigt, dass die Mittelpunkte der Hyperbeln des Netzes mit einem gegebenen Polardreieck, deren Asymptoten durch einen Punkt O gehen, auf einer C_3 liegen, welche durch die Ecken des Polardreiecks und die unendlich fernen Punkte seiner Seiten geht und O zum Doppelpunkt hat. Weiter werden die Parabeln des Netzes mit gegebenem Polardreieck untersucht, wobei auf eine frühere Arbeit von Meister (F. d. M. **18**, 563, 1886) hätte Rücksicht genommen werden sollen. Zum Schluss wird die Art des durch ein Polardreieck, Pol und Polare bestimmten Kegelschnitts untersucht. Wö.

R. Gilbert. Sur les réseaux de coniques. Revue de Math. spéc. **10**, 569-577, 593-602.

Sind $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Gleichungen dreier auf dasselbe Fundamentaldreieck bezogenen Kegelschnitte, die nicht zu einem Büschel gehören, so bilden die Kegelschnitte des Systems $S \equiv \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ ein Punktnetz; analog wird ein Tangentialnetz definirt, ferner der Begriff conjugirter Netze. Der Ort des Punktes, dessen Polaren in Bezug auf die drei Kegelschnitte sich in einem Punkte treffen, ist eine Curve dritter Ordnung, die „Jacobi'sche Curve“ des Netzes; eine analoge Bedeutung hat für ein Tangentialnetz die „Cayley'sche Curve“ (dritter Klasse). Verf. giebt einige Eigenschaften dieser Curven an und untersucht dann Netze, welche Doppelgeraden und Doppelpunkte enthalten. — In der zweiten Arbeit untersucht Verf. solche Netze, die einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben, und dann ganz allgemein die Fälle, in denen die Jacobi'sche oder Cayley'sche Curve zerfällt oder einen Doppelpunkt, bez. eine Doppeltangente besitzt. Endlich wird das Problem behandelt, wann ein Netz durch seine Jacobi'sche oder Cayley'sche Curve bestimmt ist. Wbg.

K. Petr. Ueber die Poncelet'schen Polygone. Rozpravy **9**, No. 2, 23 S. (Böhmisch).

Enthält eine directe Lösung des Problems, die Bedingung aufzufinden, welcher die Coefficienten der Gleichungen zweier Kegelschnitte genügen müssen, wenn einem von ihnen ein m-Eck eingeschrieben werden soll, welches dem anderen umschreibbar ist. Die Lösung liefert gleichzeitig die bekannte algebraische Deduction einer Multiplication elliptischer Functionen. Rücksichtlich einer Bemerkung des Autors sei constatirt, dass das obenerwähnte Problem unabhängig von der Theorie der elliptischen Functionen vor mehreren Jahren und in anderer Weise von Emil Weyr und G. Darboux, ferner in neuester Zeit von J. C. Kluyver behandelt worden ist. Sda.

E. J. NANSON. A theorem relating to polygons described about a conic. Messenger (2) **30**, 108-110.

„Wenn zwei Vielecke von n Seiten einem Kegelschnitte umgeschrieben sind, so liegen ihre $n(n-1)$ Ecken auf einer Curve von der Ordnung $n-1$, und wenn drei solche Vielecke umgeschrieben sind, so haben die drei dadurch bestimmten Curven $(n-1)$-ter Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte gemeinschaftlich." Verallgemeinerung eines Satzes von Dixon in Quart. J. **26**, 212-214 (F. d. M. **25**, 994, 1893). Lp.

B. CLUZEAU. Note sur une question posée aux examens de l'École Normale. Revue de Math. spéc. **10**, 452.

Man betrachte eine ebene Curve dritter Ordnung und einen Büschel von Kegelschnitten, die durch vier feste Punkte dieser Curve gehen; jeder Kegelschnitt schneidet die Curve noch in zwei Punkten; die Verbindungslinie derselben geht durch einen festen Punkt. Geometrischer Beweis: die Curve dritter Ordnung wird als Projection einer auf einer Fläche zweiten Grades liegenden Curve vierter Ordnung aufgefasst. Wbg.

G. FONTENÉ. Lieux de points remarquables dans des triangles circonscrits à une conique et inscrits à une autre. Revue de Math. spéc. **10**, 473-474.

Die geometrischen Oerter für den Umkreismittelpunkt, den Schwerpunkt, den Höhenschnittpunkt und den Mittelpunkt des Neunpunktekreises der im Titel angegebenen Dreiecke sind Kegelschnitte; die Enveloppen der diesen Dreiecken conjugirten und umbeschriebenen Kreise sind anallagmatische Curven vierter Ordnung. Wbg.

A. KRAHE. Sobra el punto de Gergonne de las cónicas inscritas en un triángulo. Progreso mat. (2) **2**, 101-102.

Wenn der Gergonne'sche Punkt einen Kegelschnitt durchläuft, der einem Dreiecke umgeschrieben ist, so berührt der eingeschriebene Kegelschnitt stets die Polare des Punktes bezüglich des umgeschriebenen Kegelschnittes. Tx. (Lp.)

A. SCHWARZ. Ueber die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie. Monatsh. f. Math. **11**, 71-96.

Fortsetzung der Arbeit, über welche in F. d. M. **30**, 523, 1899 referirt wurde (hinsichtlich der Bezeichnung vergleiche man dieses Referat).

I. Die Krümmungsinvolution auf einer Ellipse und die Kiepert'sche Hyperbel eines Dreiecks. Für alle Tripeldreiecke ist die Summe der

Quadrate der Seiten constant. Zu jedem Tripeldreieck gehören zwei andere (associirte) Tripeldreiecke, deren Schwerlinien den Seiten der ersteren proportional sind. Damit wird eine Formel für die Dreiecksfläche als Function der Schwerlinien gewonnen. Weiter wird die Gruppe der affinen Transformationen betrachtet, welche die unendlich fernen Punkte von K invariant lassen. Für diese Gruppe ist die Fläche eine Invariante; ihre Bahncurven sind ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte, zu welchen der Involutionskegelschnitt K' der Krümmungsinvolution und der imaginäre Kegelschnitt K'' gehören, in Bezug auf welchen alle Tripeldreiecke conjugirt sind. Sodann wird die Gleichung der Kiepert'schen Hyperbel aufgestellt und für die Oerter der Punkte, welche von den Höhenschnittpunkten, resp. den Umkreismittelpunkten der Tripeldreiecke erfüllt werden, ebenfalls zwei zu K, K' und K'' ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen gefunden.

II. Die desmische Configuration $(27_9, 81_3)$. Es seien auf einer C_3 Systeme von neun Punkten derart bestimmt, dass die durch zwei Curvenpunkte k und k' gehenden und in je einem der neun Punkte die C_3 osculirenden Kegelschnitte alle durch einen Punkt der C_3 gehen. Zwei solche Systeme bestimmen ein drittes, indem die 81 Geraden, welche je einen Punkt des einen mit einem Punkte des andern verbinden, sich je zu neun in neun Punkten der C_3 schneiden. Die drei Systeme bilden also eine desmische Configuration $(27_9, 81_3)$, welche nun studirt wird; insbesondere werden die darin enthaltenen Configurationen $(9_3, 9_3)$ bestimmt und die „vollständigen Systeme" der Configuration, welche aus neun Geraden derselben bestehen, von denen keine zwei sich auf C_3 schneiden, betrachtet. Wö.

V. Retali. Piccole note sulle quistioni 354, 355, 380, 381, 382, 401 e 406. Periodico di Mat. (2) **2**, 162-164.

Kleine Bemerkungen zu den Lösungen der betreffenden Fragen, meistens zu dem Zwecke, die einzelne Aufgabe von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu beleuchten. Lp.

G. Pirondini. Sur quelques propriétés des coniques. Teixeira J. **14**, 75-81.

Es seien (A, B) und (C, C_0) zwei feste Punktepaare, die bezw. auf den Axen Ox und Oy liegen, ferner (M, N) zwei bewegliche Punkte von AB, welche der Bedingung

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = \text{const.}$$

genügen. Die Geraden CM und C_0N, ebenso CN und C_0M schneiden sich in zwei Punkten, welche zwei Kegelschnitte beschreiben, wenn M und N auf der Geraden AB verrückt werden. Diese Kegelschnitte werden vom Verf. untersucht. Tx. (Lp.)

G. Cardoso-Laynes. Quistione 499. Periodico di Mat. (2) **2**, 265-267.

Es sei C eine auf rechtwinklige Axen OX, OY bezogene Curve, M ein auf ihr beweglicher Punkt. Man trage auf dem Lote von M zur x-Axe nach beiden Seiten von M aus die Strecke OM ab; MP und MQ seien solche Strecken. Die Punkte P und Q beschreiben eine Curve C'; die Transformation (C, C') zu untersuchen und folgende Resultate zu bestätigen: 1. C eine Gerade, C' eine gleichseitige Hyperbel. 2. C Kreis um O als Centrum, C' zwei Kreise. 3. C Kreis mit OX als Tangente in O, C' ein gerades Dreiblatt. 4. C Kreis mit OY als Tangente in O, C' ein Doppelblatt. 5. C eine rechtwinklige Strophoide mit Scheitel in O und mit OX als Hauptaxe, C' ein Kreis und eine Cissoide. 6. C eine Cissoide mit Spitzen in O und mit OX als Axe, C' eine bicirculare Curve fünfter Ordnung. 7. C ein Kappa mit Doppelpunkt in O und OX als Tangente in O, C' zwei rechtwinklige Strophoiden. 8. C eine Kreuzcurve mit OX und OY als Axen, C' zwei Inversen des Dreiblatts. — Lösung von Retali, der litterar-historische Anmerkungen zu der Transformation macht (Krafft Comm. Ac. Petrop. **3**, 1732; über de Longchamps, Brocard vergl. F. d. M. **23**, 782, 1891). Lp.

G. Cardoso-Laynes. Luoghi ed inviluppi (esercizi di geometria analitica). Periodico di Mat. (2) **3**, 127-129.

Fortsetzung der Uebungsaufgaben, deren erste 28 Nummern im vorigen Jahrgang enthalten waren (F. d. M. **30**, 519, 1899); die Anzahl steigt dadurch auf 50. Lp.

E. N. Barisien. Problemi diversi. Periodico di Mat. (2) **3**, 29-30.

Sieben Aufgaben der analytischen Geometrie, meist von den Kegelschnitten ausgehend, unter Angabe der Resultate. Der durch seine Findigkeit für solche Aufgaben ausgezeichnete Verf. liefert in ihnen ein vortreffliches Uebungsmaterial. Die Lösungen anderer unter den Nummern 526-530 gestellten findet man auf S. 136-140 desselben Bandes.

Lp.

E. N. Barisien. Esercizi di geometria analitica. Periodico di Mat. (2) **2**, 256-258.

Bei einem Dreiecke ABC wird die Basis $BC = 2a$ der Lage und Grösse nach als fest angenommen. Wenn dann zwischen den trigonometrischen Functionen der beiden Winkel B und C irgend welche Relationen festgesetzt werden, so kann nach dem Orte der Ecke A und des Höhenschnittes H gefragt werden. In dem vorliegenden Artikel werden die Resultate zu 17 solchen Aufgaben mitgeteilt, bei einzelnen der Fragen auch noch die Oerter anderer merkwürdiger Punkte des Dreiecks. Lp.

E. N. Barisien. Sur les triangles inscrits dans une ellipse et circonscrits à un cercle concentriques. Mathesis (2) **10**, 84-86, 113-116, 136-139.

72 Sätze bezüglich dieser Dreiecke (vergl. Mathesis (2) **9**, 269).
Mn.

A. J. C. Allen. Question 6085. Ed. Times **72**, 115-117.

Durch den Höhenschnitt K eines Dreiecks ABC wird eine Gerade gezogen, welche die Seiten BC, CA, AB bezw. in D, E, F schneide. Ein Punkt P auf der Geraden genügt der Bedingung

$$\frac{PE\cdot PF}{KE\cdot KF}\cdot\sin 2A+\frac{PF\cdot PD}{KF\cdot KD}\cdot\sin 2B+\frac{PD\cdot PE}{KD\cdot KE}\sin 2C=\text{const.}$$

Dann ist der Ort von P ein Kreis dem Radius

$$\varrho=R\sqrt{1+\cos A\cos B\cos C},$$

concentrisch zum Umkreise von ABC. Beweis von J. G. Smyly.
Lp.

J. F. d'Avillez. Sur quelques propriétés de trois cercles concentriques à une ellipse. Teixeira J. **14**, 70-74.

Die betreffenden Kreise sind der orthoptische Kreis und die beiden Chasles'schen Kreise. Einige Beziehungen zwischen den Coordinaten (x, y) der Punkte dieser Kreise und denjenigen der Fusspunkte der aus denselben Punkten an die Ellipse gezogenen Normalen werden aufgestellt.
Tx. (Lp.)

R. Guimarães. Ecuación del círculo de Joachimsthal. Progreso mat. (2) **2**, 14-15.

Ableitung der Gleichung des Joachimsthal'schen Kreises, d. h. des Kreises, der durch drei der Fusspunkte der von einem Punkte auf einen Kegelschnitt gefällten Normalen und denjenigen Punkt geht, der dem vierten Fusspunkte diametral gegenüber liegt. Tx. (Lp.)

Andrieu. Sur le point de Fagnano. Mathesis (2) **10**, 105-109.

Zahlreiche Eigenschaften des auf einem Ellipsenquadranten AmB liegenden Punktes m, für den die Differenz der Bogen Am und Bm gleich dem Abstande des Mittelpunktes von der Normale in m ist.
Mn. (Lp.)

V. Daniel. Question 14189. Ed. Times **72**, 42-44.

Bei einem in O rechtwinkligen Dreiecke OXY sei α der Winkel

bei Y. Man fälle von O das Lot OP auf XY, von P das Lot PP_1 auf OY, von P_1 das Lot P_1P_2 auf OP, von P_2 das Lot P_2P_3 auf PP_1, allgemein so fortfahrend das Lot P_nP_{n+1} auf $P_{n-2}P_{n-1}$, so gelangt man zuletzt zu einem Grenzpunkte S in OPY. In ähnlicher Weise erhält man im Dreiecke OPX den Grenzpunkt S'. Die beiden Punkte S und S' sind die Brennpunkte einer dem Dreiecke OXY eingeschriebenen Ellipse mit der grossen Halbaxe $a = p/\sqrt{1 + \cos^2\alpha \sin^2\alpha}$, wo $p = OP$. Ferner erscheinen OX und OY von S und S' aus, bezw. unter rechten Winkeln; mithin sind die Dreiecke OSX und $OS'Y$, OSY und $XS'Y$, $OS'X$ und XSY paarweise ähnlich. Schneidet SS' die Katheten OX in T, OY in T', so ist $OS^2 \cdot OT' = OS'^2 \cdot OT$. Ist das Dreieck OXY gleichschenklig, so hat die Ellipse die Excentricität $1/\sqrt{5}$. Beweise vom Verf. und von R. Tucker. Lp.

D. Edwardes. Question 5655. Ed. Times **78**, 106-107.

Ein Indreieck einer gegebenen Parabel habe den Brennpunkt zum Schwerpunkt. Dann berührt jede Seite desselben eine zweite Parabel von gleicher Hauptaxe und einem viermal so grossen Parameter. Der Brennpunkt der gegebenen Parabel ist der Pol ihrer Schnittsehne; der Scheitel liegt auf dem Umkreise des Dreiecks. Lp.

Fr. Meyer. Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel. Zeitschr. f. Math. **45**, 170-173.

Eine elementare Eigenschaft der Hyperbel: „dass das von einem Bogen, einer Asymptote und den durch die Endpunkte des Bogens zu der anderen Asymptote gezogenen Parallelen begrenzte Flächenstück dem zu dem Bogen gehörigen Mittelpunktssector gleich ist“, wird aus einer Integralformel abgeleitet. Stz.

C. Grolleau. Note de géométrie. Revue de Math. spéc. **10**, 578.

Einfacher geometrischer Beweis des Satzes von J. Renoy (Nouv. Ann. 1885): Ist ein rechtwinkliges Dreieck einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben, so schneiden die Katheten desselben auf den Asymptoten zwei Segmente ab, deren Mitten auf dem Neunpunktekreis des Dreiecks liegen. Wbg.

A. Barozzini. Quistione 518. Periodico di Mat. (2) **3**, 87-88.

Sind P_1, P_2, P_3 die Projectionen des Punktes P auf die Seiten des Dreiecks ABC, so ist der Ort von P, falls AP_1, BP_2, CP_3 durch einen und denselben Punkt Q gehen sollen, im allgemeinen eine Hyperbel, die durch die Mittelpunkte des In- und Umkreises, den Lemoine'schen

Punkt u. s. w. geht. Der Ort von Q ist eine kubische Curve durch die Ecken $A, B, C,$ den Schwerpunkt, den Gergonne'schen Punkt u. s. w. Ableitung dieser Eigenschaften von Cl. Merizzi und E. N. Barisien.

Lp.

V. Retali. Quistioni 481, 482. Periodico di Mat. (2) **2**, 170-171.

Die Aufgaben fordern die Bestimmung der Fusspunktencurven für die Evoluten von Ellipse, Hyperbel und Parabel bezüglich eines beliebigen Punktes der Ebene als Pol. Retali, der die Lösung der Fragen giebt, sucht zunächst die reciproke Polare der Evolute bezüglich eines beliebigen Kreises auf und wendet dann den Satz an, dass die gesuchte Fusspunktencurve die Inverse jener reciproken Polare ist. Für die beiden Kegelschnitte mit Mittelpunkt ergiebt sich eine bicirculare Curve sechster Ordnung mit vierfachem Punkte und orthogonalen Doppeltangenten im Ursprunge der Coordinaten. Bei der Parabel ist die gesuchte Curve eine circulare Curve vierter Ordnung. Lp.

Weitere Litteratur.

E. N. Barisien. Lieux relatifs à une ellipse et à un cercle concentriques. Bull. math. spéc. **6**, 23-26, 43-47, 56-58, 70-72, 85-88.

E. N. Barisien. Note relative à deux ellipses coaxiales. Bull. math. spéc. **6**, 97-98.

Der Fall, wenn $a'/a + b'/b = 1$. Lp.

E. N. Barisien. Résumé des lieux géométriques relatifs à une ellipse et à un cercle concentrique et intérieur à l'ellipse. Bull. math. spéc. **6**, 116-118, 129-131.

E. N. Barisien. Lieux géométriques concernant les triangles qui ont un côté constant et la différence des angles adjacents à ce côté, égale à 90°. J. de math. spéc. **25**, 124-128, 142-144, 155-159, 173-176.

A. Droz-Farny. Sur le cercle focal de l'ellipse. Bull. math. spéc. **6**, 73.

H. R. Hugi. Begleitcurven eines Punktes in Bezug auf eine Curve zweiter Ordnung. Diss. Bern. 35 S. 4° u. 1 Taf.

E. Kurtz. Das Netz der Kegelschnitte, die ein gegebenes Poldreieck haben. Diss. Münster. 23 S. 8°.

Ch. Michel. Démonstration du théorème de Faure. Bull. math. spéc. **6**, 152-153.

G. Pirondini. Sur quelques propriétés remarquables de l'hyperbole. J. de math. spéc. **25**, 138-141.

O. Scherrer. Ueber Kegelschnitte im Raume. Pr. Frauenfeld. 35 S. 4°.

D. Andere specielle Curven.

H. S. White. Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations. Amer. M. S. Trans. 1, 1-8.

P. Gordan. Formentheoretische Entwickelung der in Herrn White's Abhandlung über Curven dritter Ordnung enthaltenen Sätze. Amer. M. S. Trans. 1, 9-13.

H. S. White. Plane cubics and irrational covariant cubics. Amer M. S. Trans. 1, 170-181.

P. Gordan. Die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve. Amer. M. S. Trans. 1, 402-413.

Diese vier Aufsätze bringen eine bemerkenswerte Weiterentwickelung der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung C nach geometrischer wie formentheoretischer Richtung.

Die Arbeiten von White gehen von dem allgemeinen Gedanken aus, die Theorie der irrationalen Covarianten, die in letzter Zeit erhebliche Fortschritte in der Formentheorie und Geometrie gezeitigt hat, für die Theorie der Curven C zu verwerten. Im besonderen gehen diese Arbeiten von einem fruchtbaren Hilbert'schen Verfahren aus (F. d. M. 20, 199, 1888).

Die Covariante zweiten Grades in den Coefficienten einer ternären kubischen Form $C = a_x^3$ ist $(aa'u)^2\, a_x\, a'_x$. Gleich Null gesetzt, stellt sie, je nachdem die x oder die u als variabel betrachtet werden, den Polkegelschnitt der Geraden (u) oder den Polarkegelschnitt des Punktes (x) dar. Ersetzt man die Variabeln (u) durch die Symbole einer ternären Form n-ter Ordnung A_x^n, so stellt $(aa'A)\, a_x\, a'_x\, A_x^{n-2} = 0$ die „Polo-n-ic" der Curve $A = A_x^n = 0$ bez. C dar.

Hilbert fragt nach den Kegelschnitten $A = A_x^2 = 0$, die mit ihren „Polkegelschnitten" coincidiren, so dass also $(aa'A)^2\, a_x\, a'_x = \lambda A_x^2$. Es ergeben sich nur zwei verschiedene Werte $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{6}S}$, wo S die bekannte Invariante von C bedeutet. Jede der beiden Formen A enthält noch drei linear homogen eingehende willkürliche Parameter, d. h. die betreffenden Kegelschnitte bilden noch je ein Netz „$P(A)$" resp. „$P(B)$." White nennt solche Kegelschnitte „autopoloconics." Behufs Untersuchung dieser beiden Netze legt White die Hesse'sche Normalform $a_x^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1\, x_2\, x_3 = 0$ zu Grunde. Bedeuten A_{ik} die Coefficienten von A, und setzt man, den erhaltenen Bedingungen gemäss, $\frac{A_{23}}{A_{11}} = \frac{A_{31}}{A_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{33}} = A$, so kommt $4mA\,(m + A) + 1 = 0$. Mithin giebt es zwei Werte „A" und „B" für A. Nun sind diese beiden Netze von autopoloconics bez. C die Polarkegelschnittnetze zweier Curven dritter Ordnung $A = A_x^3 = 0$, $B = B_x^3 = 0$, die aus C dadurch hervorgehen, dass man m durch A, resp. B ersetzt. Aus Symmetriegründen folgt dann der Satz: „Die drei Curven dritter Ordnung A, B, C bilden ein geschlossenes System derart, dass die beiden Netze der

autopoloconics einer jeden die Polarkegelschnittsnetze bez. je einer der beiden andern sind.“ Zugleich ersieht man, dass die drei Curven A, B, C eine gemeinsame Cayley'sche Curve besitzen, und dass umgekehrt die drei Curven dritter Ordnung, die bekanntlich zu einer gegebenen Cayley'schen Curve gehören, durch die erstere Eigenschaft charakterisirt sind.

Eine analoge Betrachtung geht dualistisch vor. Eine Klassencurve $u_a^n = 0$ wird vermöge $(aa'u)^2 a_x a'_x$ transformirt in $(aa'u)^2 a_u a'_a u_a^{n-2} = 0$; geht sie dabei in sich über, so heisst sie „autopolar“ bez. C.

Es giebt dann wiederum zwei getrennte Scharscharen von autopolaren Klassenkegelschnitten „(α)“ und „(β)“, und diese sind zugleich die Polkegelschnitte zweier Curven dritter Klasse mit gemeinsamer Hesse'scher Curve, und letztere ist auch Hesse'sche Curve derjenigen Curve dritter Klasse, die (in Reye'schem Sinne) apolar zu C ist.

Zwischen den beiden Netzen (A) und (B) einerseits und den beiden Scharscharen (α) und (β) andererseits herrscht eine Reihe interessanter Beziehungen. In der anschliessenden Abhandlung liefert Gordan mit symbolischen Mitteln die zugehörigen formentheoretischen Entwickelungen, indem er eine allgemeine Form a_x^3 zu Grunde legt. Er stützt sich dabei auf eine grundlegende, von ihm in Gemeinschaft mit Clebsch herausgegebene Arbeit (F. d. M. **5**, 96, 1873). Die Hauptcombinanten des Polarkegelschnittnetzes $a_x^2 a_y$ sind die Elementar-Covarianten von $(abc)\, a_x^2 b_y^2 c_z^2$, d. h. die Hesse'sche Form Δ und die Cayley'sche Form s; alle andern Combinanten sind simultane Formen von Δ und s. Bezeichnet $\pi = u_\pi^3$ die zu $C = a_x^3$ apolare Form dritter Klasse, so besitzen C und π dieselben Haupt-Combinanten; die Hesse'sche Curve von C ist die Cayley'sche von π und die Hesse'sche von π die Cayley'sche von C.

Die Untersuchung von White wird dahin charakterisirt, Curven zu finden, welche entweder die Cayley'sche oder die Hesse'sche mit C gemein haben. Die invarianten Bildungen von $\varkappa C + \lambda \Delta$ werden mittels des Aronhold'schen Processes $\delta C = \Delta$ berechnet. Daraufhin lassen sich die Curven aufstellen, die dieselbe Hesse'sche und die dieselbe Cayley'sche Curve besitzen; von jeder Art giebt es ein Tripel.

Aus den erhaltenen Formeln folgen noch insbesondere die Apolarität der Netze (A) und (B), sowie die Relationen, welche ein Tripel A, B, C charakterisiren. In der zweiten Abhandlung stellt Gordan die Curven $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ auf, deren Hesse'sche und Cayley'sche Curven gegebene Curven dritter Ordnung, bezw. Klasse sind. Das Ergebnis richtet sich ganz nach der Natur der gegebenen Curve; es kann 3 verschiedene $\bar{\Delta}$, $\bar{s}$ geben, oder eine, oder ganze Scharen, oder endlich keine. Zu dem Behuf geht eine genaue Einteilung der Curven dritter Ordnung C nach ihren projectiven Ausartungsmerkmalen voraus. Man hat 10 Arten von C, die mit $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$ bezeichnet werden:

1. Die C_1 haben keinen Doppelpunkt. Die Invariante S ist $\neq 0$.
2. Die C_2 haben keinen Doppelpunkt, aber es ist $S = 0$.
3. Die C_3 haben einen Doppelpunkt.

4. Die C_4 haben zwei Doppelpunkte, d. h. sie zerfallen in einen Kegelschnitt und eine ihn in zwei Punkten schneidende Gerade.
5. Die C_5 haben drei Doppelpunkte, d. h. sie zerfallen in ein Dreieck.
6. Die C_6 haben einen Rückkehrpunkt.
7. Die C_7 zerfallen in einen Kegelschnitt und eine ihn berührende Gerade.
8. Die C_8 zerfallen in drei durch einen Punkt gehende Gerade.
9. Die C_9' arten in zwei Gerade aus, von denen eine doppelt zählend ist.
10. Die C_{10}' arten in eine dreifache Gerade aus.

Für diese 10 Arten von Curven C werden mittels geeigneter „normaler" Coordinatendreiecke Normalformen angegeben, sodann die Werte der Covarianten Δ, s und der Invarianten S, T, R, und deren charakteristische Beziehungen aufgestellt. Hat man auf Grund der letzteren Relationen erkannt, zu welcher Art eine vorgelegte Curve C gehört, so handelt es sich noch darum, die Curve in die bezügliche Normalform zu transformiren, mit anderen Worten, das zugehörige Normaldreieck (das Product seiner Seiten, resp. Ecken) aufzustellen.

Das erfordert bei C_1' eine biquadratische und eine kubische Gleichung, bei C_2 und C_5 eine kubische, bei C_3 und C_4 eine quadratische Gleichung; zu den fünf letzten C gehören Scharen von Normaldreiecken.

Nunmehr lassen sich die Arten der Curven C bestimmen, von denen gegebene Curven C Hesse'sche, resp. Cayley'sche sind, und damit die Arten der Curven $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$, die zu den verschiedenen C gehören. Den Curven C_1 und C_2 entsprechen je 3 Curven $\bar{\Delta}$, den Curven C_3, C_4, C_6 je eine Curve $\bar{\Delta}$, endlich den C_5, C_9, C_{10} Scharen von $\bar{\Delta}$. Andererseits entsprechen den Curven C_1 und C_2 je 3 Curven $\bar{s}$, den übrigen C Curvenscharen. Zum Schlusse werden die $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ für die C_1 und C_2 ohne Hülfe der Normalformen bestimmt, was eine Ersparnis in der Auflösung von Hülfsgleichungen mit sich bringt.

White dehnt in der zweiten Abhandlung seine Transformations-Ueberlegungen auf höhere Covarianten aus. Jede Covariante (Comitante), von demselben Grade in zwei contragredienten Reihen von Variabeln x, u lässt sich als Symbol einer Transformation auffassen. So geht vermöge der bilinearen Form $a_x u_a$ als „Operator" aus A_x^3 durch „vollständige" Transformation die neue Form $A_a A_{a'} A_{a''} a_x a_x' a_x''$ hervor, andererseits durch „partielle" Transformation die neuen Formen

$$A_a A_x^2 a_x = A'^3_x,\ A_a' A'^2_x a_x = A''^3_x \text{ etc.},$$

und analog für höhere, als bilineare Formen. Hier kann man wiederum nach solchen Curven fragen, die durch derartige Transformationen in sich übergehen; es werden das irrationale Covarianten von $C = A_x^3 = 0$ sein. Für eine A_x^3 giebt es sieben Covarianten gleicher Ordnung und

Klasse, drei von Ordnung und Klasse (2, 2), und vier von Ordnung und Klasse (3, 3). In der ersten Abhandlung waren Kegelschnitte untersucht, die bei vollständiger Transformation von der Gattung (2, 2) invariant blieben. Nunmehr geht der Verf. dazu über, Curven dritter Ordnung zu studiren, die sich bei partiellen Transformationen von der Gattung (2, 2), sowie solche, die sich bei vollständigen Transformationen von der Gattung (3, 3) invariant verhalten. Im ganzen ergeben sich so acht neue Curven C, die alle äquianharmonisch sind; ihnen stehen dualistisch acht Curven dritter Klasse gegenüber.

So z. B. ergiebt sich bei Verwendung des Operators $\Theta = (aa'u)^2 a_x a'_x$ (wenn C wieder mit a_x^3 bezeichnet wird) durch Rechnungen, die den früheren analog sind: „Die autopolo-cubics einer allgemeinen Curve C sind einmal die beiden früheren Curven dritter Ordnung, deren Polarkegelschnitte autopolo-conics bez. C sind, sodann aber noch vier Büschel specieller Curven dritter Ordnung.“ Von diesen Büscheln ist etwa das erste von der Gestalt:

$$c_1 (x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) + c_2 (x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) = 0.$$

Von den vier Operatoren (3, 3) lautet der erste: $G_3 = (acu)(abu)^2 b_x c_x^2$; die bei ihm invarianten Curven dritter Ordnung bestehen einmal aus acht getrennten, sodann noch aus dem syzygetischen Büschel $\varkappa C + \lambda \Delta$.

Zwischen diesen neuen Curven dritter Ordnung, resp. Klasse herrschen wiederum durchsichtige Apolaritätsbeziehungen.

Der Referent ist auf die vorliegenden, ersichtlich verallgemeinerungsfähigen Untersuchungen ausführlicher eingegangen nicht nur, weil sie an sich ein nicht geringes Interesse beanspruchen, sondern auch weil die neue Zeitschrift, in der sie erschienen sind, in Deutschland noch wenig verbreitet sein dürfte. My.

R. Bricard. Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (1, 1) entre cubiques focales. S. M. F. Bull. 28, 39-51.

Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche einem Viereck eingeschrieben werden können, ist eine specielle Curve dritter Ordnung (cubique focale), welche auch dadurch charakterisirt ist, dass sie die beiden unendlich fernen Kreispunkte, und zwar als ein Steiner'sches Paar, enthält. Die Tangenten in diesen Punkten schneiden sich also in einem Punkte a der Curve. Der von den beiden andern von a ausgehenden Tangenten gebildete Winkel ist durch die absolute Invariante der Curve ebenso wie diese durch ihn eindeutig bestimmt. Man kann bei zwei derartigen Curven, wenn sie dieselbe Invariante besitzen, eine (und noch eine zweite) birationale Correspondenz angeben, in welcher die Schnittpunkte a und a' der an die jeweilige Curve in den unendlich fernen Kreispunkten gelegten Tangenten einander entsprechen. Solche Correspondenzen untersucht der Verf. Von den Resultaten sei eines hervorgehoben: Ein der einen Curve eingeschriebenes Viereck, dessen Gegenecken Steiner'sche Paare bilden, und das correspondirende

der anderen Curve eingeschriebene Viereck haben proportionale Seiten. Nun sind es eben solche Vierecke, von denen man in der eingangs angegebenen Weise zu der Curve gelangt. Die ebenfalls gültige Umkehrung des Satzes besagt daher: Wird ein Viereck derartig variirt, dass die Verhältnisse seiner Seiten constant bleiben (wobei es natürlich nicht mit sich ähnlich zu bleiben braucht), so behält die aus den Brennpunkten der eingeschriebenen Kegelschnitte bestehende Curve ihre absolute Invariante bei, und die Ecken der verschiedenen Vierecke sind einander in birationalen Correspondenzen der Curven zugeordnet. Stz.

H. F. Stecker. Non-Euclidian properties of plane cubics. American J. **22**, 31-40.

Verf. überträgt von den Kegelschnitten her auf die ebenen Curven dritter Ordnung die Begriffe der absoluten Punkte, absoluten Tangenten, Asymptoten, Brennpunkte und Brennlinien, asymptotischen Punkte, Leitlinien u. s. w. und stellt eine grosse Zahl von Relationen zwischen den „nichteuklidischen Abständen“ derselben auf; die Wiedergabe derselben im Referat erscheint wegen der Unübersichtlichkeit der Sätze kaum möglich. R. M.

R. A. Roberts. Question 6387. Ed. Times **73**, 100-101.

Beweis des Satzes, dass die Wendetangenten einer ebenen kubischen Curve sich zwölfmal zu je sechs so anordnen lassen, dass die zusammengehörigen sechs einen Kegelschnitt berühren. Beweise von R. P. Paranjpye und H. G. Gharpurey. Lp.

W. R. Roberts. Question 5893. Ed. Times **72**, 110-111.

Ein Büschel von Kegelschnitten wird beschrieben, die eine doppelte Berührung mit dem Polarkegelschnitte der Geraden besitzen, welche die drei Wendepunkte einer kubischen Curve verbindet, indem die Berührungssehne dieselbe Gerade ist. Ein jeder Kegelschnitt des Büschels schneidet die kubische Curve in sechs Punkten, deren Tangenten alle einen anderen Kegelschnitt desselben Büschels berühren. Beweis von G. B. Mathews. Lp.

Lagrange. Sur les cubiques strophoïdales. Nouv. Ann. (3) **19**, 66-74.

Sind O und A zwei Punkte, (Δ) eine Gerade, M ein veränderlicher Punkt auf (Δ), P und P_1 zwei Punkte auf OM, so dass

$$MP = MP_1 = MA,$$

so ist der Ort von P und P_1 eine circulare C_3, welche der Verf. cubique strophoïdale nennt. Und zwar ist jede circulare C_3, deren imaginäre Asymptoten sich auf der Curve selbst schneiden, eine Curve der be-

treffenden Art. Der Aequitangentialpunkt von P liegt auf der Parallele durch P_1 zu (Δ); zwei Aequitangentialpunkte liegen mit ihrem Tangentialpunkte auf einem Kreise durch O. Jede cubique strophoïdale kann auf unendlich viele Arten als Ort der Brennpunkte der einem Viereck einbeschriebenen Kegelschnittschar angesehen werden. Zuletzt wird eine Tangentenconstruction der Curve angegeben. Wō.

A. Barozzini. Quistione 519. Periodico di Mat. (2) **8**, 88-89.

Auf der Axe der rechtwinkligen Strophoide drei Punkte A, B, C zu bestimmen, für welche in Beziehung auf jeden beliebigen Punkt P der Curve die Gleichung gilt $\overline{PB}^2 = PA \cdot PC$. Lösung von C. Merizzi. Lp.

E. N. Barisien. Podarie rispetto alla parabola. Periodico di Mat. (2) **8**, 115-120.

Erörterung der Formen der Fusspunktencurven der Parabel für beliebige Lagen des Poles nebst Entwickelung einer Reihe von Sätzen besonders über den Punkt Q, in welchem die Asymptote jener Curven von ihnen geschnitten wird. Berechnung des Inhaltes der Fläche zwischen der Fusspunktencurve und ihrer Asymptote, wenn der Pol auf der Hauptaxe der Parabel liegt. Lp.

E. Ciani. Un teorema sopra la quartica di Klein. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 565-566.

E. Ciani. Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane. Annali di Mat. (3) **5**, 33-55.

Eine ebene, allgemeine C_4 kann, wie Scorza gezeigt hat (Math. Ann. **52**, 457-461; F. d. M. **30**, 491, 1899), als Covariante S von 36 anderen C_4 aufgefasst werden. Die Klein'sche C_4, die bei der einfachen ternären linearen Substitutionsgruppe von 168 Transformationen, G_{168}, invariant bleibt, hat bekanntlich die Eigenschaft, ihre eigene Covariante S zu sein. Der. Verf. fragt nach den anderen 35 C_4, von denen die Klein'sche C_4 Covariante S ist. Sein Resultat lautet: 14 dieser 35 C_4 sind Invarianten für je eine der 14 Untergruppen 24. Ordnung der G_{168}, die mit der Oktaedergruppe isomorph sind; die 21 übrigen C_4 bleiben bei je einer der 21 Untergruppen G_8 der G_{168} invariant. Diese 21 C_4 sind projectiv nicht verschieden; die 14 C_4 hingegen teilen sich in zwei Gruppen von je 7. Zwei C_4 derselben Gruppe sind projectiv nicht verschieden, zwei C_4 aus zwei verschiedenen Gruppen sind projectiv verschieden. Die erste Note teilt die Resultate ohne Beweis mit, die zweite Arbeit liefert den Beweis. Der zweite Aufsatz enthält vorher eine Zusammenstellung der Eigenschaften der zu der G_{168} isomorphen Modulargruppe, die aus der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen

entspringt, zum Schluss eine Besprechung der Lage der 24 Wendepunkte der Klein'schen C_4 auf gewissen Kegelschnitten. Ly.

E. Ciani. I gruppi finiti di collineazioni piane dotati di una quartica invariante irriduttibile. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 1170-1176.

Bekanntlich bleibt bei der einfachen ternären linearen Gruppe von 168 Transformationen eine ebene C_4, die Klein'sche Curve vierter Ordnung, invariant. W. Dyck (Math. Ann. **17**, 510) hat ebenfalls eine ebene C_4 gefunden, die durch eine Gruppe von 98 Collineationen in sich übergeht. Der Verf. fragt nach allen endlichen, projectiv verschiedenen ebenen Collineationsgruppen, die eine irreducible ebene C_4 in sich überführen. Ausser den beiden schon angegebenen Fällen findet er noch eine G_{48}, welche eine specialisirte Caporali'sche Curve invariant lässt, eine G_{16}, welche die Curve $x_3^2\, x_1\, x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$ in sich überführt, sowie Gruppen, die aus den Potenzen ein und derselben Substitution bestehen und nicht in den voraufgehenden Gruppen enthalten sind. Der Verf. giebt nur die Resultate an; bezüglich der specialisirten Caporali'schen Curve (vergl. Ciani: Napoli Rend. (3) **2**, 126-144; F. d. M. **27**, 441, 1896) sei noch angeführt: Sie besitzt vier Undulationspunkte, die auf einer Geraden aequianharmonisch liegen; die vier Undulationstangenten treffen sich in einem Punkte; die 16 Wendepunkte der Curve bilden auf vier Geraden vier harmonische Systeme; diese vier Geraden gehen durch den Schnittpunkt der vier Undulationstangenten und sind aequianharmonisch. Die vier Tangenten in vier harmonisch gelegenen Wendepunkten gehen immer durch einen Undulationspunkt. Die G_{48} ist isomorph mit der Tetraedergruppe. Von den betrachteten Gruppen sind nur G_{168} und G_{48} so beschaffen, dass sie kein invariantes Dreieck besitzen. Ly.

C. Rosati. Alcune considerazioni intorno al metodo di Hesse per lo studio delle bitangenti di una curva piana del quart' ordine. Batt. G. **38**, 165-170.

Der Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung, damit 2 C_3 als eine C_4 und daher ∞^3 C_4 sechsfach berührend und zu demselben System des ersten, resp. zweiten Typus gehörend angesehen werden können, ist, dass sie einen gemeinsamen dreifach berührenden Kegelschnitt, resp. drei Schnittpunkte in gerader Linie besitzen, wird mittels der Methode von Hesse (J. für Math. **49**, 279), bei welcher die Punkte der Ebene den Flächen eines F_2-Netzes entsprechen, in den Raum übertragen. Dabei entsprechen den Kegeln des Netzes, deren Spitzen auf einer Raumcurve sechster Ordnung Γ^6 liegen, die Punkte einer allgemeinen C_4, den F_2 des Raumes die C_3 der Ebene, den Doppelebenen des Raumes die C_4 sechsfach berührenden C_3 der Ebene; endlich einem Ebenenbüschel ein System von sechsfach berührenden C_3 mit gemeinsamem

dreifach berührendem Kegelschnitt; in diesem System giebt es $4C_3$, mit denen der Kegelschnitt einen einfachen Berührungspunkt und eine Stelle vierpunktiger Berührung hat. Die einer Ebene entsprechende C_3 hat dieselbe absolute Invariante wie die C_3, auf der die Berührungspunkte der die Ebene berührenden Netzflächen liegen. Zuletzt wird die Configuration der 280 Schnittlinien der Ebenen durch je drei Basispunkte des Netzes ohne und die 840 Schnittlinien der Ebenen durch je drei Basispunkte des Netzes mit gemeinsamem Basispunkt, welchen 280 Kegelschnitte, resp. 480 Gerade in der Ebene entsprechen, studirt. Wō.

H. W. Richmond. On the inflexions of a binodal quartic curve. Quart. J. **32**, 63-65.

Es ist bekannt, dass die sechs Wendepunkte einer Unicursalcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitte liegen, und dass die sechs Wendetangenten einen Kegelschnitt berühren. Für die Curve vierter Ordnung mit nur zwei Doppelpunkten liegt die Frage nahe, ob ihre zwölf Wendepunkte das vollständige Schnittsystem dieser Curve mit einer Curve dritter Ordnung bilden. Die Antwort lautet verneinend: durch die zwölf Wendepunkte und die zwei Doppelpunkte kann stets eine unendliche Schar von Curven vierter Ordnung gelegt werden. Damit die Wendepunkte auf einer Curve dritter Ordnung liegen, bedarf es der Erfüllung einer einzigen Bedingung, die sich als eine einfache Gleichung zwischen den Coordinaten der Doppelpunkte ergiebt, wenn zur Darstellung der Curve elliptische Functionen benutzt werden. Ot.

C. Ch. Engberg. The cartesian oval. Nebraska Grad. Bull. **1**, 23-34.

In dieser Arbeit leitet der Verf. das cartesische Oval aus der Parabel:

$$\text{(A)} \qquad y^2 - 2Ay - 2Bx + C^2 = 0$$

in folgender Weise ab. Er setzt $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ an Stelle von y, und erhält dadurch in gemischten Coordinaten (ϱ, x) die Gleichung des cartesischen Ovals:

$$\text{(B)} \qquad \varrho^2 - 2A\varrho - 2Bx + C^2 = 0.$$

Dies giebt folgende Entstehung der Curve (B) aus der Curve (A):

Die Fusspunkte der y-Ordinaten von (A) werden nach dem Coordinatenanfang O verlegt, während die oberen Endpunkte der Ordinaten auf diesen Ordinaten selbst herabgleiten, bis ihr Abstand von O der Ordinate gleich wird. Diese neuen oberen Endpunkte sind dann Punkte des cartesischen Ovals. Dadurch geht z. B. die Scheiteltangente der Parabel in die Doppeltangente des cartesischen Ovals über. Die Eigenschaften des Ovals werden auf diese Weise aus den Eigenschaften der Parabel gefunden. Später werden Scharen von Ovalen betrachtet, indem in der Gleichung:

$$\varrho^2 \pm 2A\varrho - 2Bx + C^2 = 0$$

erst A, dann C als veränderlicher Parameter angenommen wird; auch wird diejenige Schar betrachtet, in welcher B und $A^2 - C^2$ constant bleiben, und noch anderes mehr.

Am Schluss wird die Gleichung der Jacobiana von drei Ovalen der Gleichung:

$$(x^2 + y^2 - 2Bx + C^2)^2 = 4A^2(x^2 + y^2)$$

mit A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 aufgestellt; daraus werden bei besonderen Annahmen Sätze über diese Jacobiana gewonnen. Auch wird die Hesse'sche Curve des Ovals in Betracht gezogen. Mz.

R. A. Roberts. Question 5895. Ed. Times 73, 25-26.

Der Ort des Schwerpunktes eines Bogens der Lemniskate von gegebener Länge ist die Fusspunktencurve eines bestimmten concentrischen und coaxialen Kegelschnitts. Lp.

F. P. Ruffini. Della ipocicloide tricuspide. Bologna Rend. (2) **5**, 1900-1901, 13 S.

Zuerst bemerkt der Verf., dass die dreispitzige (oder Steiner'sche) Hypocykloide „in Bezug auf die Punkte ihrer Ebene Potenz hat" (vergl. F. P. Ruffini: Delle curve algebriche che hanno potenza in rispetto a ogni punto del loro piano ovvero in rispetto ad alcuni dei loro proprii punti. Bologna Mem. (4) **10**, 337-360; F. d. M. **21**, 696, 1889), d. h. dass, wenn A_1, A_2, A_3, A_4 die Schnittpunkte der Curve mit einer durch einen Punkt O ihrer Ebene gehenden Geraden sind, das Product $OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4$ für alle Strahlen von O einen und denselben Wert hat. Dann entwickelt er manche merkwürdigen Polareigenschaften der betrachteten Curve. Vi.

A. Labrousse. Sur le problème du concours général de Math. spéc. de 1899. Revue de Math. spéc. **10**, 449-451.

Verf. giebt eine Reihe interessanter Sätze über die Entstehungsweise einer Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten als Enveloppe gewisser Geraden oder Ellipsen. Wbg.

E. N. Barisien. Note sur certaines courbes dérivées des épi- et hypocycloïdes. Teixeira J. **14**, 121-160.

In dieser Arbeit werden zahlreiche bemerkenswerte Curven untersucht, die aus den Epi- und Hypocykloiden hervorgehen. Für jede derselben wird die Gleichung bestimmt, die Quadratur und die Rectification durchgeführt. So wird die Fusspunktencurve der Epicykloide für den Mittelpunkt des festen Kreises als Pol ermittelt. Es folgen die Curven,

deren Coordinaten die Ableitungen der Coordinaten der Epicykloide in Bezug auf den veränderlichen Winkel sind, die Eingehüllte des den Mittelpunkt des beweglichen Kreises mit einem beliebigen Punkte der Epicykloide verbindenden Strahles, die Parallelcurven der Epicykloide und ihre Fusspunktencurven, die Evolvente der Epicykloide, die äquitangentiale Curve der Epicykloide, die schiefen Evoluten derselben Curve, u. dergl. mehr. Tx. (Lp.)

V. Amato. **Sulla pedale della spirale logaritmica.** Batt. G. **38,** 149-152.

Beweis des Satzes (Cesàro: Geometria intrinseca p. 53), dass die Fusspunktencurve der logarithmischen Spirale in Bezug auf den asymptotischen Punkt eine logarithmische Spirale ist, mittels gewöhnlicher Coordinaten. Wö.

L. Orlando. **Sur la développante de cercle et la spirale logarithmique.** Mathesis (2) **10,** 110-112.

Fusspunktencurve dieser Linien; Curven, die durch das Rollen einer dieser Linien auf sich selbst entstehen. Mn. (Lp.)

B. N. Cama. **Questions 14177 and 14207.** Ed. Times **72,** 60-61, 113.

Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten, die bei der Spirale $r = be^{a \operatorname{cotg} \varphi}$ einen gegebenen Winkel β einschliessen, ist eine andere Spirale $r \sin \psi = b \sin \varphi e^{(a+\psi-b)\operatorname{cotg}\varphi}$, wo ψ durch die Gleichung $\operatorname{cotg} \psi \sin \beta = k - \cos \beta$ gegeben, bk der verticale Abstand eines Punktes der ursprünglichen Curve ist, gehörig zu dem Polarwinkel β. Der Ort berührt den Umkreis des Dreiecks aus den beiden Tangenten und der Berührungssehne. Wenn $\beta = \frac{1}{2}\pi$ ist, so lässt sich eine Parabel zeichnen, welche die Spirale in den Berührungspunkten berührt und die Berührungssehne als Brennsehne besitzt. Der Parameter der Parabel ist $PQ \cdot \sin^2 \gamma$, wo PQ die Berührungssehne und γ den Neigungswinkel von PQ gegen die Axe der Curve bezeichnet. Der Winkel γ ist constant gleich $2(\psi - \varphi)$ für alle orthogonalen Tangentenpaare der Spirale. Der Ort des Pols der Parabel für veränderliche Lagen von PQ ist eine Spirale um denselben Pol. Beweis von J. Cullen, G. Birtwistle und Cama selbst, der in Ed. Times **73,** 63 unter No. 14239 eine Fortsetzung giebt. Lp.

F. Gomes Teixeira. **Sobre los focos de las espíricas de Perseo.** Progreso mat. (2) **2,** 306-310.

Entwickelung eines elementaren Verfahrens zur Ermittelung der Brennpunkte der durch die Gleichung $y = \sqrt{R^2 - (l + \sqrt{x^2 + c^2})^2}$ dargestellten

Curven, wobei die Plücker'sche Definition der Brennpunkte angenommen wird. Tx. (Lp.)

A. F. Jakovkin. Note über die Quadratur der ebenen Curven und Kubatur der Flächen.

Es handelt sich um einige Formeln, welche den Flächeninhalt der parabolischen Curven und den Rauminhalt der Flächen zweiten Grades mit Hülfe der Coordinaten zweier Punkte darstellen. Si.

Weitere Litteratur.

Ch. Michel. Sur les points d'inflexion des cubiques. Bull. math. spéc. **6**, 99-103.

J. de Vries. La quartique trinodale. Arch. Musée Teyler (2) **7**, 1-58.

J. Gilbart Smyly. A note on certain curves connected with the double normals of plane bicircular quartics and cyclides. Dublin Proc. (3) **5**, 370-374 (1899).

R. C. Archibald. The cardioid and some of its related curves. Diss. Strassburg: J. Singer. VI + 32 S. gr. 8⁰ + 3 Taf.

A. L. Hjelmman. Sur les courbes planes du sixième ordre à deux points triples. Helsingfors Öfv. **41**, 26-38 (1899).

Ch. Michel. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Bull. math. spéc. **6**, 103-108.

A. Aubry. Sur divers trisecteurs. J. de Math. spéc. **24**, 74-77, 90-95.

E. Wölffing. Bibliographie der 3- und n-Teilung des Winkels. Böklen Mitt. (2) **2**, 21-27 (über 200 Titel).

D. L. Rossi. Teoria generale della parabola e della catenaria; appunti di analisi matematica che possono essere utili nello studio della catenaria telegrafica. Cagliari: Tipografia commerciale. 77 S. 8⁰.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

C. F. Gauss. Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas 1827). Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. Zweite revidirte Auflage. Leipzig: Wilh. Engelmann. 64 S. 8⁰ (Ostwald's Klassiker No. 5).

Die erste Auflage dieser deutschen Uebersetzung der grundlegenden Arbeit von Gauss auf dem Gebiete der allgemeinen Flächentheorie ist in F. d. M. **21**, 744, 1889, angezeigt worden. Es ist sehr erfreulich,

dass eine neue Auflage nötig geworden ist. Der Herausgeber hat in seinen Anmerkungen (S. 52-64) die seit dem Jahre 1889 erschienenen hauptsächlichsten bezüglichen litterarischen Erscheinungen nachgetragen und dadurch seine Ausgabe für die studirende Jugend nützlich und zeitgemäss gemacht. Lp.

B. J. Bukrejev. Vorlesungen über die Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die geometrischen Elemente der Flächentheorie. Kiew. VII + 304 S. (Russisch.) (Auch: Kiew. Univ. 1898, No. 1, 9, 12; 1899, No. 12; 1900, No. 5, 6, 7.)

Die erste systematische Darstellung der Flächentheorie in russischer Sprache. Der Verf. spricht im Vorwort die Ansicht aus, dass die Darstellungsmethoden der älteren Autoren sich am besten zur Einführung in das Studium der Theorie eignen. Deshalb weicht die Darstellung beim Verf. von der kinematischen Methode bei G. Darboux ab, wie auch von Hause aus auf die Einführung der Differentialinvarianten und -Parameter verzichtet wird.

Kap. 1-3 sind den Hauptformeln der Theorie, Kap. 4 den geodätischen Linien gewidmet (eine von Bonnet abweichende Ableitung der geodätischen Krümmung ist in den Nachträgen gegeben). Kap. 5 und 6 behandeln einige Fragen über Verwandtschaften und Abbildungen (conforme, flächengleiche, sphärische Abbildung, Verwandtschaft nach den Normalen, nach den geodätischen Linien). Der Verf. hält es für wichtig, die Studirenden mit den Elementen der Kartenprojection vertraut zu machen. Die Kap. 7, 9, 10 beschäftigen sich mit den wichtigsten Flächenarten: Regelflächen, Minimalflächen, pseudosphärischen Flächen. Im Kap. 8 behandelt der Verf. die Evoluten der Flächen und die Weingarten'schen Flächen, in den Schlusskapiteln 11 und 12 die Flächendeformation. Einige weitere Ausführungen sind in den Nachträgen gegeben.

Der Verf. beabsichtigt, die schwierigeren Fragen (wie Strahlensysteme, unendlich kleine Deformationen u. s. w.) in einer Special-Vorlesung zu behandeln. Si.

A. Demoulin. Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur. S. M. F. Bull. 28, 180-183.

Verf. leitet mit Benutzung einer bekannten Eigenschaft der sogenannten Wronski'schen Determinante einen Teil der in No. 376 der Leçons von Darboux enthaltenen Ergebnisse in anderer, übrigens wohl bekannter Form her und wendet die gefundenen Formeln auf die Untersuchung der Torsion einer durch ihre Schmiegungsebene definirten Curve an. Auch wird eine Relation zwischen den Torsionen zweier in Bezug auf eine Kugel prolarreciproken Curven hergeleitet. Gz.

N. J. Hatzidakis. Sur une relation géométrique entre deux courbes. Darboux Bull. (2) **24,** 42-48.

N. J. Hatzidakis. Note au sujet de l'article „Sur une relation géométrique entre deux courbes". Darboux Bull. (2) **24,** 190.

Unter Verallgemeinerung des Problems der gemeinschaftlichen Hauptnormalen (wegen der hierzu gehörigen Litteratur vgl. Schell's „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung," 2. Aufl. S. 115) wird die Frage behandelt, ob die Normalen einer Curve, die längs der Curve mit den Hauptnormalen in den correspondirenden Punkten einen constanten Winkel bilden, Haupt- oder Binormalen einer anderen Curve sein können. Dafür erweist sich als notwendig und hinreichend, dass die beiden Krümmungen der gegebenen Curve einer gewissen quadratischen Gleichung genügen. Dies ist, wie in der nachträglichen Notiz bemerkt wird, nur ein specieller Fall eines Satzes, der sich in der Note von Pirondini: „Sur les surfaces réglées" (Teixeira J. **12,** 41; F. d. M. **25,** 1172, 1894) findet. (Der Verf. citirt falsch Bd. 13 und 1897/98).

T.

E. Cesàro. Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque. Mathesis (2) **10,** 5-11, 37-42, 57-62.

Aufsuchung der Bedingungen dafür, dass eine Gerade d, deren Lage bezüglich des Fundamentaltrieders einer Curve (M) bekannt ist, gewisse merkwürdige Lagen bezüglich des Fundamentaltrieders einer anderen unbekannten Curve (M_1) einnimmt. 1. d soll Tangente an (M_1) sein. 2. d soll Binormale zu (M_1) sein; Rückführung dieser Aufgabe auf die vorige; Anwendungen. 3. d soll Hauptnormale zu (M_1) sein, indem sie zugleich durch M geht oder Centralaxe der Curve (M) ist. Bestimmung der Curven (M_1) in diesen Fällen. Verschiedene Anwendungen: Geodätische Linien und Krümmungslinien eines Helikoids mit Leitebene; Curven, deren Tangenten einem linearen Complexe angehören.

Mn. (Lp.)

C. A. Laisant. Aire d'une courbe gauche fermée. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28,** 135-140.

Es sei $ABC\dots LA$ ein geschlossenes windschiefes Polygon. Man betrachte von einem Punkte O des Raumes aus die Fläche OAB und stelle sie senkrecht zur Ebene OAB nach Grösse und Orientirung durch einen Vector V_{AB} dar, bilde dann die geometrische Summe aller dieser Vectoren, also ΣV_{AB}. Diese Summe erweist sich als unabhängig von dem gewählten Punkte O. Auf dieselbe Weise kann man mit jeder geschlossenen Raumcurve eine Grösse verknüpfen, die man ihren Inhalt nennen kann, weil sie für ebene Curven in den Inhalt übergeht. Das auf diese Weise definirte Element besitzt zahlreiche Eigenschaften, die in dem vorliegenden Artikel entwickelt werden.

Lp.

G. Pirondini. **Risoluzione di due questioni geometriche.** Annali di Mat. (3) **5**, 73-76.

Längs einer Raumcurve L_1 bewegt sich das rechtwinklige Dreikant, von welchem die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale die Kanten sind. Es wird die Frage gelöst, welche Curve ein Punkt O in der Osculationsebene beschreiben muss, wenn seine Trajectorie die Osculationsebene orthogonal trifft.

Ferner werden die Curven, deren Krümmung und Torsion ϱ_2 und r_2 die Gleichung befriedigen:

$$\varrho_2 = a\, e^{\operatorname{cotg}\beta \int \frac{ds_2}{r_2}}$$

(wo a und β Constanten sind), mit Hülfe einer anderen Raumcurve geometrisch construirt, indem der Punkt der gesuchten Raumcurve, der in einer Osculationsebene der neuen Curve liegt, durch seine Abstände von Tangente und Hauptnormale bestimmt wird. Sr.

O. Biermann. **Ueber die Evoluten von Raumcurven.** Monatsh. f. Math. **11**, 59-63.

Es sei c die in den Gleichungen der Evoluten einer Raumcurve C auftretende willkürliche Constante und C' die einem bestimmten Werte c entsprechende Evolute. Diejenigen Raumcurven, deren Evoluten C' sich auf einen festen Punkt S reduciren, liegen auf Kegelflächen, deren Spitzen nach S fallen, und sind bei Anwendung gebräuchlicher Bezeichnungen durch die Bedingung

$$d \log \varrho - d \log \cos (\tau + c) = 0$$

charakterisirt, wie mit Hülfe der Frenet'schen Formeln bewiesen wird. Ist ferner C'' eine Evolute von C', so zeigt sich, dass C'' niemals mit der ursprünglichen Curve C congruent sein kann, es sei denn, dass C aus einem einzigen Punkte besteht. Ot.

G. Scheffers. **Einzelnes aus der Theorie der Curven und Flächen.** Leipz. Ber. **52**, 1-8.

1. Die Krümmungskreise der Normalschnitte eines Flächenpunktes gehen bei einer Transformation durch reciproke Radien, deren Pol der Flächenpunkt selbst ist, in die Geraden eines Cylindroids über.

2. Jeder Rotationsfläche constanter positiver Krümmung lässt sich eine Rotationsfläche constanter negativer Krümmung von gleichem absoluten Wert der Krümmung derart zuordnen, dass beide Flächen, wenn sie die Drehaxe gemein haben, in jeder Lage einander senkrecht durchschneiden.

3. Die natürlichen Gleichungen einer Raumcurve (Krümmungs- und Torsionsradius als Function des Bogens) führen nach Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces **2**) auf eine Riccati'sche Gleichung.

Der Verf. führt auf Grund der bekannten Eigenschaften der letzteren die Integration der natürlichen Gleichungen durch und zeigt nachträglich, dass alle erhaltenen Integralcurven einander congruent sind. Wö.

ISSALY. Sur les équations fondamentales de la théorie des surfaces rapportées à deux trièdres birectangles supplémentaires mobiles. Nouv. Ann. (3) **19**, 49-59.

Der Verf. liebt es, seine eigenen Wege zu gehen, und entfernt sich dabei von den üblichen Darstellungsarten, so dass dadurch das Verständnis seiner Veröffentlichungen, die unter einander zusammenhängen, etwas erschwert wird. So sind die in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Formeln nach seiner Angabe schon implicite in einer anderen enthalten, über welche in F. d. M. **22**, 769, 1890, referirt ist. Unter Bemängelung des gewöhnlichen Systems von Gleichungen als ungenau werden zuerst die Grundgleichungen der Theorie der Oberflächen und der Pseudoflächen in Bezug auf ein bewegliches dreifach rechtwinkliges Dreikant gegeben. Dann werden an die Stelle des dreifach rechtwinkligen Dreikants zwei zweifach rechtwinklige supplementare Dreikante gesetzt, und es werden Differentialrelationen angegeben, auf welche schon Lamé in seinen Untersuchungen über die orthogonalen Systeme hingewiesen hat. Lp.

ISSALY. Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface. Nouv. Ann. (3) **19**, 392-400.

Die Gleichung der Geodätischen auf den Oberflächen und Pseudoflächen ist $d\varphi + r ds + r' ds' = 0$, wo ds und ds' die schiefen Projectionen des Bogenelements dS der Geodätischen S auf die Kanten MX, MY des beweglichen zweifach rechtwinkligen Trieders $MXYZ$ bezeichnen, das den Winkel Φ enthält, und wo φ den Winkel der beiden Bogen ds, dS bezeichnet. Für die Oberflächen kann man schreiben $d\varphi + A r du + A' r' du' = 0$. Der Verf. ermittelt die wahren Werte von $r, r', d\varphi$ als Functionen von A, A', Φ und der partiellen Ableitungen dieser Grössen in Bezug auf die Variabeln u, u'. Lp.

N. J. HATZIDAKIS. Remarque sur une formule de M. Pirondini. Progreso mat. (2) **2**, 11-13.

G. PIRONDINI. A propos d'une formule relative aux lignes Ibid. 54.

Es handelt sich um die Formel

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_g^2} + \frac{\sin^4\theta}{r^2},$$

die von Pirondini in Progreso mat. (2) **1** gegeben ist. Hatzidakis zeigt, dass diese Formel nicht bloss für die Cylindercurven gilt, sondern

auch für eine auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche gezogene Linie. Pirondini bemerkt dazu, dass diese Eigenschaft von ihm in Annali di Mat. (2) **21**, 33-46, 1893, bekannt gemacht ist. Tx. (Lp.)

N. J. Hatzidakis. Deux démonstrations nouvelles des théorèmes d'Euler et de Meunier. Progreso mat. (2) **2**, 265-272.

Zunächst macht der Verf. kurze Angaben über die Methoden, die zum Beweise der Sätze von Euler und Meunier bezüglich der Krümmungen der ebenen Schnitte von Oberflächen angewandt worden sind. Danach giebt er einen Beweis des Meunier'schen Satzes auf Grund der Principien, die Gauss bei der Ableitung des Euler'schen Satzes benutzt hat; endlich einen neuen analytischen Beweis für beide Sätze. Tx. (Lp.)

H. Fehr. Sur la courbure moyenne quadratique. Arch. sc. phys. Genève (4) **8**, 383 (1899).

C. Alasia. Alcune combinazioni di formule. Progreso mat. (2) **2**, 435-443.

Beweis einiger Relationen, in welche die Biegungen der Oberfläche in einem Punkte, die Hauptkrümmungsradien in diesem Punkte u. s. w. eingehen. Tx. (Lp.)

V. Kommerell. Bemerkung zu den Asymptotenlinien. Böklen Mitt. (2) **2**, 83-86.

Der bekannte Satz von Enneper, dass das Quadrat der Torsion der Asymptotencurven gleich dem negativen Krümmungsmass ist, wird durch infinitesimal-geometrische Betrachtungen bewiesen. Wö.

T. Hayashi. Note on the surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integration. Tokio Math. Ges. **8**, 125-127.

Flächen, deren Gleichungen sich auf die specielle Form

$$x = p(u) \cdot q(z), \quad y = p_1(u) \cdot q(z)$$

bringen lassen, gestatten die Integration der Gleichung der Asymptotenlinien vermittelst Separation der Variabeln durch Quadratur. Hsb.

G. Darboux. Sur les déformations finies et sur les systèmes triples de surfaces orthogonales. Lond. M. S. Proc. **32**, 377-383.

Bezieht man zwei dreidimensionale Räume punktweise auf einander, so giebt es in jedem Punkte des einen drei Richtungen und drei durch

diese bestimmte Ebenen, welche den homologen des entsprechenden Punktes parallel sind. Sind diese Ebenen zu einander orthogonal, so ist die Bewegung des einen Raumes in den andern rotationslos. Darboux beschäftigt sich speciell mit dem Falle, dass diese Ebenen ein dreifach orthogonales Flächensystem einhüllen. Neben verschiedenen analytischen Resultaten ergiebt sich, dass es hinreicht, wenn eine der drei Ebenen eine Fläche umhüllt, die sie in dem zugeordneten Punkte berührt. Die beiden anderen umhüllen dann in gleicher Weise Flächen, welche (bei rotationsloser Bewegung) auf einander senkrecht stehen. Zu jedem dreifach orthogonalen System gehören unendlich viele rotationslose Bewegungen.

Hsb.

D. Th. Egorov. Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure. C. R. **131**, 668-671.

M. Fouché. Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure. C. R. **131**, 873-875.

Wenn in einem dreifachen Orthogonalsystem die Flächen einer und derselben Schar die gleiche sphärische Abbildung ihrer Krümmungslinien besitzen, so besitzen sie zugleich die in der Ueberschrift genannte Eigenschaft. Egorov macht über diese Flächen folgende Bemerkungen: Die Seiten der Rechtecke, in die jede Fläche durch ihre Krümmungslinien geteilt wird, sind den geodätischen Krümmungsradien proportional. Die beiden auf die Krümmungslinien bezüglichen Laplace'schen Differentialgleichungen besitzen eine gemeinsame Lösung. Die Krümmungslinien einer der betrachteten Flächen lassen sich durch Quadraturen bestimmen. Aus jedem orthogonalen System von der in Rede stehenden Eigenschaft lassen sich neue durch Transformation herleiten. Nur in dem Fall, dass das System aus homothetischen Flächen besteht, ergiebt die Transformation das alte System wieder. Jedoch lässt sich in diesem Fall eine andere Transformation angeben, die nach Integration einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung unendlich viele homothetische Systeme und mittels Quadraturen ein allgemeines dreifach orthogonales System der besprochenen Eigenschaft liefert. Zum analytischen Teil dieser Untersuchungen macht Fouché, der diese Systeme zuerst (C. R. **126**, 210-213; F. d. M. **29**, 525, 1898) behandelt hat, in der zweiten Note einige Anmerkungen.

Hsb.

Servant. Sur les systèmes orthogonaux. C. R. **130**, 28-30.

Untersuchung derjenigen Transformationen orthogonaler Systeme, die durch Combination Ribaucour'scher Transformationen mit Inversionen entstehen. Es entstehen dadurch im ganzen acht Systeme, deren Zusammenhang mit gewissen Untersuchungen von Darboux den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden soll.

Hsb.

A. Demoulin. Sur deux surfaces qu'on peut associer à toute surface de Weingarten. C. R. 131, 330-333.

Die Tangentialebenen der beiden in Rede stehenden Flächen sollen den Hauptnormalschnitten der Weingarten'schen Fläche parallel und ihre Abstände vom Nullpunkte gleich u und v sein, wenn das Linienelement der Gauss'schen Kugel die bekannte Form $du^2/k^2 + dv^2/\varphi'^2(k)$ hat. Mit den Eigenschaften dieser Flächen steht eine Anzahl bekannter Sätze über die Weingarten'schen Flächen in einfachem Zusammenhang.
Hsb.

A. Pellet. Mémoire sur les systèmes orthogonaux à n variables. Toulouse Ann. (2) 2, 137-162.

Der Verf. untersucht nach einer neuen Methode die Flächen mit Krümmungslinien und giebt eine neue Theorie der n-fach orthogonalen Systeme, die ausser den meisten bis jetzt bekannten Systemen einige neue liefert.
Hsb.

E. Waelsch. Ueber Flächen mit sphärischen oder ebenen Krümmungslinien. Aus Festschr. der k. k. techn. Hochschule Brünn 1899. 13 S. 4°.

Ein Auszug aus dieser Abhandlung ist in C. R. 128, 920-922 erschienen (F. d. M. 30, 550, 1899). Der Verf. kennzeichnet den Inhalt mit den folgenden Worten: „Die folgende Lösung des Problems der Bestimmung der Flächen mit einem System sphärischer oder Krümmungslinien geht von einem einfachen geometrischen Satze aus. Durch Verwendung der Untersuchungen von Darboux über die Laplace'sche Differentialgleichung, der so wichtigen Bestimmung einer Fläche aus einer solchen Gleichung von Guichard und eines Theorems von Cosserat gelingt es, die Coordinaten eines Punktes der fraglichen Flächen als Functionen zweier Parameter explicite auszudrücken. Schliesslich wird das Bogenelement der sphärischen Abbildung der Flächen bestimmt und ein Satz bewiesen, der sich auf die Krümmungslinien des anderen Systems bezieht.“
Lp.

R. Bricard. Détermination des surfaces ayant un système de lignes de courbure égales. C. R. 130, 475-477.

A. Demoulin. Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont égales. C. R. 130, 823-826.

Neue Herleitungen der von Hazzidakis (J. für Math. 98, 49-67; F. d. M. 17, 721, 1885) und Caronnet (C. R. 117, 842-844; F. d. M. 25, 1187, 1893) gefundenen, von Darboux (Leçons sur la théorie des surfaces 4) dargestellten Resultate. In der ersten Arbeit synthetisch, in der zweiten mehr analytisch.
Hsb.

C. Lamioni. Sur deux théorèmes de géométrie différentielle. Nouv. Ann. (3) **19**, 557-560.

Indem Bianchi von der Formel ausging, welche die zweite Krümmung einer geodätischen Linie in einem Punkte M einer Fläche ausdrückt, hat er die folgenden beiden Sätze bewiesen: 1. Wenn eine Krümmungslinie zugleich eine Geodätische ist, so ist sie eben. 2. Jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungslinie. Der Verf. giebt in dieser Note einen directen und sehr einfachen Beweis beider Sätze.

Mz.

P. Burgatti. Sopra alcune superficie a linee di curvatura isoterme. Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_2$, 352-357.

Die Bestimmung aller Flächen mit isothermen Krümmungslinien hängt von der Integration einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung ab. Dieses Problem kann mit Hülfe eines Darboux'schen Theorems auf eine andere Form gebracht werden, welche zwar die Schwierigkeiten nicht vermindert, aber zu neuen particularen Lösungen führt. Solche Lösungen erhält man durch Bestimmung aller vollständigen Systeme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial \log\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v},\quad \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=c,$$

wo c eine gegebene Function ist. Die Aufstellung der Bedingungen, denen die Function φ zu genügen hat, ergiebt, dass die vollständigen Systeme der erwähnten Form auf sechs verschiedene Typen reducirt werden können, deren Integration keine Schwierigkeit bietet. Eines von ihnen lautet unter Anwendung Monge'scher Bezeichnungen:

$$s=(p-q)/\sin 2(u-v,\ pq=\text{const.}/\sin^2(u-v)$$

und bestimmt die Fläche $x=A\log\dfrac{\sqrt{\cot(v-\alpha)}+\sqrt{\cot(u-\alpha)}}{\sqrt{\cot(v-\alpha)}-\sqrt{\cot(u-\alpha)}},\ldots$ mit fünf willkürlichen Constanten. Die Linienelemente aller dieser Flächen, zu denen übrigens auch die Mittelpunktsflächen zweiten Grades gehören, haben eine bemerkenswerte Form.

Ot.

A. Thybaut. Sur les équations harmoniques et les surfaces isothermiques. C. R. **130**, 387-390.

Die Arbeit behandelt einige Transformationseigenschaften Laplace-scher Differentialgleichungen mit gleichen Invarianten, die mit den vom Verf. untersuchten, bei der Deformation des Paraboloids auftretenden Isothermflächen zusammenhängen.

Hsb.

A. Thybaut. Sur les surfaces isothermiques. C. R. **131**, 932-935.

Es werden die beiden Schalen (M) und (M') der Enveloppe einer

zweifach unendlichen Kugelschar (K) betrachtet. Jedem Punkte M der einen entspricht der zur gleichen Kugel gehörige M' der andern. Ist diese Abbildung der Schalen auf einander conform, so liegen die Punkte M und M' harmonisch zu den Brennpunkten der Geraden MM' und umgekehrt.

Besteht (K) speciell aus denjenigen Kugeln, die eine feste Kugel S unter constantem Winkel schneiden, so werden die Enveloppen als E-Flächen bezeichnet. Die Normalen in M und M' liegen mit dem Centrum von S in einer Ebene. Die in M und M' auf (M) und (M') senkrechten Kreise sind auch orthogonal zu S, und jedes Paar zu ihnen orthogonaler Flächen ist ein System von E-Flächen.

In dem speciellen Fall, dass der Schnittpunkt der Normalen in M und M' harmonisch zu M in Bezug auf die beiden Krümmungscentra von (M) in M liegt, sind (M) und (M') isotherme Flächen. Zugleich gilt die analoge Beziehung für (M'). Die erwähnten normalen Kreise ergeben sodann ein weiteres Paar Isothermflächen, zu dem sie ebenfalls normal sind. Diese Isothermflächen hängen mit der Deformation des Paroboloids zusammen und sind vom Verf. in der vorstehend besprochenen Note behandelt. Hsb.

A. Thybaut. Sur une classe de surfaces isothermiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 541-591.

Die Arbeit enthält ausführliche Studien über die vom Verf. auch früher schon behandelten Quadrupel isothermer Flächen, die bei der Deformation des Rotationsparaboloides und des Paraboloids mit einer isotropen Leitebene auftreten. Vergleiche hierzu den vorangehenden Bericht über die Veröffentlichung des Verf. in den C. R. **131**, 932-935.

Hsb.

E. Cosserat. Sur le problème de Ribaucour et sur les surfaces isothermiques. Toulouse Bull. et Mém. **8** (1899-1900), 267-273.

In einer Abhandlung der Toulouse Ann. **8** und in einer Note der C. R. **118** (F. M. **25**, 1287, 1894) hat der Verf. auf die Frage von Ribaucour hingewiesen: „In welchem Falle umhüllt eine Kugel, die von zwei Parametern abhängt, eine Oberfläche, deren beide Schalen sich mit Aehnlichkeit der unendlich kleinen Elemente entsprechen?“ Die Behandlung dieses „Ribaucour'schen Problems“ ist von Darboux in Angriff genommen worden (vergl. F. d. M. **30**, 555, 1899). Nachdem derselbe Particularlösungen angegeben hatte, welche mit der Verbiegung der Quadriflächen zusammenhängen, konnte er den Grad der Allgemeinheit seiner Lösung genauer feststellen. Der Verf. des vorliegenden Aufsatzes, der später auf das Ribaucour'sche Problem zurückkommen will, beabsichtigt jetzt, vornehmlich eine Umgrenzung der bisher erlangten Resultate und insbesondere den Nachweis zu geben, wie die von Darboux und Guichard gewonnenen Sätze bezüglich der Deformation der

Quadrifläche ihre wahre Quelle in dem Problem haben, dessen Wichtigkeit von Ribaucour vorausgeschaut war. Lp.

C. GUICHARD. Sur les surfaces isothermiques. C. R. **130,** 159-162.

C. GUICHARD. Sur une transformation des surfaces isothermiques. C. R. **130,** 477-480.

Der Verf. führt eine in der Note „Sur le problème de M. Bonnet“ (C. R. **125,** 643-646; F. d. M. **28,** 590, 1897) mitgeteilte Transformation isothermer Flächen aus, und zwar in der ersten Abhandlung auf geometrischem Wege mittels der von ihm entwickelten Theorie der Netze; in der zweiten Abhandlung findet sich die analytische Entwickelung hierzu. Hsb.

L. BIANCHI. Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{9}_2$, 185-193.

In den Tangentialebenen einer Fläche Σ wird je eine Gerade fest angenommen, und es wird die Frage aufgeworfen, wann diese Congruenz bei allen Deformationen normal zu einer Minimalfläche oder einer Fläche constanter Totalkrümmung ist. Es ergeben sich für den ersten Fall bekannte Resultate, für den zweiten zwei Flächenklassen Σ. Die Umkehrungen werden ebenfalls untersucht und die Differentialgleichungen aufgestellt, auf deren Integration die Deutung der Normalencongruenz einer Minimalfläche oder einer Fläche constanter Totalkrümmung in der angegebenen Weise hinausläuft. Hsb.

L. BIANCHI. Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante. Annali di Mat. (3) **4,** 1-66.

Denkt man sich die Brennstrahlen eines Rotationsparaboloids fest mit diesem verbunden, so bilden die dem Brennpunkt entsprechenden Endpunkte bei jeder Deformation des Paraboloids eine Minimalfläche. Umgekehrt kann auf ∞^3 verschiedene Arten jede Minimalfläche mit einer Deformation des Paraboloids in diese Beziehung gebracht werden. Dieser Satz wird auf den elliptischen und hyperbolischen Raum verallgemeinert. Hsb.

B. CALÒ. Risoluzione di alcuni problemi sull' applicabilità delle superficie. Annali di Mat. (3) **4,** 123-130.

Zwei Flächen sollen auf einander abwickelbar sein und der Abstand eines Punktes P der einen von einer festen Ebene gleich dem des entsprechenden P' von einem festen Punkt, oder die Abstandsumme von P und P' von demselben festen Punkt oder die Abstandsdifferenz sollen gleich sein. Bekannte Lösungen sind congruente Rotationsflächen zweiten

Grades. Der Verf. findet für jede der drei Aufgaben eine Klasse von Flächenpaaren mit einer willkürlichen Function eines complexen Arguments, die für die algebraischen Flächen eine algebraische Function ist.
Hsb.

H. LIEBMANN. Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Math. Ann. **53**, 81-112.

H. LIEBMANN. Ein Satz über endliche einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung. Leipz. Ber. **52**, 28-36.

Den Ausgangspunkt der ersten Arbeit bildet der daselbst bewiesene Satz, dass ein einfach zusammenhängendes singularitätenfreies Stück einer überall negativ gekrümmten Fläche sich ins Unendliche erstrecken muss. Zulässig sind auch singuläre Stellen, in denen der Charakter der negativen Krümmung insofern gewahrt bleibt, als jede durch sie gelegte Ebene die Fläche schneidet, und eine gewisse, „seminegativ gekrümmte" Singularität, die isolirt auftreten darf. Würde man eine analytische, geschlossene, einfach zusammenhängende, singularitätenfreie, positiv gekrümmte Fläche (ein Ovaloid) infinitesimal deformiren, so würde die durch Orthogonalität der Linienelemente entsprechende Fläche von der zuerst besprochenen Art sein und nur die zulässigen Singularitäten besitzen, zugleich aber im Endlichen liegen, woraus folgt, dass ein Ovaloid starr ist. Für den speciellen Fall der Kugel wird ein zweiter Beweis mit Hülfe der Parallelfläche constanter mittlerer Krümmung angegeben, der die Uebertragung des Satzes auf n Dimensionen gestattet.

In der zweiten Arbeit wird bewiesen, dass ein einfach zusammenhängendes Stück einer negativ gekrümmten Fläche mit Singularitäten, in denen der Charakter negativer Krümmung gewahrt bleibt, in seiner sphärischen Abbildung keinen geschlossenen grössten Kreis besitzt. Als einfaches Beispiel erwähnen wir das vom Verf. angeführte: die innere Hälfte der Ringfläche. Durch Betrachtung der Parallelflächen zeigt sich für positiv gekrümmte einfach zusammenhängende singularitätenfreie Flächenstücke, dass sie starr sind, sofern ihre sphärische Abbildung einen geschlossenen grössten Kreis enthält. Allerdings ist hierbei die Bedingung gestellt, dass bei der Biegung keine singuläre Stelle auftreten soll. Es kann also beispielsweise die Halbkugel nicht singularitätenfrei deformirt werden.

Ein solches Flächenstück muss ferner mindestens einen Nabelpunkt enthalten, ein Ovaloid also deren zwei. Enthält es nur zwei, so sind die Tangentialebenen in diesen parallel. Hsb.

A. P. PSZEBORSKI. Zur Frage über die unendlich kleinen Deformationen der Flächen. Charkow Ges. (2) **7**, 26-37 (Russisch).

Der Zweck der Abhandlung ist die kinematische Interpretation der unendlich kleinen Deformation der Weingarten'schen Fläche und der

Function φ. Geht nämlich ein Punkt $M(x, y, z)$ der Fläche nach unendlich kleiner Deformation in den Punkt $M'(x+tx_1, y+ty_1, z+tz_1)$ der Fläche S' über, so besteht die Lagenänderung des dem M unendlich nahen Punktes $m(x+dx, y+dy, z+dz)$ der Fläche S aus der mit M gemeinsamen Lagenänderung tx_1, ty_1, tz_1 und aus der relativen tdx_1, tdy_1, tdz_1. Diese letztere wird zusammengesetzt aus der Rotation $t\varphi$ um die Normale N zu S in M und der Rotation $t\sqrt{\Delta'_1\,\varphi}$ um die Axe, welche in der Tangentialebene zu S in M liegt und durch M geht.

Si.

V. Volterra. Relazione sulla Memoria del Dott. E. Daniele: Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili. Torino Atti **35**, 726-727.

Bericht über eine zu veröffentlichende Arbeit. Lp.

E. Franconi. Sulla teoria delle sviluppoidi. Batt. G. **38**, 232-243.

Auf der Tangentialfläche einer Curve C ziehen wir eine zweite Curve C'; C' heisst Trajectorie von C, C Sviluppoide von C'. Durch jeden Punkt P' von C' geht eine Tangente t' von C' und die Tangente t eines Punktes P auf C. Die Ebene tt' ist Schmiegungsebene von C in P.

Betrachtet man bei einer gegebenen C' alle Sviluppoiden, für die der Winkel tt' dieselbe gegebene Function des Ortes von P' auf C' ist, so erfüllen diese eine Fläche (C), auf der sie geodätische Linien sind. Die Tangenten t von P' aus bilden wegen der Gleichheit der Winkel tt' in P' einen Kreiscylinder mit der Axe t', der Spitze P', der die Fläche (C) in einer zu den Curven C conjugirten Linie berührt. Für vier Sviluppoiden C_1, C_2, C_3, C_4 auf (C) ist das Doppelverhältnis von vier zusammengehörigen Tangenten constant. Die Sätze über die Evolutenfläche ($\sphericalangle\, tt' = \frac{1}{2}\pi$) ergeben sich als Specialisirungen aus diesen und anderen Sätzen sowie aus den analytischen Entwickelungen des Verf.

Hsb.

V. Snyder. Lines of curvature on annular surfaces having two spherical directrices. American J. **22**, 96-100.

Ringflächen, d. h. Flächen, welche ein System Krümmungslinien haben, die Kreise sind, stehen in enger Beziehung zu der Theorie des Kugelcomplexes. Durch einfache Betrachtung des linearen Complexes zeigt Verf., dass jede Ringfläche, welche in einem linearen Kugelcomplex enthalten ist, eine Krümmungslinie besitzt, welche der Durchschnitt der Fundamentalfläche des Complexes mit der Ringfläche ist. Die Betrachtung einer ∞^1-Schar von Complexen ergiebt: Die Krümmungslinien einer Ringfläche mit zwei sphärischen Leitlinien, sind durch rationale Operationen

bestimmt. Auf jeder solchen Fläche muss eine Krümmungslinie des zweiten Systems eine ebene Curve sein. Für die Ringflächen der sechsten Ordnung stellt der Verf. den Satz auf, dass sie nur rationale Krümmungslinien besitzt. Sr.

V. Rouquet. Étude d'une classe de surfaces réglées. Toulouse Ann. (2) **2**, 71-113.

Es werden diejenigen Regelflächen S untersucht, welche bei der Bewegung des Fundamentaldreikants einer beliebigen Raumcurve durch die Momentanaxe der Drehung und Gleitung erzeugt werden. Bei der Untersuchung bieten die sogenannten adjungirten Regelflächen eine wirksame Hülfe. Zwei Regelflächen heissen adjungirt, wenn sie dieselbe Strictionslinie besitzen und sich in allen Punkten dieser Linie berühren; sie haben diese letzteren Eigenschaften, falls die geradlinigen Erzeugenden der einen die der anderen Fläche in den Centralpunkten und den Centralebenen unter einem constanten Winkel schneiden. Gehört die Fläche S zu einer Raumcurve (O), so ist die adjungirte Regelfläche S_1 der Ort der Hauptnormalen von (O). Ist ferner (Ω) die sphärische Indicatrix der Curve (O), und sind (B) und (B_1) die sphärischen Bilder der adjungirten Regelflächen S und S_1, so bestehen folgende Beziehungen:

1. (B) und (B_1) sind supplementare Curven,
2. (B) ist die sphärische Evolute von (Ω),
3. (B_1) ist die sphärische Indicatrix von (Ω).

Aus diesen Ergebnissen folgen sofort die Bedingungen dafür, dass eine geradlinige Fläche eine Fläche S sei, sowie der Satz, dass einer Fläche S höchstens zwei verschiedene Raumcurven (O) zu Grunde liegen können.

Eine Fläche S ist abwickelbar, wenn die Krümmungen der zugehörigen Curve (O) die Bedingung

$$\varrho\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right) = \text{const.}$$

erfüllen, mit anderen Worten, wenn der Abstand der Momentanaxe von dem entsprechenden Curvenpunkte constant ist. Ot.

D. Gigli. Sulle superficie elicoidali e rigate dello spazio ellittico. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 717-723.

Durch eine elegante Rechnung wird die wesentliche analytische Uebereinstimmung der Deformation der Regelflächen für den elliptischen (positiv gekrümmten nichteuklidischen) und den euklidischen Raum nachgewiesen. Speciell lässt sich auch in jenem eine Regelfläche so verbiegen, dass eine geodätische Linie gerade wird; die von den Binormalen einer Curve constanter Torsion gebildete Regelfläche lässt sich auf eine

gemeine Schraubenfläche abwickeln. Auf dieselbe Fläche oder aber auf das Rotationshyperboloid abwickelbar sind alle auf Rotationsflächen abwickelbaren Regelflächen. Hsb.

CH. MICHEL. Sur les courbes tracées sur une surface développable dont les tangentes rencontrent une courbe donnée. Darboux Bull. (2) **24**, 157-159.

Es wird durch rein geometrische Betrachtungen der von Darboux in seiner Théorie générale des surfaces ausgesprochene Satz bewiesen: Die Bestimmung aller auf einer abwickelbaren Fläche verlaufenden Curven, deren Tangenten eine beliebig gegebene Curve treffen, hängt von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab. T.

E. PICCIOLI. Sui nodi delle geodetiche del cono. Periodico di Mat. (2) **2**, 261-262.

Beweis des Satzes: „Jede Geodätische eines gegebenen Kegels bietet in ihrem Verlaufe eine endliche Zahl von Knotenpunkten, die alle reell sind.“ Lp.

B. K. MLODZIEJOWSKI. Ueber die den Flächen von Peterson associirten Flächen. Mosk. Math. Samml. **21**, 450-460 (Russisch).

Die Flächen von Peterson (Mosk. Math. Samml. **1**, 391-438, 1866) genügen den Gleichungen $x = (u + s)\, m \cos v - \int m \cos v \cdot ds$, $y = (u + s)\, m \sin v - \int m \sin v \cdot ds$, $z = N$ (m, s sind Functionen von v, N von u allein). Im Jahre 1891 wurden sie von Goursat (American J. **14**, 1-8; F. d. M. **23**, 812) wiedergefunden. Hier werden die den Peterson'schen associirten (Bianchi: F. d. M. **24**, 838, 1892) Flächen bestimmt. Es sind gerade Konoide, welche durch Gleichungen bestimmt sind:

$$x = AB \sin V, \quad y = -AB \cos V, \quad z = -\int B^2\, dN,$$

wo

$$\frac{dN}{du} = -\frac{1}{A}, \quad m^{-2}\, (m \sin v)'_v = B \cos V, \quad m^{-2}\, (m \cos v)'_v = B \sin V$$

gesetzt ist. Si.

S. C. DAVISSON. Ueber die geodätische Linie der Mannigfaltigkeit $ds^2 = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2 + dz^2$. Diss. Tübingen: H. Laupp jr. 22 S. 8°.

Bianchi hat gezeigt, dass für diejenigen Räume, welche eine intransitive Gruppe G_2 von Bewegungen gestatten, das Quadrat des

Linienelementes drei verschiedene Formen annehmen kann, von denen die eine

$$ds^2 = (dx^2 + \sin^2 x\, dy^2)\, \varphi^2(x) + dz^2$$

für den speciellen Fall $\varphi(x) = 1$ der vorliegenden Abhandlung zu Grunde gelegt ist. Die durch dieses Linienelement dargestellte Mannigfaltigkeit lässt nach Bianchi eine transitive Gruppe G_4 von Bewegungen zu. Die ersten drei der zugehörigen infinitesimalen Transformationen bedeuten, wenn man die gegebene Mannigfaltigkeit in einen ebenen vierdimensionalen Raum versetzt, Drehungen, die bei einem ∞^1 coaxialen System von Kugeln jede in sich überführen; die letzte eine Verschiebung, die die Kugeln in einander überführt. Also kann in jener Mannigfaltigkeit durch eine oder mehrere von diesen Bewegungen jeder Punkt an die Stelle jedes anderen gebracht werden.

Durch die Transformation

$$u = \sin x \sin y\, e^z, \quad v = \sin x \cos y\, e^z, \quad w = e^z$$

wird das gegebene Linienelement in die symmetrische Form

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{u^2 + v^2 + w^2}$$

übergeführt. Hierdurch wird die Mannigfaltigkeit in ähnlicher Weise specialisirt, wie wenn man die allgemeine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche durch diese ersetzt; es fallen nämlich dann vorher getrennte Flächenpunkte an jeder Stelle in unendlicher Anzahl zusammen.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit dem Verlauf und den Eigenschaften der geodätischen Linien der betrachteten Mannigfaltigkeit und mit ihren Beziehungen zu den geodätischen Ebenen. Sie führt u. a. zu dem interessanten Ergebnis, dass alle geodätischen Linien der Mannigfaltigkeit, ähnlich wie die Schraubenlinien auf einem Kreiscylinder, in einer ebenen dreifachen Mannigfaltigkeit verlaufen. Ot.

G. Pirondini. Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque. Batt. G. **37**, 212-288 (1899).

Fortsetzung und Beschluss der Arbeit aus derselben Zeitschrift **35**, 181-205, über welche in F. d. M. **28**, 507, 1897, berichtet worden ist. Da über die reichhaltigen Ergebnisse der Untersuchung kein knapper Ueberblick gegeben werden kann, so genüge es, die behandelten Gegenstände und Fragen kurz anzudeuten: Symmetrische Flächen in Bezug auf eine Fundamentallinie, speciell symmetrische Regelflächen. Entsprechende Linien auf symmetrischen Flächen, deren entsprechende Tangenten einander parallel sind; die symmetrische Fläche (Regelfläche) zu einer Ebene; wann ist dieselbe ein Cylinder, wann eine Ebene? Symmetrische Fläche zu einem Cylinder. — Bestimmung der Fundamentallinie $\mathcal{A}$, in Bezug auf welche zwei gegebene Oberflächen symmetrisch

sein sollen. Bei der Schwierigkeit dieses Problems in seiner Allgemeinheit beschränkt sich die Untersuchung auf den Fall von Regelflächen, abwickelbaren und Kegelflächen unter der Bedingung, dass die Erzeugenden einander entsprechen, und einiger anderen speciellen Flächen, wie z. B. der Gesimsflächen und der Schraubenflächen. Sodann wird der Fall untersucht, dass zwei symmetrische Gebilde einander ähnlich sind und gleichzeitig die homologen Punkte in der Symmetrie einander correspondiren (es giebt nur Linien, aber keine Flächen solcher Art), ferner der, dass die Entfernungen correspondirender Punkte von einer festen Ebene in constantem Verhältnis zu einander stehen, dann dass zwei der Coordinaten und endlich alle drei Coordinaten solcher Punkte dies thun. Schliesslich wird noch die Frage nach dem Orte des zu einem Punkte symmetrischen Punktes und der zu einer Linie symmetrischen Linie behandelt, wenn die Fundamentallinie in Bewegung begriffen ist, und umgekehrt, wenn dieser Ort gegeben ist, die bewegliche Fundamentallinie bestimmt.

Alle Erörterungen werden durch zahlreiche interessante specielle Fälle illustrirt. T.

G. Pirondini. Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque. Nouv. Ann. (3) **19**, 107-126.

Ebenso, wie in einer ausführlichen Arbeit in Batt. G. **35** u. **37** (vgl. das vorhergehende Referat) diejenige Verallgemeinerung der axialen Symmetrie, in der an Stelle der Geraden eine Raumcurve als Axe tritt, wird in der vorliegenden diejenige Symmetrie behandelt, die einem Punkte P einen anderen P' von der Art zugeordnet, dass die geradlinige Strecke PP' Normale eines beliebigen gegebenen Cylinders ist und von diesem halbirt wird. Die Richtung der Untersuchung entspricht genau der in der genannten Arbeit eingeschlagenen. T.

V. Jamet. Sur les surfaces enveloppes de sphères. Marseille Ann. **10**, 61-78.

Untersuchung der Eigenschaften der Flächen, die von einer Kugel eingehüllt werden, deren Mittelpunkt eine gegebene Oberfläche durchläuft und deren Radius als Function zweier die Lage des Mittelpunktes bestimmenden Parameter sich ändert. I. Lage der Ebene, welche die Normale zur Oberfläche S und denjenigen Radius der zugehörigen Kugel enthält, der nach dem Punkte geht, wo diese die Hüllfläche berührt. II. Ausdruck für den Sinus des Winkels, den diese beiden Normalen einschliessen. Theorem von Malus und Dupin über die Systeme einfallender Strahlen, normal zu einer Oberfläche. Untersuchung der Oberflächen, deren Normalen eine gegebene Oberfläche sämtlich unter einem Winkel schneiden, der allein von dem Stück dieser Normale abhängt, das zwischen den beiden Oberflächen liegt. III. Oberflächen, die alle

Normalen zu einer gegebenen Oberfläche unter einem gegebenen Winkel schneiden. Lp.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. Geck. Ueber die singulären Punkte algebraischer Flächen. Diss. Tübingen: H. Laupp jr. 40 S. gr. 8°.

Während die Litteratur über die Reihenentwickelungen algebraischer Functionen einer Veränderlichen sehr reich ist, sind bisher nur wenige specielle Untersuchungen über die Reihenentwickelungen für algebraische Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen angestellt worden. Die Dissertation von Geck enthält einen schätzbaren Beitrag zu dem Problem im Anschluss an die bekannte Untersuchung von Kobb. Um die Reihenentwickelungen für die Punkte in der Nähe eines singulären Punktes einer Fläche F aufzustellen, wendet man auf die Fläche eine Cremona-Transformation an, durch welche dem singulären Punkte eine Curve auf der neuen Fläche zugeordnet wird, und nun entwickelt man für die Punkte dieser Curve. Hat man den allgemeineren Fall successiver vielfacher Punkte auf einem linearen Curvenzweig, so erhält man durch wiederholte Transformationen ausser einer unbestimmten Anzahl von gewöhnlichen Reihenentwickelungen eine Gruppe von besonderen (ausgezeichneten) Reihen, welche man wieder in verschiedene Teilgruppen abteilen kann, indem man für

$$x - az - a_1 z^2, \quad x - az - a_1 z^2 - a_2 z^3$$

u. s. w. entwickelt. Die successiven vielfachen Punkte liegen auf einer explicit angebbaren Raumcurve. Für den Fall successiver singulärer Punkte auf einem superlinearen Curvenzweig stellt Verf. die combinirten Transformationsformeln und Reihenentwickelungen nebst deren Teilgruppen auf, wobei er auf einen interessanten Zusammenhang (Identität) der kritischen Exponenten in der Reihenentwickelung für die Projection der Raumcurve der successiven singulären Punkte auf eine allgemeine Ebene mit den Exponenten der Anfangsglieder der Teilgruppen kommt.

Als Hauptanwendung der Untersuchung ergeben sich Sätze über die Gestaltung des Berührungskegels von einem beliebigen Punkte aus an die Fläche in der Nähe der nach dem singulären Punkte gehenden Kante.

Ein kurzer Anhang beschäftigt sich mit den Näherungsflächen für die Nachbarschaft bestimmter Punkte, wie solche für die Untersuchung nötig sind. Sr.

E. Wölffing. Ueber die „Closepunkte“ und „Offpunkte“ Cayley's. Böklen Mitt. (2) **2**, 87-89.

Der Verf. macht darauf aufmerksam, dass Zeuthen (Math. Ann. **10**, 481; F. d. M. **8**, 365, 1876) nicht den allgemeinsten Fall des Closepunktes definirt hat, weil daselbst das Doppelverhältnis der Tangenten

der vier Zweige, welche die parabolische Curve durch den Closepunkt schickt, nicht beliebig, sondern äquianharmonisch ist. Was die Punkte („unexplained singular points") betrifft, welche Cayley ursprünglich mit den Offpunkten verwechselt hatte, und welche er in den Formeln über Reciprokalflächen (Papers **6**, 577-581) mit ϑ bezeichnet, so zeigt Verf., dass den in diesen Formeln an einen solchen Punkt gestellten Anforderungen kein einzelner Punkt genügen kann. Wö.

A. Pensa. Sull' influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazioni alla determinazione di superficie razionali di quinto ordine. Mondovi: Vescovile. 28 S. 8°.

E. Picard. Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres. S. M. F. Bull. **28**, 17-25.

Wenn $F(x, y, z) = 0$ eine algebraische Fläche ist, welche eine rationale Transformation in sich zulässt von der Form:

$$X = R_1(x, y, z), \quad Y = R_2(x, y, z), \quad Z = R_3(x, y, z),$$

mit dem Doppelpunkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, der ein einfacher Punkt der Oberfläche ist, so fragt Verf. nach den eindeutigen Functionen $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für welche die Gleichungen:

$$F[f(t), \varphi(t), \psi(t)] = 0, \quad f(mt) = R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$

nebst analogen Relationen für φ und ψ erfüllt sind. Die Functionen f, φ und ψ ergeben sich durch Reihenentwickelung nach der Methode der successiven Approximation, durch welche insbesondere der Radius für den Convergenzbereich bestimmt wird. Die Functionen f und ψ hängen ausser von den Variabeln t von zwei Constanten A und B ab und sind für alle endlichen Werte meromorphe Functionen derselben. Indem man $At = u$, $Bt = v$ setzt, kann man f, φ, ψ als Functionen von u und v setzen. Man erhält dann eine Oberfläche, deren Punkte x, y, z sich durch die meromorphen Functionen f, φ, ψ so ausdrücken:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

mit den Bedingungen

$$f(au, av) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

nebst den analogen für φ und ψ. Verf. wirft die Frage auf, ob solche Oberflächen überhaupt existiren, ausser bekannten unicursalen Flächen, ferner ob die Darstellung alle Punkte der Oberfläche erreicht, ohne diese Fragen jedoch zu entscheiden. Sr.

G. Castelnuovo et F. Enriques. Sur une classe de surfaces algébriques. C. 131, 739-742.

Durch eine von den Verfassern zur Lösung anderer tiefliegender Fragen benutzte Methode der successiven Adjunction ist es gelungen, für die algebraischen Flächen das sehr allgemeine Theorem aufzustellen: Wenn eine algebraische Oberfläche ein lineares System von Curven C vom Geschlecht $\pi > 0$ enthält, welche sich zu je zwei in n Punkten schneiden, und wenn $n > 2\pi - 2$, so ist die Oberfläche rational, oder sie lässt sich auf einen Cylinder vom Geschlecht $p > 0$ zurückführen. Die Note enthält verschiedene Folgerungen und Specialisirungen dieses Theorems in Bezug auf die Oberflächen mit rationalen Curven und auf die Bestimmung der Flächen, welche durch eine Reihe von birationalen Transformationen, die keine Gruppe endlicher Ordnung erzeugen, in sich übergeführt werden. Sr.

S. Kantor. Sur les surfaces qui possèdent une série non linéaire de courbes rationnelles. C. R. 131, 791-793.

Kantor beweist den von Enriques (Math. Ann. 52) aufgestellten Satz, dass eine Oberfläche mit einem Büschel (lineares System von der Dimension 1) rationaler Curven vom Geschlecht $\pi > 0$ in einen Cylinder birational transformirt werden kann. Der Beweis lehrt zugleich, dass jede $\infty^{\nu-2}$ Schar rationaler Curven für $\nu > 3$ nicht birational in eine $\infty^{\nu-2}$ Schar von Geraden transformirbar ist. Sr.

Vogt. Une application de la formule de Stokes. Nouv. Ann. (3) 19, 97-107.

Die Curve L sei die reelle Schnittlinie der beiden Flächen

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

In einem Teil des Raumes, in welchem die Functionen F_1, F_2 endlich, eindeutig und stetig sind, befinde sich die geschlossene Curve C. Durch diese lege man eine beliebige Kalotte S, welche die Curve L in mehreren Punkten schneiden kann. Nach einer bestimmten Vorschrift betrachtet man eine Seite der Kalotte als äussere, eine Richtung der Tangente in einem Punkte von L als die positive. Unter Benutzung der Stokes'schen Formel wird alsdann gezeigt, dass $S = \frac{1}{2\pi}\int_C d \arg \operatorname{tang} (F_2/F_1)$, das Integral über C erstreckt, gleich ist der Anzahl derjenigen Schnittpunkte von L und S, in denen der nach aussen gerichtete Teil der Normale von S mit der positiven Richtung der Tangente einen spitzen Winkel einschliesst, vermindert um die Zahl derjenigen Schnittpunkte, in denen diese Linien einen stumpfen Winkel bilden.

Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines von Kronecker herrührenden Satzes, der sich auf die Anzahl der reellen Lösungssysteme

von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten innerhalb eines geschlossenen Konturs bezieht. F.

E. Cosserat. Sur la détermination de toutes les surfaces algébriques à double génération circulaire. C. R. **130**, 311-313.

E. Cosserat. Sur les cercles tangents à quatre plans isotropes et sur les surfaces à double génération circulaire. C. R. **130**, 385-387.

Es handelt sich bei der Lösung der in der Ueberschrift genannten Aufgabe um die Bestimmung der Transformationen

$$\varrho x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo f_i quadratische Formen bedeuten und so beschaffen sein sollen, dass die den Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ entsprechenden Kegelschnitte sämtlich einem Kegelschnitt C' je in zwei Punkten begegnen. Von wesentlicher Bedeutung für das Problem ist die Raumcurve vierter Ordnung erster Species C, in denen die Fläche $f = 0$ und diejenige Fläche zweiter Ordnung sich schneiden, in welche die Ebene des Kegelschnitts C' durch die Transformation übergeht. Unter der Voraussetzung, dass diese Curve C keine Singularitäten aufweist, kommt die vollständige Lösung der Aufgabe im wesentlichen auf die Bestimmung gewisser Systeme von Punktetripeln und -Quadrupeln hinaus, die auf der C durch einen Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, dessen Axe die C trifft, oder durch einen Ebenenbüschel, dessen Axe die C nicht trifft, oder durch einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die die C in solchen vier, nicht in einer Ebene gelegenen Punkten treffen, in denen sie von einer Fläche zweiter Ordnung berührt werden kann.

Von den noch zu erledigenden singulären Fällen für die Curve C wird in der zweiten Note der betrachtet, dass diese in ein windschiefes Vierseit ausartet, ein Fall, auf den man geführt wird, wenn die Flächen $f_i = 0$ ein gemeinsames Polartetraeder besitzen. Dies liefert interessante Eigenschaften der Congruenz von Kreisen, die vier gegebene isotrope Ebenen berühren. T.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

L. Ripert. Sur la simplification des formules d'angles et de distances en géométrie de l'espace. Nouv. Ann. (3) **19**, 409-419.

Eine sehr übersichtliche und einheitliche Zusammenstellung der in der Ueberschrift genannten Formeln unter Zugrundelegung schiefwinkliger cartesischer Coordinaten. Dieselbe gestaltet sich dadurch sehr compendiös, dass alle auftretenden Grössen allein durch die Functionen

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

$$\Delta = 1 + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu = \sin^2\theta,$$

$$\Psi(x,y,z) = \Sigma x^2 \sin^2\lambda + 2\Sigma yz(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda),$$

wo λ, μ, ν die Winkel zwischen den Coordinatenaxen sind, ausgedrückt werden. Unter anderem ergiebt sich für die Entfernung p eines Punktes x_1, y_1, z_1 von einer Geraden $(x-\alpha)/a = (y-\beta)/b = (z-\gamma)/c$ die hübsche Formel $p^2 \cdot \Phi(a, b, c) = \Psi(A(y_1, z_1), B(z_1, x_1), C(x_1, y_1))$, wo A, B, C die aus der Matrix mit den Elementen $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ und a, b, c entspringenden Determinanten bedeuten. Es werden auch Beispiele für die leichte Anwendbarkeit der aufgestellten Formeln gegeben, und der Verf. weist auf die vollständige Analogie zwischen ihnen und denen der ebenen Geometrie hin, wenn man nur die Gerade bald als durch einen Punkt und ihre Richtung, bald als durch ihre Axenabschnitte bestimmt auffasst. T.

K. Doehlemann. Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder. Zeitschr. f. Math. **45**, 166-170.

Wenn die Verbindungslinien a, b, c, d entsprechender Ecken zweier Tetraeder einer Regelschar U angehören, so gehören nach einem Satze von Chasles auch die Schnittgeraden a', b', c', d' der entsprechenden Ebenen einer Regelschar V an (hyperboloidische Tetraeder). Es wird nach den Fällen gefragt, in welchen die Regelscharen U und V identisch werden, und es stellt sich heraus, dass der einzige derartige Fall der zweier Tetraeder ist, die einander in der von Möbius angegebenen Weise gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind. Es sind dann die vier Verbindungsgeraden der Ecken mit den Schnittgeraden der Ebenen identisch. Der Nachweis wird durch eine längere analytische Betrachtung geführt. Das Resultat ist indessen fast unmittelbar zu sehen, wenn man von der Regelfläche als dem zunächst gegebenen ausgeht und beachtet, dass es sich hier um Tetraeder handelt, die der Fläche gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind, dass jedes derartige Tetraeder zwei Gegenkanten besitzt, welche der einen Regelschar der Fläche angehören, dass endlich die vier durch die Ecken des Tetraeders gehenden und die vier in seinen Ebenen gelegenen Geraden der anderen Schar zu zwei und zwei zusammenfallen. Zugleich erkennt man dann die Existenz von je ∞^2 Tetraedern, deren jedes Paar in der angegebenen Beziehung steht.

Stz.

K. Doehlemann. Ueber hyperboloidische Gerade. Deutsche Math. Ver. 8_1, 199-200.

Gegeben F_2, bezogen auf ein Polartetraeder $ABCD$; man bestimmt Tetraeder $A'B'C'D'$ derart, dass man z. B. A' erhält als Schnitt der Ebenen durch Kante BC, CD, DB, welche mit den Tangentenebenen durch die Kanten an die F_2 und der Ebene BCD das constante Doppelverhältnis α bilden, so sind AA', BB', CC', DD' hyperboloidische Gerade; die 12 Ebenen berühren eine Fläche zweiter Klasse. Lässt man α variiren, so bewegen sich $A'B'C'D'$ auf vier Geraden durch $ABCD$.

Eine ausführliche Arbeit über diesen Gegenstand siehe F. d. M. **30**, 561, 1899. Wö.

G. Lazzeri. Baricentro di un tronco di prisma triangulare. Periodico di Mat. (2) **2**, 219-220.

S. Catania. Sul baricentro del tronco di prisma triangolare. Ibid. (2) **3**, 28-29.

Beweise des als Quistione 460 zur Ableitung vorgelegten Satzes: Wenn P_1, P_2, P_3 die Mitten der Seitenkanten eines dreiseitigen Prismenstumpfes sind und l_1, l_2, l_3 die Längen dieser Seiten, so ist der Schwerpunkt des Stumpfes zugleich Schwerpunkt der drei Punkte P_1, P_2, P_3, falls sie mit den Gewichten $2l_1+l_2+l_3$, $l_1+2l_2+l_3$, $l_1+l_2+2l_3$ bezw. belastet werden. Lp.

E. Rudert. Ueber kleine Kugelkreise. Eine Anwendung von Grassmann's Ausdehnungslehre. Diss. Leipzig: B. G. Teubner. 77 S. 8°.

Fortsetzung der Arbeit „Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel", über welche im vorigen Jahrgange der F. d. M. berichtet wurde. Gegenstand der Untersuchung ist der „kleine Kugelkreis (P, ϱ)", d. h. jeder Kreis auf der Kugel, dessen sphärischer Mittelpunkt P ist, und dessen Punkte X von P den Bogenabstand $\varrho\ (< \frac{1}{2}\pi)$ haben. Da P und X auch die Vectoren dieser Punkte darstellen, so ergiebt sich die Gleichung des Kreises in der Form $(P|X) = \cos\varrho$. Auf dieser Grundlage erfolgt in einfachster Weise die Uebertragung zahlreicher Begriffe und Sätze der Geometrie ebener Kreise auf die Kugel, wobei im ersten Abschnitt die Beziehungen der Kreise zu einander (Orthogonalkreise, Kreis- und Polarnetze, Kreisbüschel etc.), im zweiten die den sphärischen Dreiecken ein- und umbeschriebenen Kreise behandelt werden, gegebenen Falles unter berichtigendem Hinweis auf verwandte Forschungen, namentlich von Gudermann und Steiner. Schg.

P. Barbarin. Foyers des coniques dans l'espace. Revue de Math. spéc. **10**, 451-452.

Verf. zeigt, dass die Spitzen der in einer früheren Arbeit (Revue de Math. spéc. **10**, (3)) betrachteten, durch einen gegebenen Kegelschnitt gehenden Rotationskegel für diesen Kegelschnitt Brennpunktseigenschaften besitzen. Wbg.

G. Fontené. Paramètre tangentiel d'un cône du second ordre. Revue de Math. spéc. **11**, 33-35.

Der Hauptzweck der Arbeit besteht in der Aufstellung des folgenden Satzes: „Es sei S ein fester Kegelschnitt, C ein Kreis, dessen Ebene zu der des Kegelschnittes parallel ist und dessen Centrum auf dem auf

der Ebene des Kegelschnittes im Mittelpunkte derselben errichteten Lote liegt; betrachtet man die Kegel zweiter Ordnung, welche durch den Kegelschnitt S gehen und deren Scheitel auf dem Kreise C liegen, setzt sie als undeformirbar voraus und lässt sie durch einen beliebigen Kegelschnitt S' so hindurchgehen, dass ihre Scheitel auf einer zu der des Kegelschnittes parallelen Ebene liegen, so liegen diese Scheitel auch auf einem Kreise C', dessen Centrum auf dem auf der Ebene des Kegelschnittes S' im Mittelpunkte desselben errichteten Lote liegt." — Ist S oder S' eine Parabel, so wird der entsprechende Kreis durch eine Parallele zur Directrix ersetzt. Wbg.

J. Mandl. Zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung. Monatshefte f. Math. **11**, 183-192.

Den vom Verf. in derselben Zeitschrift **9**, 169 (F. d. M. **29**, 462, 1898) für die Kegelschnitte abgeleiteten Eigenschaften entsprechen folgende der Flächen zweiter Ordnung: Die Ebenen, welche die Schnittpunkte jedes der von einem Punkt M einer Fläche zweiter Ordnung ausgehenden rechtwinkligen Dreikante mit der Fläche mit einander verbinden, gehen durch einen und denselben Punkt N, der auf der Flächennormale von M liegt; die Gesamtheit der Punkte N bildet wieder eine Fläche zweiter Ordnung, die dieselben Hauptebenen besitzt und von derselben Art, wie die ursprüngliche, aber nicht ähnlich zu ihr ist. Dies wird auf analytischem Wege bewiesen. T.

G. Fauvernier. Sur les équations du faisceau des axes d'une section centrale d'une quadrique. Revue de Math. spéc. **10**, 548-549.

Bekanntlich liegen die Fusspunkte der sechs von einem Punkte P an eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades gezogenen Normalen auf einem Kegel zweiten Grades C, der als Spitze das Centrum der Fläche hat, durch P geht und die Axen der Oberfläche enthält. — Verf. beweist nun folgenden Satz: Ist O das Centrum der Fläche zweiten Grades, so schneidet die Perpendicularebene in O zu der Erzeugenden OP des Kegels C diesen Kegel in zwei rechtwinkligen Erzeugenden OA, OB, welche die Axen des entsprechenden ebenen Schnittes der Fläche zweiten Grades sind. Wbg.

A. Pell. „D" lines on quadrics. American M. S. Trans. **1**, 315-322.

Für die D-Linien, d. h. die Curven auf einer Oberfläche, deren Schmiegungskugeln die Fläche im Berührungspunkt ebenfalls berühren, hat Darboux die Differentialgleichung aufgestellt, speciell für Flächen zweiten Grades eine lineare Differentialgleichung in elliptischen Coordinaten. Davon ausgehend, beweist der Verf. einige Eigenschaften der D-Linien und discutirt ihre Gestalt auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Sr.

Blutel. Sur le minimum de l'angle que fait un diamètre d'un ellipsoïde avec le plan diamétral conjugué. Nouv. Ann. (3) **19**, 466-468.

Ist die Richtung einer Sehne des Ellipsoides $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ durch die Coordinaten x, y, z eines Punktes gegeben, der auf dem zu der Sehne parallelen Durchmesser liegt, und ist zu dieser Sehne die conjugirte Durchmesserebene construirt, so ist der Winkel V, unter welchem die Sehne zu der Durchmesserebene geneigt ist, durch die Formel bestimmt:

$$\sin^2 V\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z_2}{c^2}\right)^2=0.$$

Ist V gegeben, so gehört diese Gleichung einem Kegel vierten Grades zu, dessen Geraden dem Winkel V entsprechen. Dieser Winkel V ist Maximum oder Minimum, wenn der Kegel eine isolirte Doppelgerade hat. Eine solche Doppelgerade muss in einer der Coordinatenebenen sein; fällt sie mit einer Axe zusammen, so ist $\sin^2 V=1$; fällt sie nicht mit einer Axe zusammen, so sei sie in der Ebene $z=0$; dann muss sie mit einem der gleichen conjugirten Durchmesser der Hauptellipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ zusammenfallen, und dann wird $\sin^2 V=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$. Betrachtet man den obigen Kegel mit diesem Werte von $\sin^2 V$, so wird die Doppelgerade eine isolirte, wenn $(c^2-a^2)(c^2-b^2)<0$, und daher muss c die mittlere Axe sein. Also derjenige Hauptschnitt, dessen Ebene zur mittleren Axe senkrecht ist, liefert in einem der gleichen conjugirten Durchmesser die verlangte Sehne, für welche V ein Minimum wird. Mz.

W. Kawalki. Die geradlinig begrenzten Flächenstücke des hyperbolischen Paraboloids. Hamb. Mitt. **3**, 400-405.

In Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung, herausgegeben von Amstein, ist die Bestimmung des Flächeninhaltes eines windschiefen Vierecks auf dem hyperbolischen Paraboloid $z=xy$ durchgeführt. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass bei der Lösung derselben Aufgabe für ein beliebiges hyperbolisches Paraboloid die gleichen elementaren Functionen auftreten wie für das gleichseitige, allerdings mit Argumenten, die schon infolge der beiden neu hinzukommenden Parameter des Paraboloids viel complicirter gebaut sind. Lp.

Ph. du Plessis. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1900. Composition de Mathématiques. Nouv. Ann. (3) **19**, 320-334.

I. Um in der Ebene (P) eines ebenen Schnittes einer Oberfläche (E) die von einem Punkte O an den Schnitt gehenden Normalen zu finden, wird folgende Methode angewandt: Man schneide (E) durch eine um O gelegte Kugel (S) und bestimme den Radius r dieser Kugel so, dass die

Ebene (P) den Kegel (C) berührt, der den Scheitel O hat, und dessen Leitlinie die Schnittcurve (E, S) ist. Die Berührungsgeneratrix OG ist dann Normale an den ebenen Schnitt im Punkte G, in welchem sie der Leitlinie (E, S) des Kegels (C) begegnet. Dies wird nachgewiesen.

II. Anwendung hiervon: Das Ellipsoid (E) mit der üblichen Gleichung wird von der Ebene (P), deren Gleichung $ux+vy+wz=0$, geschnitten. Auf dem zu (P) senkrechten Durchmesser trägt man vom Centrum aus eine Länge OM ab, so dass $2/OM^2 = 1/\alpha^2 + 1/\beta^2$, wo α, β die Halbaxen des ebenen Schnittes (E, P) sind. Wenn nun P alle möglichen Lagen hat, dabei aber immer durch O geht, so beschreibt der Punkt M das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1.$$

III. Die analoge Aufgabe wird gelöst, wenn auf dem zur Ebene (P) senkrechten Durchmesser von O eine Länge ON abgetragen wird, für welche $1/ON = 1/\alpha - 1/\beta$. Der Ort des Punktes N wird in diesem Falle die Fläche des vierten Grades:

$$\left[1-x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-y^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]^2 = 4\,(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{b^2c^2}+\frac{y^2}{c^2a^2}+\frac{z^2}{a^2b^2}\right).$$

Diese Fläche besteht aus zwei Schalen, von denen die eine die Punkte N enthält, für welche $1/ON = 1/\alpha - 1/\beta$, die andere dagegen solche Punkte N' des zu P senkrechten Durchmessers, für welche $1/ON = 1/\alpha + 1/\beta$. Beide Schalen sind durch das Ellipsoid:

$$1-x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-y^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0$$

getrennt. Der Verf. studirt nun näher die Gestaltung dieser Fläche und die ebenen Curven, in denen sie von Ebenen, die den Coordinatenebenen parallel sind, geschnitten wird. Mz.

T. Chollet. **Agrégation des sciences mathématiques (1899): Solution de la question de math. spéc.** Revue de Math. spéc. **10**, 453-456.

A. Vacquant. **Agrégation des sciences mathématiques (Concours de 1899).** Nouv. Ann. **19**, 130-142.

Eigenschaften der Fusspunktenfläche der zu einer gegebenen Ebene parallelen Normalen an alle mit einem gegebenen homofocalen Paraboloide. Wbg.

W. P. Weinberg. **Verallgemeinerung der Aufgabe von Viviani.** Spaczinski's Bote No. 280, 81-83 (Russisch).

Nimmt man in der Aufgabe von Viviani statt der Kugel das drei-

axige Ellipsoid und statt des Kreiscylinders den elliptischen, so hat das analoge Volumen den Wert $\frac{16}{9}abc$. Si.

Th. Leconte. Note. Revue de Math. spéc. **11**, 57.

Als einfache Anwendung der Parameterdarstellung der Punkte eines Kegelschnittes giebt Verf. den Beweis des folgenden Satzes: „Die Erzeugenden desselben Systems einer Fläche zweiten Grades schneiden auf zwei Parallelkreisen der Fläche ähnliche Bogen ab.“ Wbg.

Ch. Michel. Sur les tétraèdres conjugués (ou circonscrits) à deux quadriques. Bull. math. spéc. **6**, 118-120.

Ueber harmonisch einander ein- und umbeschriebene Flächen zweiter Ordnung. Lp.

Ch. Michel. Sur la représentation plane des quadriques. Bull. math. spéc. **6**, 113-115.

Die beiden geradlinigen Erzeugenden durch einen Punkt M einer Fläche zweiter Ordnung werden durch die zugehörigen Parameterwerte λ, μ charakterisirt. Nimmt man λ und μ als die cartesischen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene an, so erhält man die Abbildung der Fläche auf dieser Ebene. Lp.

Ch. Michel. Sur un théorème de Laguerre. Bull. math. spéc. **6**, 65-67.

A. Mannheim. Autre démonstration d'un théorème de Laguerre. Ibid. 98-99.

Beweise des Satzes: Die Normalen einer Oberfläche zweiter Ordnung in A und B mögen eine Hauptebene der Fläche in a und b schneiden. Dann hälftet die Mittelsenkrechtebene von AB den Abstand ab. Lp.

H. E. Timerding. Sur les lignes osculatrices d'une cubique gauche. Annali di Mat. (3) **4**, 199-217.

In Verbindung mit einer Raumcurve dritter Ordnung kann man ein Tetraeder $ABCD$ betrachten, welches auf folgende Weise entsteht: A und B seien Punkte der Raumcurve, in welchen die Tangenten und die Schmiegungsebenen gelegt sind; dann erhält man C und D als die Schnittpunkte der Tangenten in A, resp. B mit der Schmiegungsebene je des andern Punktes, so dass also CD in der Schnittlinie der Schmiegungsebenen liegt. Die beiden Linien AC und BD heissen Schmiegungslinien. Ferner nennt Verf. Zwillingslinien zwei solche Schmiegungslinien, welche dieselben zwei Tangenten treffen (die eine

bez. im Berührungspunkt). Durch zwei Zwillingslinien und die Raumcurve, sowie die zu den Zwillingslinien gehörigen Tangenten geht immer ein einziges Hyperboloid. Die Punkte auf den Zwillingslinien und die Ebenen durch dieselben sind dann in besonderer Weise harmonisch zugeordnet. Man kann nun das Tetraeder als Coordinatentetraeder benutzen, wodurch die Gleichungen der Raumcurven und der Schmiegungslinien sehr einfach werden, und es lässt sich, wie Verf. zeigt, eine sehr interessante Abbildung der Sehnen der Raumcurven auf die Punkte einer Ebene daraus ableiten, von welcher aus eine Darstellung der Schmiegungslinien in der Ebene sich gewinnen lässt. Zum Schluss findet sich noch ein Hinweis auf die Beziehungen der Raumcurven dritter Ordnung zu den binären Formen vierten Grades. Sr.

P. Zeeman Gz. **De reciproke poolkromme eener kubische ruimtekromme.** Nieuw. Archief (2) **4**, 318-324.

Die reciproke Polare einer C_3 in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung ist wieder eine C_3. Nimmt man als Fläche zweiter Ordnung die Kugel und lässt die C_3 beliebig, so lässt sich eine Reihe von Sätzen ableiten über die reciproke Polare, bezw. deren Verhalten gegen das Unendliche. Sr.

Stuyvaert. **Sur une gerbe de cubiques gauches.** Nouv. Ann. (3) **19** 548-557.

Während die Kegelschnitte, die eine doppelte Berührung (in denselben zwei Punkten) haben, einen besonderen Fall eines Kegelschnittbüschels abgeben, und daher auch die Eigenschaften eines solchen besitzen, ist das Entsprechende bei dem Bündel (gerbe) kubischer Raumcurven, die durch zwei feste Punkte A, C gehen und in A, C dieselben Tangenten AB, CD, ferner dieselben Schmiegungsebenen ABD, CBD besitzen, nicht der Fall; d. h. sie entfernen sich weit in ihren Eigenschaften von dem System aller durch fünf feste Punkte gehenden kubischen Raumcurven. Beide Systeme oder Bündel haben nur die gemeinsame Eigenschaft, dass jeder neue Punkt des Raumes ein Individuum in jedem der Bündel bestimmt.

Der Verf. erwähnt dann die Dissertation von Heinrichs: Ueber den Bündel derjenigen Raumcurven, u. s. w. (F. d. M. **19**, 641, 1887); in dieser Arbeit ist der vorliegende Gegenstand nach der Methode der projectiven Geometrie eingehend behandelt. Er will nun hier die ebene analytische Geometrie benutzen, um einige Sätze dieses Systems von Raumcurven zu beweisen. Das vorerwähnte Tetraeder $ABCD$ schneidet der Verf. durch eine Ebene ν, beobachtet in dieser die drei Durchgänge jeder einzelnen Raumcurve und die Kegelschnitte, in welchen ν von Kegeln, die eine solche Curve aus einem ihrer Punkte projiciren, getroffen wird. Diese Ebene ν wird nachher als parallel zu zwei Gegen-

kanten des Tetraeders $ABCD$ gedacht, und zwei Gerade in ihr, die den Gegenkanten parallel sind, werden zu Coordinatenaxen genommen. Auf diese Art wird z. B. bewiesen: Der Ort der Berührungspunkte, welche die Ebene v mit den sie berührenden Curven des Bündels gemein hat, ist eine Gerade. Ferner: Die Raumcurven des Bündels, die eine Ebene v berühren, schneiden dieselbe noch auf einem bestimmten Kegelschnitt. In dieser Weise sind noch einige andere Sätze angegeben. Mz.

W. H. Blythe. On models of cubic surfaces. Quart. J. **32**, 266-270.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Gestalt einer F_3 mit 27 reellen Geraden zu ermitteln, wenn Teile aller dieser Geraden der Lage nach gegeben sind. Als Hülfsmittel dient ihm die Bemerkung von F. Klein, dass eine solche F_3 ohne wesentliche gestaltliche Veränderung übergeführt werden kann in eine F_3 mit vier reellen Knotenpunkten. Dabei gehen je sechs Quadrupel von Geraden in die Knoten des Tetraeders der Knotenpunkte über. Die übrigen drei Geraden, Transversalen genannt, liegen in einer Ebene. Der Aufbau der Fläche vollzieht sich dann aus Schnitten parallel zu dieser Ebene. Wö.

J. I. Hutchinson. The Hessian of the cubic surface. II. American M. S. Bull. (2) **6**, 328-337.

Man vergleiche das Referat über den ersten Teil der Arbeit in F. d. M. **30**, 567, 1899. Der Zweck des zweiten Teiles besteht in der Bestimmung aller Curven fünfter und sechster Ordnung auf der Hessiana der kubischen Oberfläche und in der Ableitung einiger Sätze über diese Curven und die schon im ersten Teile bestimmten Curven vierter Ordnung. Es ergeben sich vier Klassen von Curven fünfter Ordnung, alle von der ersten Species nach Salmon's Einteilung (Geometry of three dimensions, 4[th] ed., p. 318); dieselben enthalten der Reihe nach 10, 60, 60, 30 Familien. Von Curven sechster Ordnung giebt es sechs Klassen mit je 30, 10, 10, 15, 60, 1 Familien. Lp.

G. Fontené. Formes réduites d'une relation triplement linéaire entre trois variables. Nouv. Ann. (3) **19**, 494-498.

Abgesehen von Ungleichheitsbedingungen, kann die allgemeine dreifach lineare Relation zwischen x, y, z ersetzt werden durch die Formeln:

$$\frac{x-a}{L} = T(u),\ \frac{y-b}{M} = T(v),\ \frac{z-c}{N} = T(w),$$
$$u + v + w = \text{const.},$$

wo unter T je nach dem Vorzeichen der Discriminante die Tangentenfunction des Kreis- oder Hyperbelbogens zu verstehen ist. Verf. benutzt

diese Darstellung zur Ableitung der Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung, welche drei Doppelpunkte besitzt. R. M.

F. Dumont. Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre. S. M. F. Bull. **28**, 117-121.

Jede F_3 mit dreifach-strahliger Symmetrie ist collinear zu einer F_3 mit drei im Endlichen gelegenen Punkten I_3, für deren jeden die Indicatrix eine C_3 ist, und umgekehrt. Die Existenz zweier solcher Punkte I_3 zieht diejenige des dritten nach sich. Eine F_3 mit sechs Punkten I_3 je zu dreien auf einer Geraden kann für den Fall, dass in jedem der Punkte I_3 die drei Flächengeraden reell sind, keinen siebenten Punkt derselben Beschaffenheit besitzen. Wö.

P. Appell. Propriété caractéristique du cylindroïde. S. M. F. Bull. **28**, 261-265.

Der Verf. hat früher (Revue de Math. spéc. **5**, 1895) bewiesen, dass das Cylindroid das einzige Konoid derart ist, dass der Ort der Projectionen von irgend einem Punkte des Raumes auf die Erzeugenden eine ebene Curve ist. Er zeigt nun, dass das Cylindroid überhaupt die einzige Regelfläche ist, welche die genannte Eigenschaft besitzt (von dem Cylinder abgesehen). Zum Schluss macht er auf eine Fläche aufmerksam, welche der Ort einer Geraden ist derart, dass die Projectionen dreier gegebenen Punkte auf dieselbe resp. in drei gegebenen Ebenen liegen. Wö.

J. Schmidt. Das Cylindroid als geometrischer Ort der kürzesten Transversalen windschiefer Flächen. Pr. Kaiser Franz-Josef-Staatsrealschule in Plan. 21 S.

Der Verf. setzt eine feste Gerade A und eine zu ihr windschiefe Gerade B voraus, welche sich in einer Ebene oder aber im Raume nach gegebenen Gesetzen bewegt.

Die Gesamtheit aller kürzesten Transversalen zwischen der festen Geraden A und der sich bewegenden B, so wie die Transversalen zwischen einer bestimmten Lage und den durch die vorgeschriebene Bewegung bedingten Lagen derselben Geraden bilden den Gegenstand der Untersuchung. Der Verf. gelangt so zu vier Sätzen, in welchen das Cylindroid als geometrischer Ort auftritt. Sda.

J. Hammond. Question 6400. Ed. Times **73**, 74-75.

Die Oberfläche $x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3$ ist eine Umdrehungs-

fläche; die Rotationsaxe ist $x=y=z$, die Gleichung der erzeugenden Curve $pr^2 = \frac{4}{9} a^3 \sqrt{3}$, wo p und r die cartesischen Coordinaten eines Punktes für die Rotationsaxe als p-Axe sind. Beweis von J. Blaikie, H. M. Taylor, J. de Vries. Lp.

F. SCHIFFNER. Ueber den geometrischen Ort von Punkten, deren drei rechtwinklige Raumcoordinaten ein constantes Product haben. Pr. k. k. Staatsrealschule und gewerbliche Fortbildungsschule im III. Bezirke in Wien, 1899-1900, 46 S.

Analytische Behandlung der Fläche $xyz = k^3$. Vielfache Punkte derselben, ihre 27 Geraden und ihre 45 dreifach berührenden Ebenen. Ihre Polarflächen. Krümmungsverhältnisse der Fläche. Dieses Kapitel hätte an Einfachheit und Eleganz gewonnen, wenn der Verf. die von Darboux in seiner Théorie des Surfaces **1**, 196 angewandte Methode berücksichtigt hätte (vergl. das Referat über Meth in F. d. M. **19**, 806, 1887).

Die Fusspunktenfläche dieser Fläche. Die Fläche als Umhüllte von Ellipsoiden. Sda.

Weitere Litteratur.

J. K. BINDER. Ueber eine gewisse Abbildung zweier Rotationshyperboloide auf einander. Diss. Leipzig. 81 S. 8° und 4 Taf.

H. EMCH. Note on the loxodromics of the sphere. Amer. Math. Monthly **6**, 233-237.

E. LAMPART. Die geodätischen Linien auf der dreiaxigen Fläche zweiten Grades, welche sich mittels einer Transformation zweiten Grades durch elliptische Functionen ausdrücken. Diss. München: F. Straub. 42 S. 8°.

Bericht auf S. 454 dieses Bandes.

R. RUSSELL. Geometry of surfaces derived from cubics. Dublin. Proc. (3) **5**, 462-476 (1899).

H. M. TAYLOR. On the construction of a model showing the 27 lines on a cubic surface. Cambr. Trans. **18**, 375-379.

D. Andere specielle Raumgebilde.

G. HUBER. Ueber den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche. Zeitschr. f. Math. **45**, 86-118.

Nachdem Harnack in den Math. Ann. **12**, 47 (F. d. M. **9**, 55 ff., 1877) die allgemeine Raumcurve vierter Ordnung erster Species auf Grund ihrer Darstellung durch doppelt-periodische Functionen ausführlich behandelt hat, wird in der vorliegenden Arbeit speciell der sphärische Kegelschnitt vermittelst dieser Darstellung eingehend untersucht. Besonders berücksichtigt werden dabei die beiden Krümmungen, die

Quadratur, welche sich durch Benutzung einer Schar confocaler Ellipsen auf der Kugel sehr einfach gestaltet, und die Rectification, zu welcher die Polarellipse, in der die Kugeloberfläche durch die Lote aus dem Kugelmittelpunkte auf die Tangentialebenen des die sphärische Ellipse ausschneidenden Kegels getroffen wird, herbeigezogen wird. Besonders eingehend wird die abwickelbare Tangentenfläche behandelt. Ihre Coordinaten werden in sehr einfacher Form durch elliptische Functionen zweier Parameter u, v darstellbar; hierbei sind die Parametercurven $u = \text{const.}$ die Erzeugenden der Fläche, während die Curven $v = \text{const.}$ ein System von Curven achter Ordnung liefern, die sich als Curven vierter Ordnung auf die drei Coordinatenebenen projiciren. Die Doppelcurven der Fläche in den drei Coordinatenebenen und in der unendlich fernen Ebene, die sich für halbe Periodenwerte von v ergeben, lassen sich durch einfache Gleichungen vierten Grades in rechtwinkligen Coordinaten darstellen und leicht construiren. Schliesslich wird das sphärische Bild der Fläche, d. i. die Curve, welche die aus dem Kugelmittelpunkte auf die Schmiegungsebenen der Tangentenfläche gefällten Lote auf der Kugel ausschneiden, untersucht, und es werden die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Fläche und die Gleichungen der Krümmungslinien aufgestellt. T.

L. Rouyer. Sur les surfaces réglées du quatrième degré. Toulouse Ann. (2) **2,** 163-205.

Die Arbeit bezieht sich auf Regelflächen vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden. Indem diese letzteren als Träger zweier projectivischen Ebenenbüschel angesehen werden, ist die Gleichung der Fläche quadratisch in jedem der Parameter λ und μ der Ebenenbüschel und erscheint als das Integral einer Additionsdifferentialgleichung elliptischer Integrale, wobei die Fläche in Parameterdarstellung lautet:

$$x = \frac{1}{v};\ y = \frac{\operatorname{sn} u}{v};\ z = \operatorname{sn}(u - a).$$

Als ausgezeichnete Erzeugende bezeichnet der Verf. die acht Geraden, längs deren sich die Fläche wie eine Abwickelbare verhält. Die Fläche lässt sich ferner als Enveloppe von F_2 betrachten, welche die Doppelgeraden in zwei festen Punkten treffen, von welchen je eine ausgezeichnete Erzeugende ausgeht. Alle F_2 berühren vier feste Ebenen. Es giebt 12 Familien von F_2, welche der Fläche S längs einer Raumcurve vierter Ordnung eingeschrieben sind; jeder entspricht eine besondere Form des Additionstheorems der elliptischen Functionen. Der Verf. stellt nun die Bedingungen auf, a) dass vier Erzeugende einer F_2 angehören, b) dass eine F_2 die Fläche längs zweier Geraden berühre, c) dass eine F_2 S osculire (durch eine Erzeugende gehen deren neun), d) dass eine F_2 S hyperosculire (es giebt deren 16, und es werden die 16 Erzeugenden, längs deren sie berühren, untersucht). Der Verf. untersucht weiter den Zusammenhang des Doppelverhältnisses der vier durch

die zu einer Doppelgeraden gehörigen ausgezeichneten Geraden gehenden Büschelebenen mit dem Modul der elliptischen Functionen. In das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der ausgezeichneten Erzeugenden mit der Doppelgeraden geht ausser dem Modul auch die Invariante α ein. Durch jeden Punkt der Fläche gehen an dieselbe vier Doppeltangenten, deren Doppelverhältnis constant und ebenfalls eine Function des Moduls ist. Der Verf. betrachtet weiter polygonale Züge, aus Erzeugenden bestehend, deren Ecken auf der Doppelgeraden liegen, und kommt zu Polygonen, welche den Poncelet'schen analog sind; sodann zeigt er, dass man immer eine F_2 finden kann, in Bezug auf welche S autopolar ist. Die Haupttangentencurven von S bestimmen sich durch Quadraturen und sind algebraische Raumcurven achter Ordnung; sie gehen durch die Schnittpunkte der Doppelgeraden mit den ausgezeichneten Erzeugenden. Der Verf. zeigt noch die Modificationen, welche die vorstehende Theorie durch Auftreten einer dritten, die beiden ersten schneidenden Doppelgeraden erleidet, und im Anhang noch einige andere Ausartungsfälle, nämlich Flächen mit zwei zusammenfallenden Doppelleitlinien, solche mit Doppelcurve dritter Ordnung, und solche mit Doppelkegelschnitt und Doppelgerade. Wö.

C. M. Jessop. The quartic surfaces with fourteen, fifteen and sixteen nodes. Quart. J. **31**, 354-357.

Der Verf. giebt Ergänzungen zu den Arbeiten von Kummer (Berl. Monatsber. 1864, Berl. Abh. 1866) hinsichtlich der einen, resp. zwei Relationen, welche zwischen den linearen, in der Gleichung einer F_4 mit 14 Knotenpunkten $\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=0$ auftretenden Formen x,y,z; x',y',z' bestehen müssen, wenn die Fläche 15, resp. 16 Knoten haben soll.

Wö.

E. Lacour. Sur la surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité. Nouv. Ann. (3) **19**, 362-369.

Ist in den drei Ebenen eines rechtwinkligen Dreikants je ein Kreis mit Mittelpunkt im Dreikantscheitel O gegeben, und geht durch die drei Kreise je eine Kugel mit veränderlichem Radius derart, dass, wenn P und M die gemeinsamen Punkte der drei Kugeln, OP immer senkrecht zu MP ist, so ist der Ort von M eine Wellenfläche, derjenige von P eine Elasticitätsfläche. Dabei ist P Projection von O auf die Tangentialebene der Wellenfläche in M. Sind α, β, γ die Radien der Kreise, so ist die Parallele zu MP durch O eine Axe der Schnittellipse, in welcher die zur Tangentialebene in M parallele Diametralebene das Ellipsoid $\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+\gamma^2 z^2=1$ schneidet; diese Axe hat die Länge $1/OP$. Nennt man „Schwingungslinie“ (nach Tait) eine Curve auf der Wellenfläche, deren Tangente in jedem Punkte M die Schwingungsrichtung, d. h. die Projection von OM auf die Tangentialebene ist, so sind $u=$ const.

die Schwingungslinien, $v =$ const. die Orthogonaltrajectorien derselben für die Wellenfläche:

$$\begin{cases} x = \beta \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, l), \\ y = \alpha \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, l), \\ z = \alpha \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, l), \end{cases}$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}}; \quad l = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}}.$$

Wö.

J. DE VRIES. Over de voetpuntencirkels van het puntenveld met betrekking tot een gegeven driehoek. Amst. Versl. **9**, 249-252.

Cyklographische Untersuchung des ∞^2 Systems der im Titel bezeichneten Kreise. Man errichte in jedem Punkte P der Ebene das Lot und trage auf ihm beiderseits zwei Punkte Q_1, Q_2 und Q'_1, Q'_2 ab, so dass die Strecken $PQ_1 = PQ'_1$ und $PQ_2 = PQ'_2$ die Halbaxen des Inkegelschnitts des Dreiecks mit P als Mittelpunkt sind. Der Ort dieser beiden Punktepaare ist die gesuchte Oberfläche; sie ist vierter Ordnung und hat 14 Knotenpunkte, von denen sechs in der Ebene des Dreiecks liegen, vier Paare den Mittelpunkten der In- und Ankreise entsprechen. Der Verf. nennt diese Fläche die „Wellenfläche der Inkegelschnitte.“

Lp.

G. FONTENÉ. Sur les surfaces du quatrième ordre qui ont deux droites doubles. Nouv. Ann. (3) **19**, 400-409.

Das Erzeugnis zweier in einer Correspondenz (2, 2) stehenden, in einer Ebene gelegenen Strahlenbüschel ist eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten; aus den verschiedenen Formen, in welche sich die Verwandtschaftsgleichung bringen lässt, ergeben sich sehr einfach die verschiedenen möglichen Systeme von Kegelschnitten, die die Curve in je vier Punkten berühren, und demnach die verschiedenen Erzeugungsarten der Curve als Enveloppe von Kegelschnitten. Derselbe Gedankengang wird auf die Fläche (Regelfläche) vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden, dem Erzeugnis zweier ebenfalls in einer Correspondenz (2, 2) stehenden Ebenenbüschel (oder windschiefen Punktreihen), angewendet. Unter anderem folgt, dass sich eine solche Fläche auf zwölffache Weise als Enveloppe gewisser Flächen zweiter Ordnung herstellen lässt, eine Erzeugungsweise, zu der Bricard von einem anderen Gesichtspunkte aus (S. M. F. Bull. **25**, 180; F. d. M. **28**, 594, 1897) gelangt ist.

T.

M. DE FRANCHIS. Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo. Palermo Rend. **14**, 33-65.

Die rationalen Flächen vierter Ordnung vom Flächengeschlecht Null sind bereits von Noether bestimmt. Verf. unternimmt nun die Bestimmung aller Flächen vierter Ordnung, für welche das Flächengeschlecht $p_g = 0$, aber das numerische und zweite Geschlecht p_n und $P \neq 0$ ist. Er geht dabei aus von den Bedingungen, welche die singulären Punkte der Flächen erfüllen müssen, und findet, dass die gesuchten Flächen entweder Kegel sind oder ein-eindeutig abbildbar sind auf Kegel dritter Ordnung, indem er die Curvenscharen der Flächen untersucht, welche einen elliptischen Büschel bilden.

Im zweiten Abschnitt werden die Cremona-Transformationen, durch welche die Abbildungen der Flächen vierter Ordnung auf die Kegel stattfinden, genauer untersucht. Sr.

A. Berry. On quadric surfaces which admit of integrals of the first kind of total differentials. Cambr. Trans. **18**, 324-332.

Als Ergänzung der Arbeit von Poincaré: „Sur les intégrales de différentielles totales" (C. R. **99**, 1145-1147; F. d. M. **16**, 295, 1884) stellt der Verf. die Existenz von drei neuen Flächen vierter Ordnung fest, welche die bezeichnete Eigenschaft besitzen, was er übrigens schon in C. R. **129**, 449-451 veröffentlicht hatte (F. d. M. **30**, 569, 1899).

Lp.

H. W. Richmond. Rational space-curves of the fourth order. Cambr. Trans. **19**, 132-150.

Versuch zu einer Monographie dieser Curven seit ihrer Entdeckung durch Cayley und Salmon 1849. Historische Uebersicht, Bibliographie. Allgemeine Ausdrücke für die Coordinaten der Punkte einer R_4^3 in Gliedern mit einem Parameter. Die Relation zwischen den Parametern coplanarer Punkte. Erste Normalform der Parametergleichungen der Curve. Zusammenhang mit der Theorie der binären Form vierten Grades und ihren Concomitanten. Die Fortsetzung wird versprochen.

Lp.

D. Montesano. Su alcune superficie omaloidiche di 4° e 5° ordine prive di linee multiple. Napoli Rend. (3) **6**, 158-171.

Es ist bekannt (Cremona: „Sulle trasf. raz. nello spazio". Annali (2) **5**, 1872), dass eine birationale quadratische Raumtransformation existirt, in welcher jedes der homaloidischen Systeme aus den Quadriflächen besteht, welche durch einen Kegelschnitt (c_2 oder a_2) gehen und in einem Punkte (O oder P) desselben dieselbe Berührungsebene (ω oder π) haben, eine Ebene, welche durch die Tangente (k oder s) des betrachteten Kegelschnitts in dem angegebenen Punkte geht. Unterwirft man einer solchen Transformation eine Fläche dritter Ordnung, welche in O die Ebene ω berühre, so erhält man eine Fläche vierter Ordnung, welche nach den Arbeiten von Noether (vgl. F. d. M. **3**, 425, 1871) und Cremona

(vgl. F. d. M. **13**, 638, 1881) sehr wohl bekannt ist. Wenn man nun statt jener Fläche dritter Ordnung eine der folgenden annimmt: a) eine Fläche vierter Ordnung, die k als Doppelgerade hat, ω in O berührt und durch c_2 geht; b) eine Fläche vierter Ordnung, die k als Doppelgerade hat und ω in O berührt; c) eine Fläche fünfter Ordnung, die k als dreifache Gerade hat, ω in O berührt und durch c_2 geht, so erhält man der Reihe nach eine rationale Fläche vierter Ordnung der zweiten Noether'schen Gattung (Math. Ann. **33**; F. d. M. **21**, 827, 1889) und zwei neue rationale Flächen fünfter Ordnung, jede mit ebenen Schnitten vom Geschlecht 6. Diese drei Flächen werden vom Verf. gründlich untersucht; insbesondere werden sie auf eine Ebene eindeutig abgebildet, und dadurch werden die Grundsätze der Geometrie auf denselben erhalten.

Andere rationale Flächen fünfter Ordnung können auf ähnliche Weise erzeugt werden, wie der Verf. zum Schluss seiner Arbeit andeutet; mit denselben wird er sich bei nächster Gelegenheit eingehend beschäftigen. La.

J. de Vries. **Ruimtekrommen van den vijfden graad en het erste geslacht.** Amst. Ak. Versl. **8**, 451-457.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen fünf Bisecanten dieser Curven, durch jeden Punkt der Curve zwei Trisecanten. Die Regelfläche der Bisecanten, die sich auf eine gegebene Gerade stützen, hat die Ordnung 15, die Regelfläche der Trisecanten die Ordnung 12 u. s. w. Lp.

H. Richmond. Ueber Minimalflächen. (Eine Berichtigung.) Math. Ann. **54**, 323-324.

Der Verf. berichtigt eine Aufzählung von Lie für diejenigen Minimalflächen, deren Ordnung niedriger ist als 17, und die nicht Doppelflächen sind. Verf. behauptet die Existenz einer Minimalfläche 12. Ordnung und 12. Klasse, während eine Minimalfläche 12. Ordnung und 18. Klasse, die Lie angegeben hat, nicht existirt. Die Ausführung befindet sich in Cambr. Trans. **19**. Sr.

H. W. Richmond. On the simplest algebraic minimal curves, and the derived real minimal surfaces. Cambr. Trans. **19**, 69-82.

Diese Abhandlung giebt die Beweise für die Behauptungen des Verf. in der vorstehend angezeigten Note. Lp.

H. W. Richmond. On minimal surfaces. Cambr. Trans. **18**, 324-332.

Einige Eigenschaften der Enveloppe der Ebene $lx + my + nz = p$,

wenn p homogen vom ersten Grade in l, m, n ist und der Laplace'schen Gleichung genügt. Lp.

R. DE MONTCHEUIL. **Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima.** S. M. F. Bull. **28**, 268-269.

Ein Formelsystem, welches sich einerseits als Verallgemeinerung der Minimalflächenformeln erweist, andererseits interpretirt werden kann als Darstellung einer Translationsfläche, von der eine Curve mit den zugehörigen Tangentialebenen der Fläche vorgeschrieben ist. Hsb.

CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN. **Sur la surface de révolution minimum.** Brux. S. sc. **24A**, 49-52.

Es kann zwei Lösungen, eine oder auch gar keine Lösung für das klassische Problem geben: durch zwei Punkte in einer Ebene eine Curve zu legen, die bei der Drehung um eine Axe in dieser Ebene eine Umdrehungsfläche kleinsten Inhaltes erzeugt. Mn. (Lp.)

ISSALY. **Sur l'hélicoïde général.** Nouv. Ann. (3) **19**, 499-502.

Angabe einer Methode, nach der man in recht einfacher Weise in der allgemeinen Gleichung der Schraubenflächen:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r) + a\theta$$

$\varphi(r)$ derart bestimmen kann, dass sie eine Reihe von Minimalflächen umfasst. Die erste dieser Reihe ist die flachgängige Schraubenfläche, die letzte die Alysseïde von Bour. Js.

A. RENFER. **Ueber Schraubenlinien und Schraubenflächen.** Diss. Bern. Burgdorf: S. Haller. 68 S. u. 8 Taf. 4°.

Eine zusammenhängende, ins einzelne gehende Betrachtung des in vielen Lehrbüchern bruchstückweise behandelten Gegenstandes bildet den ersten Teil der Arbeit. In einem zweiten Teile werden Schraubenflächen untersucht, deren Strictionslinien Ellipsen oder Kreise sind. T.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

A. B. STOTT. **On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids.** Amst. Verh. **7**, No. 3, 21 S.

An einem der fünf regelmässigen Körper kann man ebene Schnitte in gleichen Abständen parallel zu einer Begrenzungsfläche a legen, die Gestalten dieser Schnitte untersuchen und ihre Begrenzungslinien dadurch in der Ebene a zur Anschauung bringen, dass man die an a grenzenden Flächen samt den entstandenen Schnittlinien durch Drehung in die

Ebene a bringt. Analog hierzu werden in obiger Arbeit die Gestalten der Schnittkörper untersucht und abgebildet, welche durch Schnitte eines der regelmässigen vierdimensionalen Körper mit einem zu einem seiner Grenzkörper parallelen R_3 entstehen. Die Schnittkörper sind ausserdem teils durch ihre ebenen Netze, teils durch perspectivische Darstellungen veranschaulicht. Schg.

R. Le Vavasseur. Sur la pyramide régulière à $n+1$ sommets de l'espace à n dimensions, et le groupe fini qui lui correspond. Toulouse Bull. et Mém. 8 (1899-1900), 177-187.

Eine der Hypersphäre $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ eingeschriebene Pyramide mit $n+1$ Ecken wird „regelmässig" genannt, wenn der Abstand je zweier Ecken immer denselben Wert hat. Zunächst berechnet der Verf. diesen Abstand θ, der gleich $\arccos(-1/n)$ gefunden wird; ebenso werden die Coordinaten aller Ecken gefunden und hieran mehrere Aufgaben über andere eingeschriebene Pyramiden geknüpft. Zuletzt wird die der regelmässigen Pyramide entsprechende endliche Gruppe analytisch untersucht. Lp.

P. H. Schoute. Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions. Amst. Verh. 7, No. 4, 66 S.

In Math. Ann. 45 (1894) hat Schubert die Anzahlen für diejenigen $M_p^{(2)}$ im R_n bestimmt, welche $n(p+2)-\frac{1}{2}p(p+1)$ einfachen Bedingungen genügen. Die Ausrechnung dieser Anzahlen durch Einsetzung gegebener Werte von p und n in die allgemeinen Formeln ist aber, da es sich um Summen aus zahlreichen Producten handelt, sehr mühsam und muss, da die Zusammenhänge der Anzahlen nicht ersichtlich sind, für jede derselben einzeln ausgeführt werden. Der Verfasser befolgt daher in obiger Arbeit für den Fall $p=3$, $n=4$ den von Schubert selbst im „Calcül der abzählenden Geometrie" für die Flächen 2. Ordnung im R_3 eingeschlagenen Weg, mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips und des Principes der Erhaltung der Anzahl zu den gesuchten Zahlen zu gelangen, wobei sich die Rechnung durch Vermeidung der oben erwähnten Uebelstände wesentlich vereinfacht. — Nach Aufstellung, Deutung und Einteilung der Schubert'schen Symbole und ihrer Beziehungen zu einander werden zuerst für einige einfache symbolische Gleichungen geometrische Oerter ermittelt, wobei festgestellt wird, dass im R_4 jede einfache Curve 2. Ordnung eine ebene, 3. Ordnung eine Raumcurve ist und jede Fläche 2. Ordnung sich in einem R_3 befindet. In den folgenden Abschnitten werden behandelt: Combinationen aus 2, 3, 4 verschiedenen Elementen (Punkt, Gerade, Ebene, Raum), Combinationen, welche gleichartige Elemente enthalten, die Zahl der Ausartungen eines einfach unendlichen Systems von Kegelschnitten und Flächen 2. Ordnung, die Zahlen der Kegelschnitte, welche 11, der Kegel, welche 12, und der allgemeinen Flächen 2. Ordnung, welche 13 ein-

fachen Bedingungen genügen. Endlich wendet sich die Untersuchung den dreidimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeiten ($M_3^{(2)}$) zu und behandelt, analog mit dem Vorhergehenden, die Zahlen der Ausartungen eines einfach unendlichen Systems von $M_3^{(2)}$ und die Zahlen der $M_3^{(2)}$, welche 14 einfachen Bedingungen genügen. Schg.

J. Sommer. Focaleigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raume. Math. Ann. 53, 113-160.

Die Arbeit verfolgt im wesentlichen den Zweck, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt, speciell die Fadenconstructionen des Ellipsoids, wie sie in den einschlägigen Arbeiten von O. Staude behandelt worden sind, auf die quadratischen Mannigfaltigkeiten ($M_3^{(2)}$) im R_4 zu übertragen. Es werden zunächst vier Typen confocaler $M_3^{(2)}$ mit den auf ihnen liegenden Flächen 2. Ordnung aufgestellt. Die Zwischenformen dieser Typen (Ausartungen mit speciellen Parametern) führen auf die Focalflächen. Sodann wendet sich der Verf. zu der für die Focaleigenschaften der $M_3^{(2)}$ fundamentalen Aufgabe: Einen Streckenzug $PQRx$ im R_4 mit der Eigenschaft maximaler oder minimaler Länge zu ziehen, wenn Q auf einem Ellipsoid, R auf der Focalellipse desselben liegt und x Brennpunkt dieser Ellipse ist. Das Problem wird zunächst algebraisch mit rechtwinkligen Coordinaten behandelt, sodann, um schwierige Eliminationen zu umgehen, mit elliptischen Coordinaten, nachdem vorher verschiedene Sätze über confocale Flächen im R_3 verallgemeinert worden sind. Für die verallgemeinerten Focalstrahlen (und die Tangenten an drei $M_3^{(2)}$ von verschiedenen Typen) werden dann direct Abel'sche Differentialgleichungen aufgestellt nebst einem linearen Ausdruck für ihr Linienelement. Gleichzeitig wird der Uebergang zu den Differentialgleichungen und dem Linienelement der geodätischen Linien auf den $M_3^{(2)}$ gewonnen. Die aus geodätischen und Krümmungslinien bestehenden geschlossenen Linienzüge führen dann zu den Focaleigenschaften der Mittelpunktsflächen 2. Grades im R_3. Zuletzt wird die Staude'sche Fadenconstruction einer $M_2^{(2)}$ in analoger Weise für die $M_3^{(2)}$ ausgeführt und eine Gleichung aufgestellt, welche die Focaleigenschaften der vier Typen $M_3^{(2)}$ im R_4 zusammenfasst. Auch die Ausdehnung des eingeschlagenen Verfahrens auf höhere Mannigfaltigkeiten ist ersichtlich. Schg.

J. Sommer. Ueber Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 193-196.

Mittels eines Satzes der Variationsrechnung wird der für das Ellipsoid bestehende Zusammenhang zwischen Nabelpunkten und geodätischen Linien auf quadratische Mannigfaltigkeiten im R_4 ausgedehnt, woraus die weitere Verallgemeinerung auf höhere Räume hervorgeht. Schg.

E. O. Lovett. Note on geometry of four dimensions. American M. S. Bull. (2) **7**, 88-100.

Der Verf. beginnt mit einer Aufzählung der verschiedenen Richtungen, die sich in der Entwickelung der mehrdimensionalen Geometrie unterscheiden lassen. 1. Eine directe Ausdehnung der cartesischen Geometrie, welche Ausdehnung als nichts anderes anzusehen ist als eine passende Ausdrucksweise. In dieser Gestalt entsprang der n-dimensionale Raum der Denkweise von Grassmann, Cayley, Gauss und Cauchy, und die Vorstellung war Euler und Lagrange gleichfalls geläufig. 2. Die Transformation der gewöhnlichen, wahrnehmbaren Räume von zwei und drei Dimensionen in Mannigfaltigkeiten höherer oder niedrigerer Dimensionen durch die Einführung anderer Raumelemente als des Punktes oder seines dualen Elementes; so z. B. die Liniengeometrie von Plücker, die Kugelngeometrie von Lie, die fünfdimensionale Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte in der Ebene als ein Hülfsmittel für die Ball'sche Schraubentheorie. Diese Kategorie ist vielleicht fasslicher als jede andere. 3. Die absolute Geometrie des Raumes. Hierhin wäre zu stellen die berühmte Abhandlung von Riemann, die wohlbekannten Schriften von Helmholtz und Lie und das durchdachte Veronese'sche Werk. 4. Die Ausdehnung der Methoden der gewöhnlichen Differentialgeometrie auf Räume von mehr Dimensionen. In diese Klasse gehören die Arbeiten von Christoffel, Beltrami, Bianchi, Cesàro und Ricci nebst den jüngsten Beiträgen Darboux's und seiner Schüler. 5. Die directe Ausdehnung der Begriffe und Aufgaben der metrischen und projectiven Geometrie des gewöhnlichen Raumes, verdeutlicht in den Abhandlungen von Jordan, d'Ovidio und Veronese. 6. Die Theorie birationaler Verwandtschaften, wie Noether, Kantor und Brill sie studiren. 7. Die darstellende Geometrie des Raumes von n Dimensionen, begonnen in den Schriften von Veronese, Stringham, Schlegel und Segre. 8. Die Kinematik höherer Räume, entwickelt von Jordan, Clifford und Beltrami. 9. Die Deutung der n-dimensionalen Geometrie im Lichte der Gruppentheorie, dargestellt von Lie, Klein und Poincaré. — Ref. begnügt sich damit, hierzu zu bemerken, dass diese Aufzählung die vorhandenen Richtungen nicht erschöpft, und dass die Auswahl der genannten Autoren grosse Lücken aufweist.

Der eigentliche Inhalt der Abhandlung wird vom Verf. als ein Beitrag zur neunten und zur vierten der obigen Kategorien bezeichnet. Der vierdimensionale Raum wird nach der Lie'schen Methode der continuirlichen Gruppen construirt, und die Curven dreifacher Krümmung werden nach der von Cesàro in seinen „Lezioni di geometria intrinseca" entwickelten natürlichen Analysis entwickelt. Die directe Ableitung der erhaltenen Resultate findet sich schon bei Pirondini: „Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni" (Batt. G. **28**, 219-239; F. d. M. **22**, 813, 1890). Lp.

E. O. Lovett. A property of lines in n-dimensional space. American J. **22,** 226-230.

Der Verf. bringt zuerst in Erinnerung, wie die Begriffe der Differentialgeometrie auf vier- und mehrdimensionale Räume ausgedehnt werden, und benutzt dann die von Cesàro in seinen „Lezioni di geometria intrinseca" aufgestellte Methode, um den Satz zu beweisen: Unter allen R_3, welche durch einen Punkt M einer Curve im R_n gehen, besitzen diejenigen, welche die Tangente enthalten, die Eigenschaft, dass ihre Abstände von Curvenpunkten, die M unendlich nahe liegen, unendlich kleine Grössen höherer Ordnung sind, und die des osculirenden Raumes von mindestens vierter Ordnung. Schg.

J. Brill. Note on the generalization of a special solution of a system of Pfaffian equations. Messenger (2) **30,** 113-127.

Die Discussion der Verallgemeinerung einer speciellen Lösung einer einzigen Pfaff'schen Gleichung ist von Clebsch geleistet worden; der Verf. der vorliegenden Abhandlung sucht die Methoden des deutschen Mathematikers so weit wie möglich auf die Verallgemeinerung einer speciellen Lösung eines Systems derartiger Gleichungen anzuwenden, nachdem er als Einleitung den Fall einer einzigen Gleichung nochmals behandelt hat. In Bezug auf die ganze Frage äussert er sich am Schlusse folgendermassen: „Das Problem der Discussion eines Systems Pfaff'scher Gleichungen wird allgemein als eine Verallgemeinerung des Problems der Discussion einer einzigen Gleichung angesehen. In einem Sinne ist dies richtig, insofern der Fall eines Systems eine Theorie besitzt, die für $n = 1$ auf die einer einzigen Gleichung zurückkommt. Von einem anderen Gesichtspunkt betrachtet, ist jedoch das Problem ein engeres; denn jede Lösung eines Systems von Gleichungen muss jeder der das System ausmachenden Gleichungen genügen. Folglich haben wir den allgemeinsten Ort, der jede Gleichung befriedigt, zu nehmen, und dann haben wir aus der so erhaltenen Sammlung die gemeinschaftlichen Elemente auszusondern. Auf diese Weise wird es klar, dass das Problem merkwürdig verwickelt wird, und hierin liegt seine eigentümliche Schwierigkeit. Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir den Fall zweier Gleichungen mit vier Variabeln besprechen, indem wir der Bequemlichkeit halber unsere Resultate in einer gleichsam geometrischen Sprache ausdrücken. Nimmt man jede Gleichung einzeln, so bezeichnet ihre Lösung einen zweifach ausgedehnten Ort oder eine Oberfläche in einem vierdehnigen Continuum, während die Lösung des Systems von der Natur eines einfachen oder krummlinigen Ortes innerhalb desselben Continuums ist. Allein zwei Oberflächenörter in einem vierfachen Continuum haben im allgemeinen einen einzigen Punkt oder eine Anzahl discreter Punkte zum Schnitt. Um also einen passenden Ortstypus als Lösung des Systems zu erhalten, haben wir Oberflächenlösungen der beiden Gleichungen

in einer solchen Weise abzupaaren, dass ihre Schnitte aus krummlinigen Oertern bestehen.“ Lp.

F. Engel. Zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen. Deutsche Math. Ver. 8_1, 196-198.

Im R_5 giebt es zwei 14-gliedrige einfache Gruppen von Punkttransformationen (G_{14} und $\mathfrak{G}_{14}$). Der Verf. zeigt, wie die erste Gruppe aus einer Schar von ∞^5 Geraden eines linearen Complexes und die zweite aus der ersten durch eine Berührungstransformation des R_5 entsteht, bei welcher jene ∞^5 Geraden als Punkte eines neuen $\mathfrak{R}_5$ eingeführt werden. Diese Transformation besitzt entsprechende Eigenschaften wie diejenige von Lie, durch welche die Geraden des R_3 in Kugeln übergeführt werden. Im Anschluss hieran werden weitere Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}_4$ besprochen. Schg.

F. Engel. Ein neues, dem linearen Complexe analoges Gebilde. Leipz. Ber. 52, 63-76, 220-239.

Diese Abhandlung bringt die Fortsetzung und die ausführliche Begründung der Betrachtungen, über welche der Verf. in dem vorstehend besprochenen Vortrage zu München die erste Mitteilung gemacht hatte. Die Einleitung zum ersten Artikel spricht sich hierüber so aus: „Im R_5 giebt es eine vierzehngliedrige einfache Gruppe von Punkttransformationen, die ein System von drei Pfaff'schen Gleichungen invariant lässt. Bei geeigneter Wahl der Veränderlichen kann dieses System die Form:

(1) $d\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_2\, d\mathfrak{x}_1, \quad d\mathfrak{x}_4 = \mathfrak{x}_2\, d\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_3\, d\mathfrak{x}_2, \quad d\mathfrak{x}_5 = \mathfrak{x}_3\, d\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_3$

erhalten. Es definirt eine bei der betreffenden Gruppe invariante Schar von ∞^5 Geraden, die sich so verteilen, dass jedem Punkte des R_5 ein ebener Büschel von ∞^1 hindurchgehenden Geraden zugeordnet ist. Man kann daher auch sagen: durch das System (1) ist jedem Punkte $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_5$ des R_5 eine hindurchgehende ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit

(2) $\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_4 - \mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{a}_3\, \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_5 - \mathfrak{a}_5 = \mathfrak{a}_3\, \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{x}_3$

zugeordnet, und diese Zuordnung bleibt bei der bewussten vierzehngliedrigen Gruppe invariant.“

Es wird nun gezeigt, dass in einem Raume von sechs Dimensionen durch jedes allgemeine Wertsystem p_{ikj} $(i, k, j = 1, 2, \dots, 7)$, das den Bedingungen:

$$(27) \qquad p_{ikj} + p_{kij} = p_{ikj} + p_{jki} = p_{ikj} + p_{ijk} = 0$$

genügt, eine vierzehngliedrige einfache projective Gruppe definirt ist, welche die von Killing entdeckte Zusammensetzung hat. Bei dieser Gruppe bleibt der Inbegriff aller zweifach ausgedehnten Ebenen des R_6 invariant, die durch sieben Gleichungen:

$$(28) \qquad \Sigma \pm p_{ikj}\, x_\alpha\, y_\beta\, z_\gamma = 0$$

definirt sind, wo $i, k, j, \alpha, \beta, \gamma$ irgend sechs der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ bezeichnen, und wo das Summenzeichen bedeutet, dass alle Permutationen von $i k j \alpha \beta \gamma$ zu nehmen sind, die geraden mit $+$, die ungeraden mit $-$. Bei der Gruppe bleibt zugleich eine gewisse Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant, und alle auf dieser Mannigfaltigkeit liegenden E_2, die den Gleichungen (28) genügen, bilden einen Complex, der zu dem linearen Complexe des gewöhnlichen Raumes sehr viele Analogien bietet.

Im zweiten Artikel wird zunächst die Gleichung der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse aufgestellt, die zu dem Wertsysteme der p_{ikj} gehört; hieraus ergiebt sich dann, dass die Coefficienten der Gleichung jener Mannigfaltigkeit in Punktcoordinaten vom achtzehnten Grade in den p_{ikj} werden, so dass ein Abscheiden eines gemeinsamen Factors von hohem Grade notwendig wird. Da dieser Weg praktisch ungangbar ist, so hat der Verf. auf den Rat von Study seine Zuflucht zu der symbolischen Methode von Clebsch genommen, die sich als das geeignetste Instrument zur Untersuchung des neuen Gebildes erwiesen hat, ja als das einzig dazu geeignete. Bei der Durchführung der Rechnung ist dann ferner ein von Study herrührendes, dem Verf. schriftlich mitgeteiltes Verfahren von grossem Nutzen gewesen, welches Verfahren „für die Invariantentheorie der alternirenden Formen geradezu unentbehrlich ist“. Lp.

U. Concina. I fuochi delle quadriche in uno spazio lineare metrico ad n dimensioni. Batt. G. **38**, 129-148.

Der Zweck dieses Aufsatzes ist, auf den euklidischen n-dimensionalen Raum die Theorie der Brennpunkte der Kegelschnitte und der Focalcurven der Flächen zweiten Grades auszudehnen. Um denselben zu erreichen, beginnt der Verf. mit der Verallgemeinerung der Durchmessereigenschaften der Kegelschnitte und der Quadriflächen. Ist

$$\varphi(x) = \sum a_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n)$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung im Raume R_n, wobei $x_0 = 0$ der unendlich ferne R_{n-1} ist, so gehen alle Polarebenen der Punkte dieses letzteren durch einen im allgemeinen eindeutig bestimmten Punkt, den „Mittelpunkt“, dessen Coordinaten $\frac{A_{i0}}{A_{00}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind, vorausgesetzt, dass $|A_{ik}|$ die Determinante des Systems der Adjuncten der Elemente von $|a_{ik}|$ sei. Nur wenn $A_{00} = 0$ ist, so ist der Mittelpunkt unendlich fern und die Fläche ein Paraboloid (im ausgedehnten Sinne). Sind $x_0 = 0$, $\sum x_i^2 = 0$ die Gleichungen des (Cayley'schen) absoluten Raumes, so kann man n Stellungen finden, welche orthogonal zu ihren conjugirten Durchmessern sind; ist die Fläche kein Paraboloid, so erhält man auf diese Weise im allgemeinen Falle n Axen und ebensoviele Haupträume $(n-1)$-ter Dimension, deren Bestimmung von der (Fundamental)-Gleichung:

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

abhängt. Bekanntlich hat dieselbe n reelle Wurzeln; auf Grund der Vorzeichen derselben kann man die Fläche zweiten Grades in $n+1$ verschiedene Typen verteilen. Wenn es sich aber um ein Paraboloid handelt, so erhält man nur eine Axe, durch welche $n-1$ zu je zwei orthogonale R_{n-1} gehen. Die Specialfälle, in denen die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ gleiche Wurzeln hat, führen auf centrische Flächen oder Rotationsparaboloide. Der Verf. betrachtet ihre verschiedenen „Arten" und findet die entsprechenden Gleichungen.

Der Ort der Geraden, welche durch einen Punkt P des R_n gehen und eine Fläche zweiten Grades berühren, ist ein Kegel. Ist dieser ausnahmsweise ein Rotationskegel p-ter Art, so nennt man P Brennpunkt p-ter Art. Um verwickelte Rechnungen zu vermeiden, setzt der Verf. voraus, dass die Fläche (mit Mittelpunkt vorausgesetzt) die kanonische Gleichung

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

habe; so kann er leicht auf die folgenden Schlüsse gelangen: „Der Ort der Brennpunkte erster Art einer centrischen Fläche zweiter Ordnung von R_n besteht aus n $(n-2)$-dimensionalen Quadriflächen; jede liegt in einem der Haupträume der gegebenen und hat mit dieser Centrum und Axen gemeinschaftlich. Ihre Typen (s. oben) sind alle verschieden. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine centrische Fläche Brennpunkte p-ter Art besitze, ist, dass sie eine Rotationsfläche $(p-1)$-ter Art sei." Diese Sätze, wie auch die Folgerungen aus denselben, welche wir der Kürze wegen unterdrücken, bieten eine augenscheinliche Analogie mit den bekannten Focaleigenschaften des gewöhnlichen Raumes.

In dem bis jetzt ausgeschlossenen Falle, dass der Mittelpunkt unendlich fern sei, muss man an die Stelle der vorigen Sätze die folgenden setzen: „Der Ort der Brennpunkte erster Art eines Paraboloids besteht aus $n-1$ $(n-2)$-dimensionalen Paraboloiden; jedes liegt in einem Hauptraume des gegebenen und hat mit ihm die Axe gemeinschaftlich"; u. s. w. In diesem Falle, wie in der Voraussetzung, dass die Quadrifläche einen Mittelpunkt hat, werden vom Verf. die Gleichungen der entsprechenden Brennmannigfaltigkeiten aufgestellt. La.

F. J. Vaes. Voorstelling van een n-dimensionaal oppervlak door een $(n-1)$-dimensionale ruimte. Nieuw Archief (2) 4, 292-297.

Um den dreidimensionalen ebenen Raum $ax + by + cz + du = C$ darzustellen, schreibe man $ax + by + cz = C - du$ und denke sich der Variable u verschiedene Werte beigelegt. Dann entsteht eine Schar paralleler Ebenen von zwei Dimensionen, die, falls den Variablen nur positive Werte gegeben werden, einen von den Coordinatenebenen und

der Ebene $ax + by + cz = C$, der „Grenzfläche", begrenzten Raum erfüllen. In gleicher Weise kann die zweidimensionale Ebene $ax + by + cz = C$ durch ein ebenes Dreiseit dargestellt werden, dessen Seiten die Coordinatenaxen und die „Grenzlinie" $ax + by = C$ bilden, die Hypersphäre $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2$ durch die Kugelschar $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - u^2$, also durch das Innere der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, und allgemein die Fläche $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = C^2$ durch das Innere der Fläche $ax^2 + by^2 + cz^2 = C^2$. Es zeigt sich nun bei der Hypersphäre, dass der Abstand von zwei auf einander folgenden Kugeln bei gleichmässiger Aenderung von u nicht derselbe bleibt, wie es bei den Ebenen der Fall ist. Diese Bemerkung giebt Gelegenheit zur Einführung einer „Dichtigkeit", die von der Grenzkugel nach dem Mittelpunkte hin zunimmt und in den betrachteten Fällen durch einfache Ausdrücke dargestellt werden kann. Ot.

E. Rath. Zur Theorie der Krümmungen der Curven im n-dimensionalen nichteuklidischen Raume. Böklen Mitt. (2) **2**, 66-82.

Die Grundlagen des Gegenstandes finden sich in Killing's „nichteuklidischen Raumformen". Der Verf. erweitert diese Untersuchungen in der Richtung, dass er Verallgemeinerungen der auf die Krümmung der Curven bezüglichen Formeln und Sätze, die für den ebenen R_n bereits ausgeführt sind, auf einen nicht euklidischen R_n von constantem Krümmungsmass $1/k^2$ vornimmt. Nach einer Zusammenstellung der grundlegenden Formeln werden zunächst die Krümmungsgebilde einer Raumcurve untersucht, sodann die Lage der verschiedenen Krümmungsmittelpunkte, das für einen Curvenpunkt charakteristische System von n $R_{n-1}(c^m)$, die paarweise auf einander senkrecht stehen und eine einfache Construction aller Krümmungsmittelpunkte aus einem derselben vermitteln. Endlich wird der von Killing gegebene Ausdruck für die m-te Krümmung berechnet und eine Verallgemeinerung der Frenet-Serret'schen Formeln für den nichteuklidischen Raum gegeben.

Schg.

H. Piccioli. Sur les développantes de certaines lignes en S_n et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbure constante. Nouv. Ann. (3) **19**, 385-390.

Es werden für verschiedene einfache Raumcurven die Abwickelungen bestimmt, oder wenn die Abwickelungen vorgeschrieben sind, werden die zugehörigen Curven gesucht. So ergiebt sich z. B. das Theorem: Die Curven mit sphärischen Linien als Abwickelungen sind geodätische Linien der Kegel mit den Spitzen im Centrum der Kugel. Oder: Die geodätischen Linien der Oberfläche, welche durch die Schmiegungsräume S_{n-2} einer Curve erzeugt werden, deren letzte Hauptrichtung mit einer gegebenen Geraden einen constanten Winkel einschliesst, haben als Abwickelungen cylindrische Schneckenlinien. Dieser Satz ist für den S_3

bekannt. Ein weiteres Theorem bezieht sich auf die Curven constanter Krümmung im S_{2i}. Sr.

P. H. Schoute. De ruimte-dubbelverhouding bij krommen ϱ^n van den n^{den} graad in de ruimte R_n met n afmetingen. Amst. Versl. 9, 268-276.

Im R_n bestimmen $(n-1)$ Punkte einer Curve n-ter Ordnung (ϱ^n) einen R_{n-2}. Man kann nun den Punkten der Curve die Räume R_{n-1} zuordnen, zu denen R_{n-2} als Basisraum gehört, und ein Doppelverhältnis von vier Punkten $A_1, \dots, A_4$ der Curve ϱ^n aufstellen, indem man obigen R_{n-2} mit den vier Punkten durch Räume R_{n-1} verbindet. Indem diese vier Punkte aus $(n+2)$ gegebenen Punkten auf alle Arten ausgewählt werden, entstehen ebenso viele Doppelverhältnisse, deren Beziehungen zur Curve ϱ^n im allgemeinen festgestellt und insbesondere für den Fall $n=3$ eingehender untersucht werden. Schg.

P. H. Schoute. La surface de Jacobi d'un système linéaire d'hyperquadriques Q_2^3 dans l'espace E^4 à quatre dimensions. Arch. Musée Teyler (2) 7, 117-126.

1. Das lineare System der Q_2^3 und seine 16 Basispunkte. 2. Die involutive Verwandtschaft (P, P') der conjugirten Punkte P, P'. 3. Haupteigenschaften dieser Verwandtschaft. 4. Die Ordnung 7 des Complexes der Geraden (PP'). 5. Die Jacobi'sche Fläche J_{10}^2. 6. Der Ort f_{15}^2 der polaren Geraden. 7. Die Vielfachheit 4 von J_{10}^2 auf f_{15}^2. 8. Die 35 polaren Geraden, welche sich auf zwei Ebenen stützen. 9. Die 20 ausgearteten Hyperkegel des Systems. 10. Einige andere Einzelheiten. — Ausserdem: die entsprechenden Resultate des allgemeinen Falles des Jacobi'schen Ortes bei einem ∞^{n-1} System quadratischer Hyperräume Q_2^{n-1}. Lp.

P. H. Schoute. Over rationale ruimte-krommen. Amst. Ak. Versl. 8, 548-555.

Der Verf. ermittelt die Reihe der charakteristischen Zahlen

$$3n-2,\ 2(3n-3),\ 3(3n-4), \dots,\ s(3n-s-1),$$

beginnend mit der Klasse und aufhörend mit der Ordnung des Ortes R_4 für den Mittelpunkt der hypersphärischen Krümmung H_p des höchsten Ranges der allgemeinen rationalen Curve R_s^n n-ter Ordnung, für den der lineare Raum kleinster Anzahl von Dimensionen, der sie enthält, ein s-dimensionaler ist. Zwei Fälle, in denen diese Zahlen geringere Werte erhalten. Lp.

P. H. Schoute. Over de meetkundige plaats der middelpunten van hyperspherische kromming bij de normaalkromme der n-dimensionale ruimte. Amst. Ak. Versl. 8, 622-629.

P. H. Schoute. **De stelling van Joachimsthal bij de normaalkrommen.** Ibid. 744-751.

In dem besonderen Falle der Curve, welche in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem durch die Gleichungen $x_i = t^i$ dargestellt wird $(i = 1, 2, \ldots, n)$, erniedrigen sich die oben angegebenen Zahlen auf $2n-1$, $3n-3$, $4n-7$, $5n-13$, $6n-21, \ldots$, $2n-1$. — In dem zweiten Artikel werden zwei bekannte Sätze, die mit den Joachimsthal'schen Kreisen bei der Parabel zusammenhängen, und die cyklographische Darstellung dieser Kreise auf die Curve $x_i = t^i$ ausgedehnt.

Lp.

H. W. Richmond. **On the condition that five straight lines situated in a space of four dimensions should lie on a quadric.** Cambr. Proc. **10**, 210-212.

Damit vier gerade Linien im S_4 auf einer Quadrifläche liegen, ist es nötig und hinreichend, dass sie Schnitte von fünf solchen S_2 im S_5 sind, von denen je zwei einen Punkt gemeinsam haben. Lp.

H. W. Richmond. **On the expansions in powers of arc of the coordinates of points on a curve in Euclidean space of many dimensions.** Quart. J. **31**, 315-320.

In Bd. **26** derselben Zeitschrift hat Mathews ein Verfahren angegeben, um in den Reihen, welche die Coordinaten eines Punktes einer ebenen oder Raumcurve in Potenzen der Bogenlängen ausdrücken, die Coefficienten der auf einander folgenden Glieder aus einander zu berechnen. Dieses Verfahren wird in obiger Arbeit auf Curven im R_n ausgedehnt.

Schg.

V. Snyder. **On cyclical quartic surfaces in space of n dimensions.** American M. S. Bull. (2) **6**, 194-198.

„Die Erzeugung der Cyklide als der Hüllfläche von Kugeln, die eine feste Kugel rechtwinklig schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen, lässt sich sofort auf den n-dimensionalen Raum ausdehnen.“ — Als Resultat ergiebt sich: „Eine M^4_{n-1} im (euklidischen) R_n, welche den Absoluten als eine doppelte $M^{1,2}_{n-2}$ enthält, kann auf $n+2$ Arten als die Enveloppe derjenigen Hypersphären erzeugt werden, die eine feste Hypersphäre rechtwinklig schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer $M^{2,2}_{n-2}$ liegen. Die festen Sphären sind orthogonal zu einander und die quadratischen Flächen confocal.“ Die Resultate für $n=2$ und $n=3$ sind oft abgeleitet. Für $n=4$ ist die Anzahl der verschiedenen Typen 58, und für grössere Werte von n ist die Anzahl der Typen noch nicht bestimmt worden.

Lp.

G. Monti. **Sulla forma che assumono le relazioni di proiettività fra due spazi S_{n-1}, S'_{n-1} nel caso dell' omologia.** Periodico di Mat. (2) **2**, 197-199.

Feststellung der Gleichungen zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte für den Fall der Homologie in mehrdimensionalen Räumen.

Lp.

F. Palatini. **I sistemi lineari di grado n e dimensioni $n+i$ di varietà algebriche V_i nello spazio S_{i+1} in relazione alle trasformazioni birazionali.** Batt. G. **38**, 315-320.

Als Vorbereitung für eine Theorie der birationalen Transformation in den höheren Räumen untersucht der Verf. einige Eigenschaften der linearen Systeme, insbesondere diejenigen, welche mit ihren Transformationen auf bestimmte kanonische Typen zusammenhängen. La.

N. J. Hatzidakis. **Sur les équations cinématiques des variétés dans l'espace à n dimensions.** C. R. **130**, 557-560.

Darboux geht in seinem berühmten Werke „Leçons sur la théorie générale des surfaces" bekanntlich von kinematischen Betrachtungen aus, indem er die Bewegung eines festen Trieders untersucht, bei der die drei Rotationscomponenten und die Geschwindigkeitscomponenten eines der Eckpunkte von zwei Parametern abhängen. Zwischen den genannten Grössen und ihren Ableitungen nach den Parametern bestehen sechs Gleichungen. Craig hat im American J. (F. d. M. **29**, 551, 1898) die entsprechenden zehn Gleichungen für den Raum von vier Dimensionen abgeleitet. Im vorliegenden Aufsatz wird die Aufgabe auf eine Fläche im n-dimensionalen Raume ausgedehnt, und es werden ohne Beweis die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen mitgeteilt, die zwischen den Rotationscomponenten und Geschwindigkeitscomponenten eines Eckpunktes des Hauptpolyeders und ihren Ableitungen nach zwei Parametern bestehen. Hinsichtlich der Beweise wird auf eine demnächst im American J. erscheinende ausführliche Arbeit verwiesen.

Wn.

N. J. Hatzidakis. **Displacements depending on one, two, ..., k parameters in a space of n dimensions.** American J. **22**, 154-184.

Der Verf. setzt die von Craig begonnene Verallgemeinerung der Flächentheorie fort. (F. d. M. **29**, 551, 1898.) Führt man mit Darboux in bekannter Weise die sechs Differentialausdrücke, die sich durch Differentiation der Cosinusrelationen ergeben, als kinematische Fundamentalgrössen der Flächentheorie ein, so bestehen zwischen diesen sechs Grössen drei Relationen, so dass sie sich auf die drei Grössen p, q, r reduciren, und diese Relationen entsprechen den drei Relationen zwischen den sechs analytischen Fundamentalgrössen von Gauss. Im R_4 giebt es bereits

zehn Fundamentalgrössen und zwischen ihnen sechs Relationen; diese hat Craig aufgestellt. Der Verf. löst dieselbe Aufgabe für die Gebilde des R_n, und zwar für beliebige Mannigfaltigkeiten. Er stellt sowohl die kinematischen wie die analytischen Relationen auf. Sfs.

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

K. Zindler. Ueber Complexcurven. Monatsh. f. Math. **11**, 28-30.

Um die Curven eines Complexes zu bestimmen, welcher durch eine Monge'sche Gleichung

$$\Phi(yz'-y'z,\ zx'-xz',\ xy'-x'y,\ x',y',z')=0$$

gegeben ist, setzt Verf. die Gleichung einer Regelfläche an:

$$x=\varphi(u)+v\,\lambda(u),\quad y=\psi(u)+v\,\mu(u),\quad z=\chi(u)+v\,\nu(u)$$

und stellt die Bedingungen dafür auf, dass dieselbe abwickelbar ist und dem Complexe angehört. Man erhält dann eine Gleichung für fünf der Functionen $\varphi, \chi, \psi, \lambda, \mu, \nu$; hier bleiben vier derselben willkürlich, während für die fünfte eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung besteht. Es sind alsdann die Integralcurven als die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen bestimmt. Sr.

K. Zindler. Ueber Complexcurven und ein Theorem von Lie. Deutsche Math. Ver. 8_1, 199.

Auszug aus einer ausführlichen Mitteilung (Monatsh. für Math. **11**; siehe das vorangehende Referat). Es wird eine Differentialgleichung für sämtliche Curven eines durch seine Monge'sche Gleichung gegebenen Complexes aufgestellt und der Satz von Lie, nach welchem die Torsion einer Complexcurve nur vom Linienelement abhängen soll, richtig gestellt. Wö.

T. Levi-Civita. Complementi al teorema di Malus-Dupin. Rom. Acc. L. Rend. (5) 9_1, 185-189, 237-245.

Die beiden zusammengehörigen Noten behandeln die Umkehrung des bekannten Problems, dass eine Normalencongruenz bei Refraction wieder in eine Normalencongruenz übergeht. Es wird also damit eine wesentliche Lücke in dem bekannten Satze ausgefüllt, indem jetzt bewiesen ist, dass auch stets zwei Normalencongruenzen durch Brechung in einander übergeführt werden können. Sr.

P. ZEEMAN Gz. **Eigenschappen van eenige bijzondere Stralenstelsels.** Nieuw Archief (2) **4**, 298-317.

Verf. behandelt die Frage, wann die in Verbindung mit einer beliebigen Oberfläche (durch die Winkel mit den Tangenten in zwei Curvenscharen und die Flächennormalen) bestimmten Strahlensysteme orthogonal sind. Insbesondere wird der Fall der Umdrehungsflächen behandelt. Ferner werden einige Theoreme aufgestellt für den Fall, dass von einem Strahlensystem einer der beiden Brennflächenmäntel gegeben ist. Sr.

H. E. TIMERDING. **Some remarks on tetrahedral geometry.** American M. S. Bull. (2) **6**, 417-430.

Von der Darstellung zweier Oberflächen zweiter Ordnung in Bezug auf das gemeinsame selbstconjugirte Tetraeder als Coordinatentetraeder ausgehend, entwickelt der Verf. die Haupteigenschaften des Reye'schen tetraedralen Complexes vorzugsweise nach analytischem Verfahren ohne besondere Angabe über den von ihm verfolgten Zweck. Lp.

C. CARRONE. **Sopra un nuovo metodo di generazione del complesso tetraedrale.** Catania. 16 S. 8°.

C. CARRONE. **Le congruenze del secondo ordine senza linee singolari e le loro superficie focali studiate mediante una trasformazione doppia.** Catania. 21 S. 8°.

V. S. HUNTINGTON. **The complex of axes of a central quadric surface.** Annals of Math. (2) **2**, 8-21.

Der erste Teil enthält eine Darstellung der elementaren Eigenschaften des Axencomplexes mit Benutzung analytischer Hülfsmittel. Im Anhang stellt Verf. einige Aufgaben über den Axencomplex zusammen. Sr.

E. VENERONI. **Aggiunta alla nota sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette.** Lomb. Ist. Rend. (2) **32**, 1403-1404 (1899).

In Vervollständigung seiner früheren Note (s. F. d. M. **30**, 591, 1899) beweist der Verf., dass Complexe dritten Grades, in welchen jede beliebige Gerade in drei oder vier Strahlen des Complexes liegt, nicht existiren. Die Complexe dritten Grades, welche sich aus Geradenbüscheln zusammensetzen, lassen sich danach in drei verschiedene Typen sondern. Sr.

A. DEMOULIN. Sur la théorie générale des congruences rectilignes. C. R. **130**, 1701-1703.

Zwischen den Hauptkrümmungsradien in zwei entsprechenden Punkten der beiden Mäntel der Focalfläche einer Geradencongruenz, dem Winkel V der Focalebenen und der Entfernung der beiden Punkte besteht eine Relation, in der ein Ausdruck als eine Invariante der Congruenz bei projectiver Transformation von Waelsch nachgewiesen wurde. Die Note enthält einen neuen Ausdruck dieser Invariante und Folgerungen daraus, unter welchen besonders ein Zusammenhang mit der für sich betrachteten Theorie der Raumcurven interessirt. Sr.

C. GUICHARD. Sur les congruences dont les deux réseaux focaux sont cycliques. C. R. **131**, 1177-1179.

Die Bestimmung der in der Ueberschrift angegebenen Netze lässt sich nach dem von dem Verf. mit Vorteil angewandten Gesetz des Parallelismus zwischen Netzen und Congruenzen zurückführen auf die Bestimmung der Netze, deren beide Tangenten cyklische Congruenzen beschreiben. Diese Netze bestimmt der Verf. dadurch, dass er im R_5 Congruenzen G aufstellt, deren Focalnetze orthogonal sind. Analytisch handelt es sich um das Problem, die Richtungscosinus $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5$ so zu bestimmen, dass sie Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M \cdot \theta$$

sind und den Gleichungen und Ungleichungen

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_5^2 = 1,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2 \gtrless 0 \text{ und } \Sigma \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2 \gtrless 0$$

genügen, für welches analytische Problem sich einige Lösungen bestimmen lassen. Sr.

C. GUICHARD. Sur les congruences de cercles et de sphères qui sont plusieurs fois cycliques. C. R. **130**, 1533-1535.

Aus den verschiedenen Systemen O, $3\,O$, ferner J, $3\,J$, CC, die zueinander conjugirt oder harmonisch sind, lassen sich verschiedene Transformationen aufstellen, welche mehrfach-cyklische Kreis- und Kugelcongruenzen in sich überführen, und welche gleichzeitig die verschiedenen Transformationen umfassen, durch welche aus einer isothermischen Fläche andere ableitbar sind. Sr.

FR. PALATINI. Sulla rappresentazione lineare dei complessi lineari di rette di uno spazio a quattro dimensioni coi punti dello spazio a nove dimensioni. Ven. Ist. Atti **59**, [(8) **2**], 861-869.

Der Verf. überträgt das bekannte Princip der Dualität von Punkt und Gerade aus einer linearen Gleichung auf lineare Strahlencomplexe des R_4. Eine Gerade im R_4 besitzt zehn Liniencoordinaten; also hat die Gleichung eines linearen Strahlencomplexes zehn homogene Coefficienten. Denkt man diese als Coordinaten in einem R_9, so entspricht jedem linearen Complex des R_4 ein Punkt des R_9 und umgekehrt. Da nun ein Punkt des R_4 Mittelpunkt eines ∞^5 linearen Systems von Complexen ist, so entspricht diesem Punkte des R_4 noch ein bestimmter R_5, den man mit S_5^0 bezeichnen kann, und den sämtlichen Punkten des R_4 entsprechen ∞^4 lineare Räume S_5^0. Zwei S_5^0 liegen in einem R_8 und schneiden sich in einem S_2^1, dessen Punkte denjenigen singulären Complexen entsprechen, deren Centralebenen durch eine bestimmte Gerade des R_4 hindurchgehen.

Den Eigenschaften der linearen Complexe lassen sich also bestimmte Aussagen über Gebilde des R_9 gegenüberstellen, und es ist manchmal bequemer, die mehrdimensionale dualistische Sprechweise zu benutzen.

Eingehend untersucht Verf. die singulären Complexe und die Eigenschaften der Mittelpunkte und Centralebenen von verschieden-dimensionalen Systemen von Complexen, wobei er zu interessanten, zum Teil neuen Sätzen gelangt. Sr.

P. F. Smith. On surfaces enveloped by spheres belonging to a linear spherical complex. American M. S. Trans. **1**, 371-390.

Zur Untersuchung der von einer Kugelschar eines Kugelcomplexes eingehüllten Fläche bedient sich Verf. einer Transformation, welche als die allgemeinste Berührungstransformation, durch welche Kugeln wieder in Kugeln übergehen, zu bezeichnen ist. Sie ergiebt sich dadurch, dass ein linearer Complex wieder in einen linearen Complex übergeführt wird, wobei specielle Complexe speciell bleiben sollen. Ueber diese allgemeinste Transformation, die von 15 Parametern abhängt, gelten als Fundamentalsätze die folgenden: Eine Transformation T, welche sich aus irgend einer Anzahl von Inversionen an allgemeinen Kugelcomplexen zusammensetzt, lässt sich auflösen in eine Inversion und $n-1$ sphärische Inversionen (d. h. solchen Inversionen, welche durch einen Orthogonalcomplex bewirkt werden). Ferner: Jede Transformation lässt sich auf Inversionen in sechs oder sieben Kugelcomplexen zurückführen. Durch diese Transformation werden nun die Flächen untersucht, welche aus einer Curve oder aus anderen Flächen abgeleitet werden. Ausser den Ausnahmefällen für specielle Fälle behandelt Verf. noch die Singularitätenfläche des allgemeinen quadratischen Kugelcomplexes und die Verallgemeinerung auf den R_n. Die Note ist eng verwandt mit der von V. Snyder publicirten Note „Lines of curvature on annular surfaces“ (Referat auf S. 611 dieses Bandes), behandelt aber andere Fragen.

Sr.

P. F. Smith. On a transformation of Laguerre. Annals of Math. (2) 1, 158-172.

Die Transformation von Laguerre wird in dieser Abhandlung in ihrem Zusammenhang mit dem Kugelcomplex als die Inversion in einem Kugelcomplex untersucht. Sie reiht sich den elementaren Transformationen der Collineation, Dualität, Transformation durch reciproke Radien an und ist eine Berührungstransformation, durch welche Ebenen in Ebenen übergeführt werden. Nachdem zunächst der Kugelcomplex für den einfachen Fall, in welchem die Kugeln eine Ebene unter constantem Winkel schneiden, eingeführt und besprochen ist, definirt Verf. die Inversion in einem Kugelcomplex folgendermassen: Zwei Ebenen, welche sich auf der Fundamentalebene des Complexes C schneiden, sind invers in Bezug auf C, wenn sie ∞^2 orientirte Kugeln des Complexes gleichzeitig berühren. Durch die Transformationen geht eine Kugel immer in eine Kugel über. Die Haupteigenschaften der Transformation und eine zweite Definition derselben sind schon durch Laguerre und Darboux untersucht worden. An Anwendungen behandelt die Note die Flächen, welche aus einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades hervorgehen, und die Ueberführung eines Kugelcomplexes in einen anderen. Als Verallgemeinerung bekannter Theoreme über die Transformation durch reciproke Radien ergeben sich ganz analoge Sätze. Ueberhaupt lässt sich jede Transformation, welche sich aus auf einander folgenden Inversionen an Kugelcomplexen zusammensetzt, auf zwei Typen zurückführen, nämlich auf die Aufeinanderfolge einer gleichen Inversion und einer Verschiebung, einer Inversion, einer Drehung und einer Verschiebung. Sr.

Ch. J. Joly. Properties of the general congruency of curves. Dublin Trans. 31, 363-392; Dublin Proc. (3) 5, 663-665.

Als hauptsächlichster Zweck der Abhandlung wird die Betrachtung einer Congruenz von Curven bezeichnet, die zu dem doppelt unendlichen System gehören, in welches Systeme von parallelen Linien sich verwandeln lassen. Eine Congruenz von Curven des allgemeinsten Typus kann durch die Vectorgleichung $\varrho = \chi(u, v, w)$ dargestellt werden, wo zwei der Parameter, sagen wir u und v, zur Wahl einer besonderen Curve dienen, während der dritte einen besonderen Punkt auf dieser Curve aussondert. Die Vorstellung wird verallgemeinert, indem u, v, w als die Componenten eines Vectors $\sigma = \alpha u + \beta v + \gamma w$ längs dreier beliebigen Vectoren α, β, γ genommen werden; dann nimmt die Gleichung der Congruenz die Form $\varrho = \theta\sigma$ an, und die Curven der Congruenz werden dabei als Transformationen eines Systems gerader Linien parallel der Richtung des Vectors γ aus dem Raume (σ) in den Raum (ϱ) angesehen. Die Gleichung $\varrho = \theta\sigma$ kann eine beliebige aus einem doppelt unendlichen System von Congruenzen darstellen, deren jede irgend einer besonderen Richtung des Vectors γ entspricht. Diese Congruenzen sind alle von derselben Ordnung und haben alle dieselbe Brennfläche. Die

Abhandlung lässt sich nicht gut auszugsweise besprechen; zur genaueren Kenntnisnahme des Inhalts ist daher auf den Artikel selbst zu verweisen, der von der höchsten Bedeutung ist. Gbs. (Lp.)

V. Snyder. On the geometry of the circle. American M. S. Bull. (2) **6**, 319-322.

Der Aufsatz schliesst sich an den Artikel an: „Geometry of some differential expressions in hexaspherical coordinates" (F. d. M. **29**, 565, 1898) und bewegt sich in demselben Gedankenkreise, wie verschiedene andere Veröffentlichungen des Verf. Es besteht die Identität

$$\sum x_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

zwischen den fünf homogenen Coordinaten x_i eines Kreises. Diese Coordinaten repräsentiren hier Kreise, nicht Punkte. Folgender Satz ergiebt sich sofort: „Die Singularitätencurve eines allgemeinen quadratischen Complexes ist zugleich Singularitätencurve von ∞^1 solcher Complexe und ist Focalcurve (oder Enveloppe) für fünf quadratische Congruenzen." Wir führen ferner folgende vom Verf. abgeleitete Sätze an: „Die Singularitätencurve eines allgemeinen quadratischen Complexes ist die Enveloppe von Kreisen, die einen festen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer bicircularen Curve vierter Ordnung liegen." — „Acht Tangenten können parallel zu einer beliebig gegebenen Geraden an die Singularitätencurve gezogen werden." — „Die Doppeltangenten der Singularitätencurve sind alle isotropisch; ein Paar geht durch den Mittelpunkt jedes Grundkreises." — „Die Enveloppe von Kreisen, die einen festen Kreis rechtwinklig schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer Curve n-ter Klasse liegen, ist eine Curve der Ordnung $2n$, die n-mal durch jeden Kreispunkt geht." Lp.

Kapitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

E. Kasner. The invariant theory of the inversion group: geometry upon a quadric surface. Amer. M. S. Trans. **1**, 430-498.

Der Verf. teilt seine inhaltsreiche Arbeit in sechs Kapitel, deren Ueberschriften zunächst angeführt sein mögen: I. Die quaternäre Methode; II. Comitanten von Kreisen; III. die binäre Methode; IV. Verbindung der

binären und quaternären Theorien; V. die cyklischen Curven; VI. doppelt ternäre und andere Methoden.

Zu Grunde gelegt wird das von Klein und Lie formulirte Princip: „Jeder Gruppe von Transformationen entspricht eine Geometrie oder Invariantentheorie: diese untersucht diejenigen Eigenschaften geometrischer oder analytischer Configurationen, die sich der Gruppe gegenüber invariant verhalten." Bisher wurde in der Hauptsache nur die allgemeine Gruppe der linearen Transformationen oder die allgemeine projective Geometrie untersucht.

Hilbert hat bewiesen, dass algebraische Formen gegenüber der allgemeinen projectiven Gruppe ein endliches System von Grundformen besitzen, und Maurer hat den Beweis auf jede Untergruppe, d. h. also auf jede lineare Gruppe ausgedehnt.

Einzelne wichtige Untergruppen der projectiven Gruppe sind hinsichtlich ihrer Invariantentheorie von Study eingehend untersucht worden. Diesen Untersuchungen reiht sich die vorliegende an; es handelt sich um die projective Geometrie auf einer (nicht ausgearteten) Fläche zweiter Ordnung F_2, oder genauer (A) um die Theorie der algebraischen Curven auf einer F_2 hinsichtlich solcher Eigenschaften, die gegenüber der Gruppe der die F_2 in sich überführenden („automorphen") Collineationen invariant sind. Ist die F_2 eine Kugel, so lässt sich die Gruppe der automorphen Collineationen bezüglich der Punkte der Kugel ersetzen durch die Inversionsgruppe auf derselben. Führt man die Kugel durch Inversion in eine Ebene über, so reducirt sich die Geometrie (A) auf (B), die Inversionsgeometrie der Ebene. Die zugehörige Gruppe ist dann die der Möbius'schen Kreisverwandtschaften (Gesamtheit der Punkttransformationen, die die Schar aller Kreise in der Ebene invariant lassen). Die Geometrien (A) und (B) sind als äquivalent anzusehen wegen des Isomorphismus ihrer Gruppen.

Die Gruppe von (A) ist eine gemischte sechsgliedrige Gruppe G_6', die sich aus zwei continuirlichen Gruppen G_6, H_6 zusammensetzt; hierbei lässt G_6 die beiden Scharen von geradlinigen Erzeugenden der F_2 einzeln invariant, während H_6 sie vertauscht. Das Entsprechende gilt in (B) für die Minimalgeraden, resp. Kreispunkte.

Der Umstand, dass G' eine gemischte Gruppe ist, verleiht der Untersuchung einen specifischen Charakter; während in der G-Theorie jede homogene Summe, allgemeiner jede ganze Form von Comitanten homogenen Charakters wiederum eine Comitante ist, trifft dies in der G'-Theorie im allgemeinen nicht mehr zu.

Zur algebraischen Behandlung der in Rede stehenden Geometrien dient zunächst die „quaternäre" Methode.

Die Gruppe G' ist dargestellt durch:

$$(1) \qquad x_i' = \sum r_{ik} x_k \; (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wenn die Coefficienten r in allgemeinster Weise so gewählt werden, dass vermöge (1) die F:

$$(2) \qquad F = \sum p_{ik} x_i x_k \; (p_{ik} = p_{ki}, \Delta = |p_{ik}| \neq 0)$$

bis auf einen Factor in sich selbst übergeht. G' reducirt sich auf G, wenn noch eine gewisse Bedingung hinzutritt. Führt man dagegen die homogenen Parameter λ_1, λ_2, resp. μ_1, μ_2 der beiden Scharen von geradlinigen Erzeugenden der F_2 ein, so gelangt man zur „doppelt binären" Methode, die den Unterschied zwischen den beiden Gruppen G, H direct erkennen lässt.

$$(3)\quad \begin{cases} G\colon \lambda'_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2,\ \lambda'_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2; \\ \qquad \mu'_1 = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2,\ \mu'_2 = \gamma\mu_1 + \delta\mu_2; \\ H\colon \lambda'_1 = a\mu_1 + b\mu_2,\ \lambda'_2 = c\mu_1 + d\mu_2; \\ \qquad \mu'_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2,\ \mu'_2 = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2. \end{cases}$$

Eine algebraische Curve $C_{m,n}$ auf der F_2 ist dann dargestellt durch eine Relation von der Form:

$$(4)\quad \varphi(\overset{m}{\lambda_1, \lambda_2}; \overset{n}{\mu_1, \mu_2}) = 0,$$

wo die Ordnungen m, n von φ in den λ, resp. μ angeben, wie oft die Curve irgend einer Erzeugenden der einen, resp. andern Art begegnet. Diese Beziehung zwischen den $C_{m,n}$ und den doppelt binären Formen ist eine eindeutige. Somit kann die Geometrie (A) auch aufgefasst werden als (C) „die Invariantentheorie doppelt binärer Formen mit Bezug auf unabhängige lineare Transformationen der beiden Variabelnpaare und zugleich mit Bezug auf Vertauschung beider Paare."

Stellt man die Curven $C_{m,n}$ dar durch quaternäre Formen — die die ausschneidenden Flächen repräsentiren —, so hört die Beziehung zwischen Curven und Formen auf, eindeutig zu sein. Denn die allgemeine $C_{m,n}$, wo $n - m = k\,(0, 1, 2, \ldots)$ sei, verlangt zu ihrer vollständigen Darstellung $k+1$ quaternäre Formen n-ten Grades (in Punktcoordinaten) $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$; diese lassen sich aber ersetzen durch irgend $k+1$ linear unabhängige Formen der Schar:

$$(5)\quad \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \cdots + \nu_{k+1} f_{k+1} + MF,$$

wo die ν Parameter sind und M eine arbiträre Form des Grades $n-2$ bedeutet.

Die Quaternärtheorie der Geometrie (A) ist daher wohl zu unterscheiden von (D) „der Theorie quaternärer Formen bezüglich der Gruppen G, G'". Die letztere Theorie hat Study entwickelt (F. d. M. **28**, 114, 1897), der sie reducirt auf (E) „die Invariantentheorie quaternärer Formen, unter denen sich eine F_2 befindet, mit Bezug auf die allgemeine projective Gruppe G_{15}".

Der Verf. zieht die beiden letzteren Formentheorien nur insoweit heran, als es für das Studium der Curven auf der F_2 erforderlich ist. Von theoretischem Interesse ist ein directer Uebergang von (A) zu (E). Die genauere Untersuchung der Verwandtschaft zwischen den Theorien (C) auf der einen, (D), (E) auf der anderen Seite führt zu bemerkenswerten invariantentheoretischen Verallgemeinerungen, so u. a. zu einem Uebertragungsprincip zwischen doppelt binären und quaternären Formen,

analog zu dem, das in der Apolaritätstheorie zwischen binären Formen einerseits, ternären, quaternären etc. andrerseits gilt. My.

E. H. MOORE. The cross-ratio group of $n!$ Cremona-transformations of order $n-3$ in flat space of $n-3$ dimensions. American J. **22**, 279-291.

H. E. SLAUGHT. The cross-ratio group of 120 quadratic Cremona-transformations of the plane. Part first: Geometric representation. American J. **22**, 343-380.

Das Doppelverhältnis von irgend vier Wurzeln einer binären Form f_n n-ter Ordnung ist eine absolute (irrationale) Invariante von f_n. Greift man $n-3$ unabhängige von diesen Doppelverhältnissen heraus, so lassen sich alle übrigen rational durch sie ausdrücken. Geht man von einem bestimmten System solcher $n-3$ Doppelverhältnisse aus, indem man eine bestimmte Anordnung der n Wurzeln zu Grunde legt, so entstehen durch Permutation der Wurzeln $n!$ conjugirte Systeme: jedes System ist durch jedes andere rational darstellbar. In geometrischer Sprechweise entsteht somit eine Gruppe $G_{n!}$ von $n!$ Cremona-Transformationen in einem linearen Raume R_{n-3} von $n-3$ Dimensionen. Wechselt man das Ausgangssystem, so sind die entstehenden Gruppen Cremona-Transformationen von einander. Der Ausführung dieses Grundgedankens ist die Arbeit von Moore gewidmet.

Wird das Doppelverhältnis $\frac{(x-z)(y-u)}{(y-z)(x-u)}$ mit $[xyzu]$ bezeichnet, so entstehen aus n Grössen z zunächst $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppelverhältnisse $r_{ijkl}=[z_i z_j z_k z_l]$. Von den n Doppelverhältnissen $r_i=[z_n z_{n-1} z_{n-2} z_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ haben dann r_n, r_{n-1}, r_{n-2} resp. die numerischen Werte $\infty, 0, 1$, während die übrigen $n-3$ $r_i (i=1, 2, \ldots, n-3)$ unabhängig sind und ein „Fundamentalsystem" R bilden in dem Sinne, dass sich alle übrigen r_{ijkl} rational durch jene darstellen lassen. Ist also $R^{(a)}$ ein zweites solches Fundamentalsystem, so hat man Gleichungen der Form: $r_i^{(a)}=f_i^{(a)}(r_1, r_2, \ldots, r_{n-3})$, oder kürzer symbolisch: $R^{(a)}=F^{(a)}R$. Deutet man den Inbegriff der $n-3$ Grössen r_i als einen Punkt R im Raume R_{n-3}, so stellt $R^{(a)}=F^{(a)}R$ eine Cremona-Transformation derselben dar, deren Ordnung (abgesehen von $(n-1)!$ Collineationen) gleich $n-3$ ist. Diese Cremona-Transformationen lassen sich als Zusammensetzungen von Substitutionen auffassen, die der Multiplication der bezüglichen Ordnungen entsprechen, und den Mitteln der Gruppentheorie unterwerfen. Die obigen $n!$ Transformationen sind für $n \geqq 5$ alle von einander verschieden und erzeugen so eine holoedrisch isomorphe Transformationsgruppe $G_{n!}$, die als „Doppelverhältnis-Transformationsgruppe des R_{n-3}" bezeichnet wird. In ihr ist eine Gruppe $G_{(n-1)!}$ von Collineationen enthalten, die holoedrisch isomorph ist mit der symmetrischen Substitutionengruppe von $n-1$ Elementen $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.

Diese Collineationsgruppe $G_{(n-1)!}$ erweist sich als die Klein'sche Gruppe (F. d. M. **3**, 60, 1871) von $n-1$ Collineationen, die gewisse $n-1$ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ auf alle möglichen Weisen vertauschen. Dies wird ohne weiteres ersichtlich mittels geeigneter (überzähliger) homogener Punktcoordinaten des R_{n-3}.

Geht man von hier zu den nicht linearen Cremona-Transformationen $F^{(a)}$ über, so besitzen diese gewisse Fundamental-Punkte, -Geraden u. s. w., oder kürzer „kritische Figuren", die alle dem vollständigen $(n-1)$-Eck der Punkte P angehören.

Diese Transformationen lassen sich nämlich zusammensetzen aus Collineationen und „Inversionen", wobei letztere von der Form $\varrho x'_i = \frac{\mu}{x_i}$, den Transpositionen der Elemente z entsprechen.

Die weitere Untersuchung basirt auf der Benutzung der Normcurven des R_{n-3}, auf der die linearen Transformationen der z gedeutet werden. Eine solche Normcurve ist durch n linear unabhängige Punkte eindeutig bestimmt. So ergiebt sich, dass die $G_{n!}$ in projectivem Sinne völlig bestimmt ist durch ihr „Fundamental-$(n-1)$-Eck" der Punkte P. Das führt endlich zu einem engen Zusammenhange zwischen der $G_{n!}$ und den binären Formen, n-ter Ordnung, die lineare Transformationen in sich zulassen. In der Abhandlung von Slaught werden diese allgemeinen Erörterungen für den Fall $n=5$ im einzelnen durchgeführt. Die Doppelverhältnis-Gruppe ist hier eine solche von 120 quadratischen Cremona-Transformationen in der Ebene. My.

V. Retali. Sur une transformation géométrique. Liége Mém. (3) **2**, 24 S.; Mathesis (2) **10**, Suppl. 1.

Die Transformation, um die es sich in der Abhandlung handelt, ist eine Verallgemeinerung einer von Henkel angegebenen Transformation. [„Ueber die aus einer Curve $y=f(x)$ abgeleiteten Curven $y_1 = xf'(x)$ (Tangentencurve) und $y_2 = -x : f'(x)$ (Normalencurve), mit specieller Anwendung auf die Parabel. Diss. Marburg 1882.] Zwei Curven C und C_1 werden ein-eindeutig durch folgende Anweisung auf einander bezogen. In der Ebene der Curve C seien zwei Punkte O und Y und eine Axe s fest angenommen. Schneidet die Tangente in einem Punkte P der Curve die Axe s in T, so zieht man OT bis zum Schnitt P_1 mit der Verbindungslinie YP. Der Punkt P_1 beschreibt dann die transformirte Curve C_1, die mit der gegebenen gleiches Geschlecht besitzt. Liegt Y auf der Axe s, so geht aus einer Curve der n-ten Ordnung und m-ten Klasse eine Curve von der Ordnung n^2 und der Klasse $3m$ hervor. Der Punkt O ist ein n-facher, der Punkt Y ein m-facher Punkt mit Inflexionen der Curve, die ausserdem noch $\frac{1}{2}m(2n-3)$ Doppelpunkte besitzt. Es werden dann noch specielle Fälle der Transformation behandelt, welche auf bekannte von Brocard, Leibniz u. a. gegebene Transformationen führen. Im zweiten Teil der Abhandlung werden speciell diejenigen Curven dritten und vierten Grades behandelt, welche aus einem Kreise

oder aus einem allgemeinen Kegelschnitte abgeleitet sind oder aus einfachen Curven höheren Grades. Es sind damit ganz interessante Beispiele für die ein-eindeutigen Transformationen geliefert. Sr.

G. Scorza. Sopra le corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali. Torino Atti **35**, 443-459.

Die Grundgedanken der vom Verf. entwickelten Betrachtungen liegen teils in der berühmten Abhandlung von Brill und Noether: „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie“ (vgl. F. d. M. **6**, 251, 1874), teils in derjenigen von Hurwitz: „Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip“ (F. d. M. **18**, 626, 1886), zwei Arbeiten, denen der Verf. seine Bezeichnungen und Benennungen entlehnt. Das Ziel, welches er sich gesteckt hat, ist, in Abweichung von Castelnuovo (vgl. F. d. M. **24**, 573, 1892) eine andere Verallgemeinerung der Eigenschaften der eindeutigen Correspondenzen über die elliptischen Curven zu geben, deren erschöpfende Darstellung von Segre (F. d. M. **18**, 620, 1889) herrührt. Durch eine geschickte Anwendung der Hurwitz'schen Grundformeln beweist zuerst der Verf. folgenden Satz (und seine Umkehrung): „In jeder Correspondenz mit negativer Wertigkeit $-\gamma'$, welche eine beliebige algebraische Curve als Träger hat, bilden zwei beliebige Punkte x und x_1 der Curve, je γ'-mal gerechnet, und x mit den x_1 entsprechenden Punkten, wie x_1 mit den x entsprechenden Punkten, zwei corresiduale Punktgruppen.“ Durch geometrische Ueberlegungen beweist er ferner: „Man erhält eine Klasse von ∞^p Correspondenzen (p, p) mit positiver Wertigkeit, wenn man ∞^p vollkommene nicht specielle g_{p+1}^1 einer Curve C betrachtet; jede erzeugt eine symmetrische Correspondenz (p, p) mit der Wertigkeit 1, wenn man jedem Punkte x von C die p Punkte entspechen lässt, welche mit ihm eine Gruppe der betrachteten g_{p+1}^1 bilden.“

In § II des Aufsatzes beschäftigt sich Scorza mit den speciellen Correspondenzen (p, p), welche eine positive Wertigkeit haben, und „speciell“ nennt er eine solche Correspondenz, wenn jeder Punkt des Trägers C, γ-mal genommen, mit seinen $p(>2)$ entsprechenden eine Specialgruppe bildet. Da die Charakterisirung aller speciellen Correspondenzen eine zu schwierige Aufgabe ist, so beschränkt sich der Verf. auf die Betrachtungen einiger besonderen Fälle, welche dennoch auf erwähnungswerte Resultate führen. Z. B.: Auf den allgemeinen Curven vom Geschlecht 3 giebt es keine Correspondenz, ausser den ∞^2, welche aus den speciellen g_4^1 entspringen; jede Curve vom Geschlecht 4 enthält ∞^3 (unsymmetrische) specielle Correspondenzen mit der Wertigkeit 1, welche von den ∞^3 (symmetrischen) verschieden sind, die aus den g_5^1 der Curve entstehen; für den Fall $p=4$ verweisen wir auf die Originalarbeit.

In § III beweist der Verf., dass die Correspondenzen (p, p) mit negativer Wertigkeit $(\gamma = -1)$ alle vollkommen charakterisirt sind und

geometrisch construirt werden können. Sie sind ∞^p; jede ist unzweideutig bestimmt, wenn man die nicht specielle Gruppe definirt, welche einem gegebenen Punkte der Curve entspricht. Unter ihnen sind $2^{p-1}(2^p+1)$ symmetrisch. Setzt man insbesondere $p=3$ voraus, so wird man auf eine Figur geführt, mit welcher der Verf. sich schon erfolgreich beschäftigt hat (F. d. M. **30**, 527, 1899), und welche man als besonderen Fall ansehen kann von einer anderen, die im R_{p-1} eine Normalcurve der Ordnung $2(p-1)$ als Kerncurve hat. La.

Ch. A. Scott. On a memoir by Riccardo de Paolis. American M. S. Bull. (2) **7**, 24-38.

Die Abhandlung von R. de Paolis: „Le trasformazioni piane doppie" (Rom. Acc. L. Rend. (3) **1**, 136-171; F. d. M. **9**, 581-583, 1877) enthält eine Untersuchung der zwei-eindeutigen Transformation, und der Referent des Jahrbuchs (Noether) hat damals schon auf einige wünschenswerte Ergänzungen hingewiesen. Die Verfasserin des vorliegenden Aufsatzes, die durch ihre „Studies in the transformation of plane algebraic curves" (Quart. J. **29**, 329-381; F. d. M. **29**, 497-499, 1898; Fortsetzung, aber noch nicht Schluss in diesem Bande S. 566) auf eine genaue und tiefe Untersuchung der bezüglichen Fragen geführt ist, betrachtet in der gegenwärtigen Arbeit die de Paolis'sche Klassification der Grundpunkte und -Linien, die jener Autor nach ihrer Meinung „auf Symptome von Unterschieden, statt auf wirkliche Ursachen" gegründet hat. „Wenn die (2, 1)-Transformation nur als ein Fall in der allgemeinen Theorie der $(\varkappa, 1)$-Transformation betrachtet wird, bieten einige der besonderen Eigenschaften (thatsächlich diejenigen, von denen das Interesse an ihr zumeist herrührt) einen etwas verschiedenen Anblick dar." Der Hauptsache nach werden also die Eigenschaften der (2, 1)-deutigen Transformation unter diejenigen der $(\varkappa, 1)$-deutigen gestellt. Die Verfasserin schliesst ihre Betrachtungen mit dem Satze: „Somit ist schwerlich zu erwarten, dass die Behandlung der Transformation in der Richtung von Cremona und de Paolis noch weiter geführt werden kann; aber das innere Interesse an der de Paolis'schen Leistung ist sicher Entschuldigung genug für die Verwendung eines nicht bedeutenden Raumes hierfür in einer Zeitschrift kritischer und historischer Art." Gerade die kritische Art des Aufsatzes nötigt aber den Ref., auf ein genaueres Eingehen zu verzichten. Lp.

G. Castelnuovo e F. Enriques. Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi. Palermo Rend. **14**, 290-302.

Die sehr interessante Abhandlung der beiden italienischen Geometer bringt die Frage über die Rationalität der Doppelebenen $\{x, y, \sqrt{f(x,y)}\}$ zu einem Abschluss durch Abzählungen in Bezug auf successiv adjungirte Curven vom ersten, zweiten, ... Index. Die Verzweigungscurve kann immer

von geradem Grade angenommen werden und ist durch birationale Transformation der Ebene stets überführbar in eine Curve geraden Grades mit lauter vielfachen Punkten gerader Ordnung oder zwei unendlich nahen solcher Punkte ungerader Ordnung. Der Begriff der Multiplicität eines Punktes erfährt eine kleine Erweiterung mit Rücksicht auf die Transformation. Als „virtuelle" Multiplicität, die durch die adjungirten Curven bestimmt ist, gilt eine Zahl, welche von der wirklichen Multiplicität um 1 differiren kann.

Es wird dann gezeigt, dass die Curven C_{2n}, welche keine Adjungirte besitzen, weder solche vom ersten (C_{2n-3}), zweiten (C_{2n-6}) etc. Index, transformirbar sind in einen Kegelschnitt, oder in eine geradzahlige Gruppe von Geraden durch einen Punkt, bezw. zwei unendlich benachbarte. Besitzt ferner die C_{2n} nur die Adjungirte vom Index 1, so ist sie transformirbar a) in eine $C_{2\nu}$ mit $(2\nu - 2)$-fachem oder vielfacherem Punkte, oder b) in eine allgemeine C_4, oder c) in eine C_6 mit zwei unendlich nahen Punkten. Schliesslich wird umgekehrt bewiesen, mit Zuhülfenahme der successiven Flächengeschlechter P_1, $P_2, \ldots$, dass für eine Verzweigungscurve einer Doppelcurve, die rational oder auf eine Regelfläche abbildbar ist, die Adjungirten vom zweiten Index ab nicht existiren können, wodurch der von Clebsch und Noether aufgestellte Satz und dessen von Noether bewiesene Umkehrung ganz neu bewiesen sind, wenn auch unter Voraussetzung eigentlicher vielfacher Punkte.

Der Schluss der Note enthält noch verschiedene Anwendungen des Satzes auf rationale krumme Flächen, Curvensysteme und die Transformation specieller Curven. Sr.

H. E. Timerding. Ueber die eindeutigen quadratischen Transformationen einer Ebene. Math. Ann. **58**, 193-219.

Die Untersuchung erstreckt sich auf die Eigenschaften der Cremona-Transformationen in Verbindung mit dem Begriffe des Connexes. Einer geraden Linie der Ebene ordnet die Transformation einen Kegelschnitt zu, und es werden nun das Verhalten dieser beiden zu einander, der Ort ihrer Schnittpunkte, specielle Fälle, in denen Berührung eintritt, und analoge Fragen untersucht. Eine Anwendung auf die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung schliesst die Abhandlung.
Sr.

V. Jamet. Sur la transformation, point par point, des courbes algébriques. Nouv. Ann. (3) **19**, 506-508.

Eine Inversion mit darauf folgender Collineation und Correlation genügt, um eine algebraische Curve, deren vielfache Punkte keine zusammenfallenden Tangenten haben, in eine andere überzuführen, die nur Doppelpunkte hat. Js.

J. A. Third. Two geometrical transformations. Edinb. M. S. Proc. **18**, 11-24.

Die zur Erörterung kommenden Transformationen sind, wie die isogonale und die isotomische Transformation, besondere Fälle der allgemeinen birationalen quadratischen Transformation und liefern zahlreiche Sätze in der Dreiecksgeometrie. Folgendes ist ihre Definition: Es sei K der Mittelpunkt eines Kegelschnittes, der die Seiten BC, CA, AB des Bezugsdreiecks in X, Y, Z berührt; ferner sei S der Treffpunkt von AX, BY, CZ. Sind nun x, y, z die trilinearen Coordinaten von S und x', y', z' die von K, so ist

$$x' : y' : z' = x(by + cz) : y(cz + ax) : z(ax + by),$$
$$x : y : z = 1/a\,(by' + cz' - ax') : 1/b\,(cz' + ax' - by') : 1/c\,(ax' + by' - cz').$$

Die S-Transformation einer Geraden ist ein Umkegelschnitt des Dreiecks, die K-Transformation ein Umkegelschnitt des durch die Mitten der Dreiecksseiten als Ecken bestimmten Dreiecks. Zahlreiche besondere Fälle werden betrachtet, und drei Tabellen von Correspondenzen, die sich leicht erweitern lassen, werden zur Veranschaulichung der Sätze aufgestellt. Gbs. (Lp.)

R. W. H. T. Hudson. Note on reciprocation. Messenger (2) **29**, 191-192.

Die Formeln zur Ausführung der reciproken Transformation werden in Liniencoordinaten gegeben. Als ein Resultat folgt der Satz, dass eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende Linien eines linearen Complexes sind, linear in die reciproke verwandelt werden kann. Lp.

G. G. Morrice. On linear transformation by inversion. Messenger (2) **29**, 143-144.

Ein kleiner Zusatz zu dem Aufsatze von F. Klein: „Zur nichteuklidischen Geometrie“ (Math. Ann. **37**, 544-572; F. d. M. **22**, 535, 1890): „Das System solcher Kreise, die der Modulargruppe der (näher angegebenen) Transformationen (1) und (2) entsprechen, erzeugt ein Polygon, dessen Winkel gleich denen des Polygons sind, gebildet durch das Kreissystem einer Inversion, durch welche die besagten Transformationen bewirkt werden können.“ Lp.

B. Levi. Sulla trasformazione dell' intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi. Torino Atti **35**, 20-33.

In dem vorliegenden Aufsatz giebt der Verf. eine notwendige Vervollständigung zu seiner älteren Arbeit (F. d. M. **29**, 557, 1897): „Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie“, indem er den folgen-

den Satz beweist, von dem er bis jetzt nur den Wortlaut gegeben hatte:

„Sei F eine algebraische Fläche des gewöhnlichen Raumes Σ und A ein singulärer Punkt derselben, γ ein beliebiger Zweig, welcher durch A geht und in F liegt, so sind einige Zahlen $s, s', s'', \ldots$ bestimmt, welche die „Zusammensetzungsconstanten" von A auf F längs γ genannt werden. Man unterwerfe Σ einer beliebigen Cremona-Transformation θ, welche Σ, F, A der Reihe nach in Σ', F', A' transformire.

1. A sei kein Fundamentalpunkt, und er gehöre nicht einmal zu den Fundamentalmannigfaltigkeiten der gegebenen Transformation. Ihm entspricht ein bestimmter Punkt A', welcher der Ursprung von γ' ist; die Zusammensetzungsconstanten von A und A' auf F und F' längs γ und γ' sind gleich. (Der Kürze wegen werden die Singularitäten von F und F' in A und A' „ähnlich" genannt; ähnlich werden auch zwei Transformationen genannt, wenn sie A als Ursprung von γ in zwei ähnliche singuläre Punkte transformiren.)

2. A sei ein isolirter Fundamentalpunkt von θ, und die Fundamentalflächen, welche durch ihn gehen, berühren γ nicht; dem Ursprunge A von γ entspreche der Ursprung A' von γ'. Die Zusammensetzungsconstanten von A' auf F' längs γ' sind noch $s, s', s'', \ldots$, und jede analoge Transformation ist zu θ ähnlich in Bezug auf γ.

3. A sei ein beliebiger Punkt einer ordentlichen Fundamentalcurve von θ, und γ berühre nicht ausserhalb von γ die durch sie gehenden Fundamentalflächen. Jede andere Transformation, welche dieselbe Fundamentallinie besitzt und denselben Allgemeinheitsbedingungen genügt, welche θ auferlegt sind, ist mit θ ähnlich in Bezug auf γ." La.

J. Clairin. Sur une transformation de Bäcklund. Darboux Bull. **24,** 284-286.

Verallgemeinerung einer speciellen Bäcklund'schen Transformation auf die nichteuklidische Geometrie. Es ergiebt sich zugleich ein formaler Zusammenhang mit der Deformation des Paraboloids im euklidischen Raum.

Hsb.

J. Clairin. Sur une classe de transformations. C. R. **130,** 309-310.

Durch ein System (σ) von vier Gleichungen zwischen den Elementen (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') zweier Räume (e) und (e') werden die Flächen zweier Familien (s), (s') einander zugeordnet, deren jede, wie Bäcklund gezeigt hat, im allgemeinen zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung genügt. Wenn dagegen durch (σ) einem Elemente in (e) ∞^1 Elemente in (e') zugeordnet werden, so ist (s) durch eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, welche ein System von Charakteristiken erster Ordnung zulässt, und umgekehrt. Hieran werden noch einige Bemerkungen über specielle Fälle geknüpft.

T.

E. O. LOVETT. Families of transformations of straight lines into spheres. American J. **22,** 138-145.

Eine Zusammenfassung des Inhalts der in F. d. M. **30,** 338-340 besprochenen Noten des Verf., jedoch ohne die in jenen Noten begangenen Fehler. Unverständlich ist es, was die Bemerkung am Schlusse der Arbeit soll: „By employing the results of the note, an infinite number of infinite families of line-sphere contact-transformations of ordinary space can be constructed“; denn man kann ja alle Transformationen dieser Art sofort angeben! El.

K. ZORAWSKI. Ueber einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene. Leipz. Ber. **52,** 77-89.

Der Verf. denkt sich eine infinitesimale Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

der Ebene gegeben und zwei Functionen $\Phi(x, y, dx, dy)$, $\varrho(x, y, dx, dy)$, die in dx, dy homogen von demselben Grade sind; er setzt voraus, dass $U(\Phi) = \Psi(x, y, dx, dy)$ nicht identisch verschwindet. Wenn nun die Curvenschar $F(x, y, C) = 0$ eine Differentialgleichung von der Form: $\Psi = \Omega(x, y) \cdot \varrho$ befriedigt und ausserdem bei der infinitesimalen Transformation Uf invariant bleibt, so sagt der Verf., dass die Function Φ bei der Transformation Uf längs der Curvenschar $F = 0$ eine gleichmässige Veränderung mit der Geschwindigkeit $\Omega \cdot \varrho$ erfährt. Wird die Gleichung $\Psi = \Omega \cdot \varrho$ von mehreren Curvenscharen befriedigt, die alle bei Uf invariant bleiben, gestattet sie also die infinitesimale Transformation Uf, so sagt der Verf., Φ variire längs aller Scharen von Integralcurven der Gleichung $\Psi = \Omega \cdot \varrho$ mit vollkommener Gleichmässigkeit. Für die beiden Formen: $\Phi = \varrho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $\Phi = \text{arctg}\,(dy : dx)$, $\varrho = 1$ der Functionen Φ und ϱ entwickelt jetzt der Verf. die Bedingungen, unter denen ein solches vollkommen gleichmässiges Verhalten von ϱ möglich ist. Auf diese Weise lassen sich gewisse stationäre Bewegungen einer Flüssigkeit in der Ebene durch einfache Differentialeigenschaften charakterisiren. Zum Schlusse deutet der Verf. an, wie man in ähnlicher Weise auch nicht stationäre Bewegungen charakterisiren kann. El.

CH. MICHEL. Sur la transformation quadratique. Bull. math. spéc. **6,** 34-35.

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt O der Ebene des Dreiecks. Einem Punkte M lässt man einen Punkt M' entsprechen, der so construirt wird: Man zeichnet den Kegelschnitt, der die drei Seiten des Dreiecks berührt und ausserdem OM in M. Der Punkt M' ist der Berührungspunkt der zweiten Tangente von O an den Kegelschnitt. Die Transformation ist die Steiner'sche quadratische. Lp.

H. Blichfeldt. On a certain class of groups of transformations in space of three dimensions. Diss. Leipzig. 61 S. 8°.

Vergl. den Bericht auf S. 146 dieses Bandes. Lp.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

H. E. Timerding. Ueber einige conforme Abbildungen. Zeitschr. f. Math. **45**, 54-56.

In der die Mercator'sche Projection eines Kugelpunktes vermittelnden Beziehung zwischen der geographischen Breite ϑ des Punktes und der Ordinate η des Bildpunktes werden η und ϑ durch complexe Zahlen ersetzt. Die hierdurch charakterisirte Abbildung wird erläutert, verallgemeinert und durch Combination mit einigen anderen Abbildungen zur Herstellung neuer Abbildungen verwendet. Zum Schluss sind Anwendungen der Mercator-Curven in der Physik und Nautik zusammengestellt. Schg.

J. Goettler. Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer circularen Curve dritter Ordnung oder von einer bicircularen Curve vierter Ordnung begrenzt wird. Münch. Ber. **30**, 165-185.

Nach einer von Lindemann angegebenen Methode kann das Problem der conformen Abbildung für eine Curve $f(z, z_1) = 0$ erledigt werden, wenn sich eine rationale Function von x und y mit reellen Coefficienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (Φ eine rationale Function) $\frac{\Phi(z, z_1)}{\partial f/\partial z_1}$ eine rationale Function von z wird. Dieser Fall liegt u. a. bei der Ellipse und Parabel, die Schwarz, bei der Hyperbel, die Lindemann behandelt hat, und bei den in der Ueberschrift genannten Curven vor. Für die letzteren wird das Problem der conformen Abbildung hier vollständig gelöst. Die Untersuchung wird durchgeführt für Curven 1. ohne Doppelpunkt, 2. mit Doppelpunkt, 3. mit isolirtem Punkt, sowie für einige specielle bicirculare Curven vierter Ordnung, nämlich die Cassini'schen Curven und die Pascal'schen Schneckenlinien. Ot.

O. Hentschel. Ausführung einiger conformen Abbildungen der Parabel auf den Kreis und unendlich lange Parallelstreifen. Leipzig: G. Fock. 8 S. + 4 Fig.-Taf.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

P. Volkmann. Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. Leipzig: B. G. Teubner. XVI + 370 S. gr. 8°.

Der Inhalt dieses Buches umfasst: I. Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. II. Die Grundlagen der Galilei-Newton'schen Mechanik und ihre Consequenzen für die Mechanik eines materiellen Punktes, beziehungsweise eines Massenpunktes. III. Die Mechanik eines Massensystems für discrete und continuirliche Massen. IV. Anwendungen insbesondere der Flächensätze auf Methoden- und Instrumentenlehre der praktischen Physik. V. Theorie der Hydrostatik. VI. Einführung in die Behandlung geophysikalischer Fragen. VII. Einführung in die allgemeinen Principe der Mechanik. Jedem Teile ist die genaue Disposition mit den Ueberschriften der einzelnen Paragraphen vorgedruckt. Am Ende der einzelnen Teile befinden sich kurze historische Uebersichten: die Namen der Hauptforscher auf dem betreffenden Gebiete mit Geburts- und Todesjahr, die Titel ihrer Quellenwerke.

Die Haltung des Werkes entspricht den Veröffentlichungen des Verf. aus dem letzten Jahrzehnt, die eine ausgesprochene Hinneigung zu erkenntnistheoretischen Fragen, eine Bevorzugung der historischen Elemente der Wissenschaft, besonders eine uneingeschränkte Wertschätzung der Leistungen Newton's bekundeten. Die durchgehende Betonung philosophischer Auffassung, der enge Anschluss an die Leistungen der führenden Geister bilden eigentümliche Vorzüge des Werkes, durch die es eine grosse Anzahl interessirter Leser anziehen wird, sei es zustimmender, sei es widersprechender. Besonders wird die Wirkung auf die studirende Jugend eine nachhaltige sein, und es ist dem Verf. als

Verdienst anzurechnen, diese beim Studium oft vernachlässigten Richtungen, für welche der Jüngling so leicht empfänglich ist, nachdrücklich betont zu haben.

Bei der sonstigen Auswahl des Stoffes ist offenbar die Rücksicht auf physikalische Anwendungen massgebend gewesen; aber auch die persönliche Vorliebe des Autors für manche der von ihm gepflegten Gebiete ist erkennbar, so in der verhältnismässig weit gehenden Behandlung der Capillaritätstheorie, wo sogar auf schwebende Streitfragen mit einer Breite eingegangen ist, die zu dem sonst nur das Allgemeine berührenden Vortrage nicht recht passt. Wer in dem Werke nämlich ein Eingehen auf besondere Fragen sucht, wird meistens enttäuscht werden, besonders in Bezug auf mathematische Entwickelungen der Mechanik, einer Disciplin, welche der Verf. ja doch als Grundlage für alle physikalischen Einzeldisciplinen proclamirt.

Dem Wesen des Jahrbuchs entspricht es, in diesem Referate nicht auf eine Kritik von Einzelheiten einzugehen. Um jedoch einigen Wünschen Ausdruck zu geben, möchte Ref. bemerken, dass er die Behandlung der relativen Bewegung mit ihren physikalisch interessanten Fragen ungern vermisst. Sollte es mehr als ein Uebersehen sein, dass der Name Streintz in dem Buche nirgends vorkommt? Auch das Fehlen eines Forschers wie Karl Pearson, von dem doch Mach sagt, dass er sich mit ihm in vielen Dingen eins fühle, fällt auf. Zu der Nacherzählung der Stelle aus Brewster's Lebensbeschreibung Newton's bezüglich der Entdeckung des Zusammenhanges der Schwere und der Gravitation, insbesondere der Rolle, die Picard's Gradmessung dabei gespielt haben soll, ist zu bemerken, dass Rosenberger in „Isaac Newton und seine Principien“ (Leipzig, 1895, S. 118 ff.) alles für eine Legende erklärt und seine Auffassung durchaus glaubhaft macht. Warum ist dieses vom Verf. gar nicht beachtet worden? Endlich auch ein kleines Versehen: Der französische Astronom heisst Delaunay, nicht Delauny, wie im Text und im Register steht. Lp.

Ch. Cellérier. Cours de mécanique. Paris: Gauthier-Villars et Fils. VIII + 617 S. gr. 8° (1892).

Das schon 1892 erschienene Buch ist uns erst jetzt zur Anzeige zugegangen. Während wir also in F. d. M. **24,** 811 nur den Titel anführen konnten, wollen wir, gerade wie der Berichterstatter in Darboux Bull. (2) **26,** 124-127, 1902, nun die Besprechung nachholen.

Das Werk ist von der Familie Cellérier's aus seinem Nachlass veröffentlicht, ähnlich wie mehrere seiner Abhandlungen in den Jahren 1890 und 1891 durch Vermittelung von Bertrand, C. Jordan und Darboux der Oeffentlichkeit übergeben sind. Das Vorwort berichtet hierüber: „Das Lehrbuch der Mechanik, welches wir hier veröffentlichen, ist das letzte Werk von Cellérier, der den Lehrstuhl der Mechanik an der Universität zu Genf innehatte. Der Verf. hat es wenige Monate vor seinem Tode im Jahre 1889 beendigt und vollständig ins Reine ge-

schrieben. Seine Absicht war, nach seiner persönlichen Methode ein Werk für den Unterricht in der Mechanik zu schaffen. Er hat sich nicht auf eine einfache Wiedergabe seiner wirklich gehaltenen Vorträge beschränkt, sondern er ist bei der Ausarbeitung weiter gegangen. Die Beweise hat er vereinfacht, während er ihre Strenge schärfte. Bezüglich der als Beispiele oder Anwendungen behandelten Gegenstände bleibt er nicht bei den analytischen Resultaten stehen, sondern er vervollständigt sie oft durch eine gedrängte Discussion mit Hülfe eines Systems von Ungleichungen, die dem Wesen der Aufgabe entsprechen; dies scheint ein seinen Schriften, besonders diesem Lehrgange eigentümlicher Zug zu sein."

Das Werk zerfällt in eine Einleitung und acht Kapitel, betitelt: I. Theoretische Statik. II. Anwendungen der Statik. III. Kinematik. IV. Erster Teil der Dynamik. Bewegung eines Massenpunktes. V. Auswertungen geometrischer Summen. VI. Zweiter Theil der Dynamik. Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern. VII. Ergänzung zur Dynamik. VIII. Mechanik der Flüssigkeiten.

Das ganze Buch giebt einen sorgfältig durchgearbeiteten Vortrag der Mechanik nach Art desjenigen, den Ref. vor vierzig Jahren bei Kummer gehört hat, der sich hierbei an den Cours de mécanique von Duhamel anschloss, unter Fortlassung mancher der schwierigeren analytischen Entwickelungen. Ein sicheres Aufsteigen von den einfachsten Elementen der Statik bis zu den allgemeinsten Principien der Dynamik erschliesst ein stetig wachsendes Verständnis, das Cellérier durch vielfach behandelte Beispiele und durch Bezugnahme auf Fragen der Physik und der Technik zu erhöhen strebt. Wegen dieser Einfachheit und Klarheit und wegen der Beziehungen auf concrete Fragen kann das Buch gewiss auch jetzt noch von dem das Studium der Mechanik beginnenden Jünger der Wissenschaft mit Vorteil zu Rate gezogen werden, obschon es sonst keine anderen in die Augen springenden Vorzüge hat. Dieser Meinung scheint auch der anonym gebliebene Recensent in Darboux's Bulletin zu sein, der seine drei Seiten lange Anzeige mit dem Satze schliesst: „Die kurze vorangehende Besprechung hat den Zweck, die Zielpunkte des Cellérier'schen Buches vor die Augen zu stellen: wenn der Verf. alle Gegenstände berührt, die ein Lehrbuch der analytischen Mechanik verlangt, so bemüht er sich augenscheinlich, seinen Unterricht einerseits der technischen Mechanik näher zu bringen, andererseits der mathematischen Physik. Es hat eine Zeit gegeben, in welcher der Unterricht in der analytischen Mechanik den Hauptzweck zu haben schien, den Studenten interessante Beispiele zur Integralrechnung zu liefern; man braucht es nicht zu bedauern, dass jene Zeit vorüber ist."

Lp.

Aug. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Zweiter Band: Graphische Statik. Mit 166 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. X + 452 S. gr. 8°.

Mit diesem Bande gelangt das ganze Werk, das mit der Ver-

öffentlichung des dritten Bandes begonnen wurde, zum Abschlusse. Da es sich um Vorlesungen handelt, die nur in etwas erweiterter Form veröffentlicht wurden, so sind weitergehende Ausführungen, die zur Theorie der Brücken, zur Statik der Bauconstructionen überhaupt, zur theoretischen Maschinenlehre u. s. f. gehören, in diese für Studirende der ersten vier Semester gehaltenen Vorträge nicht einbezogen worden. Die abgehandelten Gegenstände sind aus den folgenden Titeln der sieben Abschnitte zu ersehen, in die das Buch geteilt ist: I. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene. II. Das Seilpolygon oder Seileck. III. Die Kräfte im Raume. IV. Das ebene Fachwerk. V. Das Fachwerk im Raume. VI. Die elastische Formänderung des Fachwerks und das statisch unbestimmte Fachwerk. VII. Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger. Am Schlusse sind die wichtigsten Formeln zusammengestellt. Lp.

Aug. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band. Einführung in die Mechanik. Mit 96 Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. XIV u. 422 S. gr. 8°.

Die erste Auflage dieses Bandes wurde in F. d. M. **29**, 583, 1898, angezeigt. Die kurze Frist seit dem Erscheinen verbot irgendwie einschneidende Aenderungen. Der Verf. bezeichnet einige neu hinzugekommene kleinere Zusätze und die neue Fassung einiger Stellen, die kritisirt worden waren, in seinem Vorworte als die einzigen Unterschiede von der ursprünglichen Fassung. Endlich sind 18 neue Figuren beigegeben. Lp.

Aug. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Dritter Band. Festigkeitslehre. Mit 79 Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. XVIII u. 512 S. gr. 8°.

Bezüglich des Inhaltes dieses Bandes vergleiche man die Anzeige der ersten Auflage in F. d. M. **28**, 607, 1897. Einzelne Teile sind umgearbeitet; besonders sind die im Vorworte zum ersten Bande erster Auflage aufgezählten Fehler, sowie einige andere Versehen berichtigt worden; neuere Arbeiten der letzten Jahre sind berücksichtigt. Die Einteilung ist dieselbe geblieben, damit Verweisungen auf das Buch keine Störung erfahren. Lp.

Ad. Wernicke's Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Uebungen aus den Gebieten der Physik und Technik. In zwei Teilen. Erster Teil: Mechanik fester Körper. Von Alex. Wernicke. Vierte völlig umgearbeitete Auflage. Erste Abteilung: Einleitung. — Phoronomie. Lehre vom materiellen Punkte. Mit eingedruckten Abbildungen.

XV + 314 S. — **Zweiter Teil: Flüssigkeiten und Gase. Von Richard Vater. Dritte völlig umgearbeitete Auflage. Mit 234 eingedruckten Abbildungen.** XII + 374 S. **Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.**

Neben dem Werke von A. Ritter über technische Mechanik hat Ad. Wernicke's Lehrbuch der Mechanik seit seinem Entstehen (1858) bei allen denjenigen Technikern sich einer grossen Beliebtheit erfreut, welche der Kenntnis der Infinitesimalrechnung entbehrten, sich also mit den ihnen vorkommenden Aufgaben durch blosse Anwendung der Elementarmathematik abfinden mussten. Aus dem Unterrichte an einer Gewerbeschule hervorgegangen und nicht, wie das Ritter'sche Werk, durch nachfolgende Curse der analytischen Mechanik und der Ingenieur-Mechanik ergänzt, ist das Wernicke'sche Lehrbuch sogar umfassender, indem es innerhalb der durch den Zweck gegebenen Beschränkung die Anwendungen möglichst vollständig behandelt.

Demnach ist es zu verstehen, dass die Vieweg'sche Buchhandlung nach dem Tode des verdienten Verf. eine neue Bearbeitung des bewährten Werkes veranlasst hat, und da es gegenwärtig wohl schwierig ist, einen Gelehrten zu finden, der das ganze Gebiet, das zur Darstellung kommt, völlig beherrscht, so hat der mit der Herausgabe betraute Sohn des Verf. sich auf die Bearbeitung des ersten Teiles beschränkt (Mechanik fester Körper), für den zweiten Teil aber (Flüssigkeiten und Gase) den Docenten der Technischen Hochschule zu Aachen Richard Vater gewonnen.

Von dem ersten Teile liegt für das Berichtsjahr nur die erste Abteilung vor. Verglichen mit der dritten Auflage des ersten Teiles vom Jahre 1877, ist das vorliegende erste starke Heft ein völlig neues Buch geworden, in dem nur ungefähr die Disposition festgehalten ist, und in das einige Uebungsaufgaben hinübergenommen sind. Im übrigen hat der Bearbeiter seiner Neigung zu philosophischen Betrachtungen an vielen Stellen nachgegeben, hat ferner die Elemente der Vectorenrechnung aufgenommen und ist im Verlaufe der Entwickelungen in die Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung übergegangen. Ferner hat er die Uebungen in ausgeführte Anwendungen und einfache Uebungsaufgaben zerlegt. Durch diese vielfachen Erweiterungen ist der Umfang der vorliegenden ersten Abteilung auf das Dreifache dessen gestiegen, was in der dritten Auflage für den nämlichen Gegenstand gebraucht ist. Der Charakter dieser Abteilung ist dadurch ein wesentlich höherer geworden.

Der zweite, von Vater bearbeitete Teil schliesst sich dagegen genau an die von Ad. Wernicke besorgte zweite Auflage an. Die jeweiligen ersten Teile der einzelnen Kapitel, die theoretischen Grundlagen, sind im grossen und ganzen ungeändert geblieben. Fast durchgängig neu bearbeitet wurden dagegen die als Anwendungen bezeichneten Abschnitte. Die Heissluftmaschinen sind nur in stark gekürzter Form beibehalten; dafür ist aber eine kurze Beschreibung der Gas-, Benzin- und Petroleummaschinen hinzugefügt. Wir glauben, dass gerade dieser

zweite Teil für diejenigen recht nützlich sich erweisen wird, die sich mit den ersten Grundgedanken der vielfachen Anwendungen bekannt machen wollen. Lp.

Alex. Wernicke. Schulaufgaben aus der Mechanik, unter besonderer Berücksichtigung der Technik. Unterrichtsbl. f. Math. 6, 86-88, 113-116.

Der Verf. entnimmt aus dem von ihm neubearbeiteten Lehrbuche der Mechanik einige Beispiele, die nach seiner Ansicht für die Behandlung der technischen Mechanik auf Mittelschulen geeignet sind. Dass Schellbach ein viel grösseres Material in seinen „Neuen Elementen der Mechanik" dargeboten hat, scheint dem Verf. nicht bekannt geworden zu sein. Lp.

K. Hecht. Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik für Maschinen- und Bautechniker. Elementar in leichtfasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- und Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen. Band II: Festigkeitslehre. Mit 175 Beispielen, 295 Figuren und einem Tabellenanhang. Dresden: Gerhard Kühtmann. VII u. 385 + 31 S. gr. 8°.

Die Anzeige des ersten Bandes dieses Werks steht in F. d. M. 24, 805, 1892; ein dritter Band, welcher die graphischen Methoden, graphische Mathematik und graphische Statik enthalten soll, wird in Aussicht gestellt. Folgende Inhaltsübersicht möge eine Vorstellung von dem innegehaltenen Gange der Entwickelung geben. I. Die einfachen Festigkeitsarten. 1. Dehnung oder Zugfestigkeit. 2. Die rückwirkende oder Druckfestigkeit. 3. Allgemeine Gesetze über Formveränderung, Versuchsresultate. 4. Schub-, Scherfestigkeit. 5. Verdrehungs- oder Torsionsfestigkeit. II. Die zusammengesetzten Festigkeitsarten. 1. Die aus Druck- und Zugspannungen zusammengesetzten Festigkeitsarten. A. Biegung. B. Knickung. 2. Die aus mehreren Spannungen zusammengesetzten Festigkeitsarten. A. Die in derselben Richtung wirkenden Zusammensetzungen. B. Besondere Combinationen, specielle zusammengesetzte Festigkeit. III. Die Festigkeit der plattenförmigen Körper. IV. Die Festigkeit der Gefässe. 1. Cylindrische Gefässe. 2. Kugelförmige Gefässe. V. Die Festigkeit mit Rücksicht auf Stosskräfte, die Arbeit der inneren Kräfte. — Anhang: Sechs Tabellen.

Wie in dem ersten Bande, so ist auch in dem vorliegenden nur von den Hülfsmitteln der elementaren Mathematik Gebrauch gemacht; an manchen Stellen ist jedoch, unabhängig von der fortlaufenden Darstellung, im Hinblick auf fortgeschrittene Leser die Infinitesimalrechnung zur schärferen Begründung herbeigezogen. In seiner ausführlichen Vortragsweise und in seinem grossen Vorrat völlig durchgearbeiteter Beispiele, die durch klare Zeichnungen sowie durch Zahlenrechnungen verdeutlicht werden,

wird auch dieser Band für technische Mittelschulen ganz brauchbar sein, und selbst manche Studenten technischer Hochschulen dürften aus den Beispielen für ihre theoretische Einsicht Nutzen ziehen. Lp.

W. T. A. Emtage. Elementary mechanics of solids. London and New York: Macmillan. VIII + 333 S.

Das Buch ist ganz elementar, scheint aber klar geschrieben zu sein und sich für Schüler zu eignen, die sich für verschiedene elementare Prüfungen vorbereiten. Gbs. (Lp.)

P. Johannesson. Physikalische Mechanik. Mit 37 Figuren auf zwei lithographirten Tafeln. Berlin: Julius Springer. 58 S. 8°.

Der Verf., der vor einigen Jahren eine anregende Studie: „Das Beharrungsgesetz“ veröffentlicht hat (F. d. M. **27**, 570, 1896), giebt hier einen kurzen Lehrgang der physikalischen Mechanik, indem er immer von der Beobachtung ausgeht und dann zu den Gesetzen aufsteigt. Den einzelnen Abschnitten sind Uebungsaufgaben angehängt; bei wichtigen Sätzen sind die frühesten Quellen citirt. Für die Schulen bestimmt, wird das Büchlein dazu beitragen, dass auch in dem Gebiete der Mechanik der Weg der Induction beim Unterrichte mehr benutzt wird. Lp.

V. Strouhal. Mechanik. Mit 342 Abbildungen im Text. Prag. VIII + 670 S. 8°. (Böhmisch, No. 4 des „Sbornik“ des Vereins böhm. Math.)

Das Buch entwickelt die physikalische Mechanik als ersten Teil der Experimentalphysik, welche der Verf. unter der Feder hat. Das Werk, in welchem durchweg das neue Masssystem eingeführt ist, zeichnet sich durch Beschreibung mehrerer Apparate und Versuche aus, die den Verf. zum Urheber haben, ferner durch instructive Betrachtungen aus dem Gebiete der Astronomie und Meteorologie. Mehrere seiner zahlreichen Textbilder bringen photographische Ansichten von Experimenten in statu nascendi. Das Buch ist in 20 Kapitel eingeteilt. Sda.

R. Geigenmüller. Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. Für technische Fachschulen und den Selbstunterricht bearbeitet. I. Teil. Elementarmechanik. Vierte Aufl. Mittweida: R. Schulze. XV + 291 S. gr. 8°.

Die erste Auflage des Werks, dessen Titel damals etwas anders lautete, ist in F. d. M. **21**, 848, 1889, angezeigt worden. Die neue Auflage mit dem Sondertitel „Elementarmechanik“ ist in dem vorliegenden Bande als erster Teil eines grösseren Werkes bezeichnet, „welches als

Leitfaden zum Unterricht an technischen Fachschulen, sowie auch für das Selbststudium bestimmt ist".

Da aus diesem ersten Teile alle Gegenstände ausgeschieden sind, welche trigonometrische und stereometrische Kenntnisse bei der Behandlung voraussetzen, so ist der Standpunkt ein recht niedrig gegriffener. Der auf dem Gebiete dieser Litteratur geschickte und erfahrene Verf. hat es aber verstanden, durch Behandlung vieler technisch sofort verwertbarer Beispiele den anscheinend sehr eng begrenzten Stoff auf ein weites Gebiet auszudehnen, und so wird seine Schrift auch in ihrer neuen Gestalt für die Kreise, auf die sie berechnet ist, sich als nützlich erweisen. Lp.

K. Heun. Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Bericht erstattet der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Deutsche Math. Ver. 9_2, 1-123.

Die Schrift, welche von einem ungemein sorgfältigen Studium und dem reichen Wissen des Verf. zeugt, kennzeichnet zunächst die verschiedenen Richtungen der Mechanik und fasst die Anforderungen der technischen Mechanik in den folgenden Sätzen zusammen (S. 8): „Die Technik kann ihre theoretischen Bewegungsprobleme nicht nach Belieben stellen, wie die rationelle Mechanik ihre Uebungsbeispiele. Sie muss die Massensysteme, die Kräftesysteme nehmen, wie sie die Bedürfnisse der Praxis hinstellen. Ihre Lösungsmethoden dienen nicht zur Illustration eleganter mathematischer Theorien, sondern müssen vor allem sich durch die grösste erreichbare Einfachheit auszeichnen." Dem Zwecke nach ist die Arbeit referirender Natur, wie die übrigen von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ausgegangenen Berichte. In der Zusammenstellung der im Laufe der Geschichte hervorgetretenen Probleme, der zu ihrer Behandlung gebrauchten Hülfsmittel, in der Aufzählung der wichtigeren Schriften, die von den tüchtigsten Forschern verfasst sind, liegt der grosse Wert eines solchen Berichtes, der allen späteren Forschern auf diesem Gebiete viele Mühe erspart, indem er die richtigen Wege weist. Mit dieser allgemeinen Empfehlung müssen wir uns hier begnügen, weil ein näheres Eingehen auf den Inhalt die Anzeige ungebührlich anschwellen lassen würde.

Lp.

W. Wien. Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik. Arch. Néerl. (2) 5, 96-107.

Die Hertz'sche Mechanik scheint dem Verf. dafür ersonnen zu sein, nicht nur die mechanischen, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen zu umspannen. In Anknüpfung an H. A. Lorentz, der jüngst in einer Abhandlung der Amsterdamer Akademie (31. März 1900) die Gravitation auf elektrische Anziehungen zurückzuführen gesucht hat, aber über den Lorentz'schen Standpunkt hinausgehend, unternimmt der Verf. den Versuch, umgekehrt die elektromognetischen Grundgleichungen

als die allgemeineren zum Ausgangspunkte zu nehmen und aus ihnen die mechanischen zu folgern. Wir entnehmen folgende Sätze dem Schlusse der im bezeichneten Sinne entworfenen Skizze:

„Wir haben auf diese Weise das erste und zweite Bewegungsgesetz erhalten. Denn wenn keine äussere Kraft wirkt, so ist das Trägheitsgesetz einfach das Gesetz der Erhaltung der elektromagnetischen Energie, und das zweite Newton'sche Gesetz sagt hier aus, dass die während dt von der Kraft geleistete Arbeit gleich der entsprechenden Aenderung der elektromagnetischen Energie ist. Das dritte Newton'sche Gesetz, das die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung behauptet, gilt für alle elektrischen Kräfte zwischen elektrostatischen Quanten. Die mechanischen Kräfte müssen von unserem Standpunkte aus mit solchen Kräften identificirt werden. Da wir die Annahme ruhenden Aethers machen, so gilt das Gesetz für die allgemeinen elektromagnetischen Kräfte nicht. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist in unseren Grundlagen insofern enthalten, als er für elektrische Polarisationen und für die zwischen zwei elektrischen Quanten wirkenden Kräfte gilt. Was schliesslich die festen Verbindungen anlangt, die zwischen mehreren elektrischen Massen existiren können, so würde es solche von unserem Standpunkt aus nicht geben. Es können nur Kräfte auftreten, die sich gegenseitig im Gleichgewichte halten.“ Lp.

É. Picard. Une première leçon de dynamique. L'Enseignement math. **2**, 3-13.

Dieser erste Vortrag über Dynamik ist derjenige, den der berühmte Mathematiker in seiner Vorlesung über allgemeine Mechanik an der École centrale hält. Er kehrt besonders den experimentellen und praktischen Standpunkt hervor. Interessant ist die sofortige Einführung und Verwertung des Kraftfeldes. Lp.

W. Jermakow. Die Grundgesetze der Mechanik. Kiew: Univ. Nachr. 1900, No. 5, 1-10; auch sep. (Russisch).

Alle Principien der Wissenschaft haben einen experimentellen Ursprung; nimmt man Kraft oder Masse als Grundbegriffe, so ist dies eine Geschmackssache; aber beide sind apriorische Begriffe. Nur wenn man absolute Masseinheiten einführen will, ist man gezwungen, den einen der beiden Begriffe als abgeleitet zu betrachten.

Die in das D'Alembert'sche Princip eintretenden „Trägheitskräfte“ betrachtet der Verf. als reelle Kräfte. Daher ist auch die Centrifugalkraft eine reelle Aeusserung der Trägheit des Körpers. Desselben Ursprungs sind auch elastische Kräfte u. s. w. Zum Schluss werden die Newton'schen Gesetze in folgender Weise abgeändert:

I. Ein Körper ändert seinen Zustand nicht, wenn auf ihn keine äusseren Kräfte wirken.

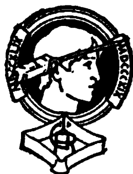
Itl. Jag

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Emil Lampe und **Georg Wallenberg.**

Band 31.
Jahrgang 1900.
(In 3 Heften.)
Heft 3.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Bogen 43 bis 61.

II. Die äussere Kraft ist durch Masse und Beschleunigung bestimmt.

III. In jedem Körper entwickelt sich eine Reaction (Trägheitskraft) gegen die äussere Kraft; diese Gegenwirkung ist der äusseren Kraft gleich, aber entgegen gerichtet.

Daraus folgt: In welchem Zustande ein Körper sein mag, sei es in Ruhe oder in Bewegung (gleichförmig oder veränderlich), immer müssen sich alle auf jeden Punkt des Körpers wirkende Kräfte das Gleichgewicht halten. Ghr.

De Tilly. Sur les trois principes fondamentaux ou axiomes ou hypothèses de la mécanique rationnelle (inertie, indépendance, réaction). Brux. S. sc. **24** B, 214-238.

Der Verf. vervollständigt oder erläutert seine früheren Betrachtungen über diesen Gegenstand. Man vergleiche hierzu die Schriften: „Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique" (Mém. de Bordeaux (2) **3**, 1-190; F. d. M. **11**, 354, 1879). „Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique" (Belg. Bull. (3) **14**, 975-1013; F. d. M. **19**, 873, 1887). Er definirt als ein unbewegliches System dasjenige, in Bezug auf welches ein Punkt, der keiner Einwirkung unterworfen wird, eine gerade Linie beschreibt. Bezüglich dieses Systems gilt das Princip von der Unabhängigkeit der Kraftwirkungen oder die Parallelogrammregel, sowie auch dasjenige von der Gleichheit der Action und der Reaction. Die rationelle Mechanik ist der Teil der physischen Mechanik, in dem man jene drei Principien als wahr annimmt. Die analytische Mechanik lässt nur die beiden ersten zu zur Definition der Kraft und von gleichzeitig einwirkenden Kräften.

Mn. (Lp.)

H. Kleinpeter. Zur Formulirung des Trägheitsgesetzes. Arch. für system. Philos. **6**, 461-469.

Nach kritischer Besprechung der bisherigen Fassungen für das Trägheitsgesetz versucht der Verf. den wahren Inhalt desselben in die Worte zusammenzufassen: „Es ist möglich, ein Coordinatensystem und eine Normalbewegung zu definiren, in Bezug auf welche alle jene Körper sich geradlinig und gleichförmig bewegen, bei welchen eine Abweichung von dieser Norm in eindeutiger und mit unseren sonstigen physikalischen Annahmen übereinstimmender Weise sich nicht definiren lässt." Lp.

B. Gern. Das Gesetz von der Unabhängigkeit der Kraftwirkungen und das Gesetz der relativen Bewegung. Westnik opitnoj fisiki 1900, 197-200. [Beibl. **25**, 97-98.]

„Die relative unter Einwirkung irgend einer Kraft erfolgende Be-

wegung hängt weder vom Zustande der Ruhe oder Bewegung des gesamten Systems, noch von der Wirkung anderer Kräfte auf dasselbe ab."

Lp.

G. Susslopp. Ueber die Bestimmung der Gegenwirkungen. Kiew, Protok. der Phys.-math. Ges. 1900, 1-13. (Russisch.)

In dieser Arbeit spricht der Autor den Gedanken aus, dass es unmöglich sei, experimentell das Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zu beweisen. Er nimmt eine Körpergruppe von bekannten Massen, die auf einander mit Kräften wirken, welche dem erwähnten Gesetze nicht entsprechen, und bemerkt, dass man stets solche beweglichen Coordinatenaxen finden kann, dass die relative Bewegung der Körper in Bezug auf diese Axen dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung genügt. Dazu ist nur erforderlich, dass der Coordinatenanfang immer im Schwerpunkte des Systems liegt, und dass die Coordinatenaxen um diesen Punkt so rotiren, dass das Moment des impulsiven Paares des ganzen Systems (in der betrachteten Configuration) bei dieser Rotation gleich und entgegengesetzt dem Momente des impulsiven Paares für die absolute Bewegung aller Körper ist. Wenn wir die relative Bewegung der Körper in Bezug auf diese beweglichen Axen als absolute Bewegung annehmen, so werden wir behaupten, dass die Körper auf einander mit Kräften wirken, welche dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung genügen. Nun genügen aber, wie am Anfange angenommen war, die Kräfte, welche auf unsere Körpergruppe wirken, diesem Gesetze nicht. Da wir also kein Kriterium zur Beurteilung der absoluten Bewegung haben, so erweckt, nach der Meinung des Autors, jeder experimentelle Beweis des oben genannten Gesetzes Zweifel.

Jk.

A. Broca. Champs de vecteur et champs de force. Action réciproque des masses scalaires et vectorielles. Énergie localisée. C. R. **130**, 109-112.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in F. d. M. **30**, 781, 1899 referirt ist. Zuerst wird die Annahme gemacht, in einem Kräftefeld seien zwei Massen von der Natur derjenigen, welche das Feld erzeugen, einer wechselseitigen Kraft unterworfen, mögen sie scalar oder vectoriell sein. Aus den hierüber angestellten Ueberlegungen wird zuletzt gefolgert: Wenn in einem Vectorfelde eine Transformation von Energie stattfindet, sei es in einem permanenten oder in einem variablen Processe, oder wenn derartige Körper vorhanden sind, die das Feld in dem von ihnen eingenommenen Raume nicht bestehen lassen, so üben die Vaschy'schen scalaren und vectoriellen Massen auf einander und gegenseitig eine mechanische Wirkung von derselben mathematischen Form aus wie die Wirkungen zwischen magnetischen Massen und Elementen eines elektrischen Stromes. Wenn ein solches Feld mit einer endlichen

Fortpflanzungsgeschwindigkeit für eine Störung begabt ist, so rührt seine Entstehung von localisirter Energie her. Lp.

A. Broca. Sur les masses vectorielles de discontinuité. C. R. **130**, 317-319.

In einer vorjährigen Note hatte der Verf. den Satz bewiesen: „Selbst in dem Falle, dass ein Vectorfeld nicht aus einem Potential stammt, ist die einzige Vectorcomponente, die auf einer gegebenen Oberfläche unstetig sein kann, die zu dieser Oberfläche normale Componente, wenn das Feld von einer und derselben Ursache herrührt.“ Wegen eines inzwischen gegen den Beweis erhobenen Einwandes liefert der Verf. jetzt nachträgliche Ausführungen, die er bei der erwähnten Veröffentlichung aus Mangel an Raum hatte weglassen müssen. Lp.

A. Brill. Ueber ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz. Deutsche Math. Ver. 8_1, 200-204.

Während Boltzmann im 7. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Bewegung einer vollkommen elastischen Kugel im Innern einer Hohlkugel durch die Bewegung eines gewissen Stabsystems ersetzt hat, um im Sinne von Hertz mit starren Verbindungen der Massen zu arbeiten, modificirt Brill diese Anordnung derartig, dass er das von Boltzmann gewünschte Bild des elastischen Stosses von zwei Vollkugeln erhält. Im zweiten Teile des Vortrages wird dann aber ausgeführt, dass Hertz kaum Stab- oder sonstige discrete Massensysteme gemeint habe, sondern wohl eine den Raum gleichförmig ausfüllende, in sich selbst verschiebliche Materie, und es wird angedeutet, wie man mit einem solchen raumerfüllenden Zwischenmittel analytisch verfahren kann. In einem Zusatze setzt sich der Verf. mit den Ansichten auseinander, die Boltzmann in seinem Vortrage „Ueber die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in unserer Zeit“ ausgesprochen hat. Lp.

A. Brill. Ueber die Mechanik von Hertz. Böklen Mitt. (2) **2**, 1-16. Vergl. F. d. M. **30**, 610, 1899. Lp.

L. Boltzmann. Ueber die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. Verh. Naturfges. München $\mathbf{71}_1$, 99-122.

Der geistvolle und mit vielem Beifalle aufgenommene Vortrag führt in rascher Folge die Hauptmomente in der Entwickelung der Methoden der theoretischen Physik vor und verweilt insbesondere längere Zeit bei den Hertz'schen Principien der Mechanik. Der Vortragende erklärt

dabei im Eingange: „Ich betrachte es als meine Lebensaufgabe, durch möglichst klare, logisch geordnete Ausarbeitung der Resultate der alten klassischen Theorie dazu beizutragen, dass das viele Gute und für immer Brauchbare, das meiner Ueberzeugung nach darin enthalten ist, nicht einst zum zweiten Male entdeckt werden muss, was nicht der erste Fall dieser Art in der Wissenschaft wäre“ (vergl. S. 55 dieses Bandes). Lp.

Weitere Litteratur.

P. Appell. Traité de mécanique rationnelle. Cours de mécanique de la Faculté des sciences. (En 3 volumes.) Vol. III: Équilibre et mouvement des milieux continus. Fascicule 1. Paris: Gauthier-Villars. 224 S. 8°.

E. Autenrieth. Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Berlin: Springer. XXII + 558 S. 8°.

F. Caldarera. Corso di meccanica razionale. Vol. I. Cinematica. Studio delle forze. Palermo. 329 S. 8°.

Bericht im folgenden Bande. Vi.

J. H. Cotterill. Applied mechanics; elementary general introduction to the theory of structures and machines. 5th edition enlarged. London: Macmillan. 672 S. 8°.

E. H. Hall. Elementary lessons in physics, mechanics (including hydrostatics), and light. New York: Holt. X + 182 S. 12mo.

L. M. Hoskins. Theoretical mechanics; an elementary textbook. Stanford University, Cal. X + 436 S. 8°.

W. Keck. Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. I. Teil: Mechanik starrer Körper. 2. Aufl. Hannover: Helwing. VII + 330 S. gr. 8°.

R. Lauenstein. Die Mechanik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 4. Aufl. Stuttgart: Bergsträsser. VII + 201 S. 8°.

R. Lauenstein. Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 6. Aufl. Stuttgart: Bergsträsser. VI + 251 S. 8°.

W. J. Lineham. Textbook of mechanical engineering. Fourth edition, enlarged. London: Chapman. 1002 S. 12mo.

W. H. Macaulay. The laws of dynamics, and their treatment in textbooks. Math. Gazette 1900, 379-389.

Mascart. Éléments de mécanique, rédigés conformément au programme de l'enseignement scientifique dans les lycées. 7e édition. Paris: Hachette. 200 S. 8°.

G. M. Minchin. The student's dynamics, comprising statics and kinetics. London: Bell. 268 S. 12mo.

ALB. v. OBERMAYER. Leitfaden für den Unterricht in der Physik an der technischen Militär-Akademie mit besonderer Berücksichtigung ausgewählter Kapitel, insbesondere der Mechanik. Wien: W. Braumüller. XXXV + 827 S. gr. 8°.

A. OSTENFELD. Teknisk Statik. Grundlag for Forelaesninger paa Polyteknisk Laereanstalt. Del I. Kjøbenhavn. 500 S 8° und 33 Taf.

H. A. ROBERTS. Treatise in elementary dynamics, dealing with relative motion mainly in two dimensions. London and New York: Macmillan. XI + 258 S. 12mo.

F. ROSENBERG. First stage mechanics of solids. For the elementary examination of the science and art department. Third edition. London: Clive. 320 S. 12mo.

F. SLATE. The principles of mechanics. An elementary exposition for students of physics. Part I. New York: Macmillan. X + 299 S. 12mo.

W. VOIGT. Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig: Veit & Co. X + 578 S. gr. 8°.

B. WILLIAM and F. A. TARLETON. Elementary treatise on dynamics containing applications to thermodynamics, with numerous examples. Third revised and enlarged edition. London and New York: Longmans, Green & Co. XVI + 559 S. 12mo.

Kapitel 2.

Kinematik.

F. REULEAUX. Lehrbuch der Kinematik. Zweiter Band. Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik. Mit 670 eingedruckten Abbildungen und zwei angehängten Tafeln. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. XXVIII + 788 S. 8°.

Genau ein Vierteljahrhundert nach dem Erscheinen der „Theoretischen Kinematik. Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens“ (vergl. F. d. M. **7**, 540-542, 1875) ist das nun als zweiter Band des Lehrbuchs der Kinematik bezeichnete vorliegende Buch erschienen und giebt Zeugnis von der geistigen Frische, mit welcher der Verf., der beim Abschlusse des Werkes das siebzigste Lebensjahr schon überschritten hatte, die Bearbeitung vollendet hat. Der Inhalt zerfällt in drei sehr ungleiche Abschnitte: I. Bewegungsgeometrie oder Phoronomie (S. 1-140). II. Zwanglauflehre oder Kinematik (S. 141-720). III. Kinematik im Tierreich (S. 721 bis 777). — Namen- und Sachregister (778-788).

Das Anregende und Anziehende des Buches liegt darin, dass man überall den schaffenden Geist spürt, der aus einheitlichen, höheren und zusammenfassenden Gesichtspunkten den grossen Stoff ordnet und meistert, der seine Freude an dem Werke hat und seine ihm zuströmenden Gedanken

in eigenartigem Ausdruck mit vielen angemessenen Neubildungen ausspricht. Dass er dabei in der ihm eigenen Erregbarkeit die Streitfragen erörtert, die in dem letzten Jahrzehnt und noch früher zwischen ihm und seinen Gegnern auf der Tagesordnung standen, gehört zwar nicht immer zu der in Rede stehenden Sache, rückt aber das Ganze in eine Beleuchtung, die den Leser vor dem Dahindämmern in dem einschläfernden Grau kühler und langweiliger Sachlichkeit bewahrt.

In diesem Jahrbuche interessirt zunächst am meisten der erste Abschnitt über Bewegungsgeometrie. Die Grundgedanken sind aus früheren Aufsätzen des Verf. bekannt (vergl. F. d. M. **22**, 846, 1890). Der Hauptsache nach wird dieser Abschnitt durch eine Behandlung der Cykloiden ausgefüllt. Obschon hier alles zutrifft, was oben über das ganze Werk gesagt ist, so darf auch nicht verschwiegen werden, dass die Schaffensart des Verf. darin einen Mangel hat, dass die einschlägige Litteratur nicht genügend benutzt ist. Es scheint, dass seine Forschungen sich hauptsächlich auf technische Werke bezogen haben. In rein mathematischen Schriften findet sich manches angegeben, was hier als neu erscheint oder fehlt. Gewisse historische Angaben würden auch ergänzt oder berichtigt worden sein. Nichts destoweniger wird der mathematische Leser an vielen Betrachtungen des gewandten Kinematikers seine Freude haben, und einige geschickt erfundene Benennungen verdienen es, allgemein aufgenommen zu werden.

Den Hauptteil des Werkes bildet natürlich die Zwanglauflehre oder die Kinematik nach der vom Verf. mit Lebhaftigkeit verteidigten Sprechweise. Hier wird die Frage behandelt, wie eine phoronomisch bekannte Relativbewegung zustande kommt. Wir können auf diesen Teil nur wenig eingehen. Die Maschine wird in ihre kinematischen Elemente zerlegt: starre Elemente, Druckelemente, Zugelemente, und da dieselben nur in Paarung vorkommen, so ergeben sich sechs Arten der Elementenpaarung. Zugelemente werden als Tracke, Druckelemente als Flude bezeichnet. Als Begriffsbestimmung der Maschine ergiebt sich (S. 247): Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, dass mittels ihrer mechanische Naturkräfte genötigt werden können, unter bestimmten Bewegungen bestimmte Wirkungen auszuüben. An die „Elementaranalyse“ wird dann die „Bauanalyse“ geknüpft, die zeigen soll, wie mit übermässig geschlossenen Elementenpaaren und kinematischen Ketten feste Bauteile hergestellt werden. Bei der nun folgenden getrieblichen Zerlegung oder „Getriebeanalyse“ werden vier Zwanglaufzwecke unterschieden: Leitung, Haltung, Treibung, Gestaltung, die dann einzeln behandelt werden. Besonders die Treibung erfordert eine weiter gehende systematische Ordnung der zum Treiben geeigneten Mechanismen oder Triebe. Sechs Gattungen: Schrauben-, Kurbel-, Räder-, Rollen-, Curven- und Gesperrtrieb werden als einzige mögliche Triebe nachgewiesen und in ihren Gestalten verfolgt. Die „Gestaltung“ zeigt, dass die kinematischen Grundsätze eine völlig neue Behandlungsweise der mechanischen Technologie empfehlenswert machen.

Der als Studie bezeichnete kurze Abschnitt „Kinematik im Tierreich" wendet sich an die Physiologen, erwähnt aber nicht die neuesten bezüglichen Arbeiten von O. Fischer. Lp.

H. Weiss. Grundsätze der Kinematik. Erstes Heft. Leipzig: Arthur Felix. 256 S. mit Atlas von 10 Tafeln.

Das Werk selbst ist dem Jahrbuche nicht zugegangen. Referent hat nur die Recension in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46**, 491-493, von R. Müller und in Darboux Bull. (2) **25**, 56-60, von J. Tannery gelesen. Hiernach besteht das Heft aus den „Vorbemerkungen" (63 Seiten), welche die Geschichte und die Principien des Gegenstandes enthalten, und nach welchen zwei Hauptteile, die abstracte und die Maschinen-Kinematik unterschieden werden. Das ausgegebene Heft, in welchem die abstracte Kinematik behandelt wird, zerfällt in drei Abschnitte: I. Bewegung des Punktes. II. Bewegung eines starren Körpers oder unveränderlichen Systems im allgemeinen. III. Bewegung des starren ebenen Systems in seiner Ebene. Lp.

Joh. Torka I. Heft. Grundlage der Getriebelehre. Eine Geometrie der Bewegung. Berlin: Rudolf Mewes. 36 S. gr. 8⁰ u. 6 Taf.

Das vorliegende Heft ist das erste aus einer Reihe von fünf Heften, die nach der Ankündigung des Vorwortes die „Systematische Entwickelung der Getriebe (Mechanismen)" bilden sollen. Der Verf., nach dem Inhalte des vorliegenden Heftes offenbar in der Mathematik zum grossen Teile ein Autodidakt, glaubt eine neue Bewegungsgeometrie erfunden zu haben. Ihm ist es offenbar unbekannt geblieben, dass man in der Geometrie schon lange die (m, n)-deutigen Verwandtschaften untersucht und zur Erzeugung geometrischer Gebilde verwendet hat. Auf die Erzeugung solcher Verwandtschaften läuft nämlich die Betrachtung der Schrift hinaus; die Resultate werden analytisch durch den bekannten Differentiationsprocess mit nachfolgender Elimination des variablen Parameters erhalten. Der Mangel an Kenntnissen und an Sorgfalt im Schliessen zeigt sich an vielen Stellen. S. 14 liest man: „Imaginäre Kegelschnitte sind Hüllpunkte oder Centren von Strahlenbüscheln" (d. h. reelle Punkte). Dass ein ganzer Kegelschnitt imaginär sein kann, ist also dem Verf. ebenso wenig geläufig, wie die algebraische Thatsache, dass $(Ax+By+C)^2 + (ax+by+c)^2=0$ nicht der „allgemeinen Kegelschnittsgleichung" entspricht. Lp.

Sir R. St. Ball. A treatise on the theory of screws. Cambridge: University Press. XIX + 544 S. gr. 8⁰.

Seit der Veröffentlichung der Schrift: „The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body" (vergl. F. d. M. **8**, 599-605, 1876) ist der Entwickelung jener Theorie mehr Aufmerksamkeit zu-

gewandt worden, um so grössere, als der Verf. in den Transactions of the Royal Irish Academy mit der Veröffentlichung seiner Beiträge bis in die neueste Zeit fortgefahren hat. In dem gegenwärtigen Bande wird die Darlegung der Theorie nach ihrem heutigen Standpunkte angestrebt. „Der ganze Gegenstand ist durchgesehen und neu geordnet, in weitem Umfange umgeschrieben worden; viele der früheren Teile sind umgestaltet worden mit Verbesserungen, die aus den späteren Untersuchungen stammen, und ich habe es für nötig erachtet, manches einzufügen, was vordem nicht veröffentlicht worden ist.“ Da sowohl die oben angeführte Schrift als auch die Bearbeitung der Ball'schen Veröffentlichungen von Gravelius: „Theoretische Mechanik starrer Systeme“ (F. d. M. **21**, 841-844, 1889) ebenso wie die verschiedenen Abhandlungen des Verf. zur Theorie der Schrauben (im ganzen zwölf, vergl. F. d. M. **29**, 622, 1898) im Jahrbuche ausführlich besprochen sind, so dürfte es jetzt wohl genügen, das Inhaltsverzeichnis hier zu wiederholen: Einleitung (die den Satz von Chasles enthält). I. Windungen und Dynamen. II. Das Cylindroid. III. Reciprocale Schrauben. IV. Schrauben-Coordinaten. V. Die Darstellung des Cylindroids durch einen Kreis. VI. Das Gleichgewicht eines starren Körpers. VII. Die Hauptträgheitsschrauben. VIII. Das Potential. IX. Harmonische Schrauben. X. Freiheit erster Ordnung. XI. Freiheit zweiter Ordnung. XII. Ebene Abbildung dynamischer Probleme betreffs eines Körpers mit zwei Freiheitsstufen. XIII. Die Geometrie des Cylindroids. XIV. Freiheit dritter Ordnung. XV. Die ebene Abbildung der Freiheit dritter Ordnung. XVI. Freiheit vierter Ordnung. XVII. Freiheit fünfter Ordnung. XVIII. Freiheit sechster Ordnung. XIX. Homographische Schraubensysteme. XX. Emananten und Parameterinvarianten. XXI. Entwickelungen der dynamischen Theorie. XXII. Die geometrische Theorie. XXIII. Verschiedene Uebungsbeispiele. XXIV. Die Theorie der Schraubenketten. XXV. Die Theorie der permanenten Schrauben. XXVI. Eine Einleitung in die Theorie der Schrauben im nichteuklidischen Raume. — In einem ersten Nachtrag findet man verschiedene Noten über Sätze in dem Text. Ein zweiter Nachtrag enthält die Adresse an die mathematische und physikalische Section der British Association 1887: „A dynamical parable“ (F. d. M. **19**, 960, 1887). Die Bibliographie auf den Seiten 510-539 ist recht umfänglich. Ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis beschliesst den Band. Gbs. (Lp.)

P. Somoff. **Ueber Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen.** Zeitschrift f. Math. **45**, 245-306.

Schluss der Arbeit, über deren ersten Theil in F. d. M. **28**, 619, 1897, referirt ist. Damals wurde die Untersuchung von Gebieten aller möglichen Schraubenaxen, wie der Richtung, so auch der Lage nach, bei verschiedener Zahl von Stützflächen, die Bestimmung der Bedingungen, bei welchen sich diese Gebiete möglichst zusammenziehen, und endlich

die Bestimmung der kleinsten Zahl von Stützflächen, welche den Körper festlegen können, und der dazu nötigen und hinreichenden Bedingungen ausser Betracht gelassen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen in möglichst allgemeiner Weise beantwortet.

Wir müssen darauf verzichten, in diesem Referate den Gedankengang der Untersuchung wiederzugeben. Um das eine Hauptergebnis derselben verständlich zu machen, schicken wir die Erklärung derjenigen Lage von vier Stütznormalen voraus, welche der Verf. Opposition der letzteren nennt. Die geometrische Bedingung dafür besteht darin, dass auf der Parameterkugel der negative Endpunkt einer jeden Stütznormalenrichtung innerhalb des sphärischen Dreiecks liegen muss, dessen Ecken durch die positiven Endpunkte der anderen drei Normalenrichtungen gebildet werden. Demnach wird der folgende Satz zu verstehen sein (S. 301-302):

Die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung eines starren Körpers möglich ist, ist sieben. Diese Festlegung wird unter folgenden Bedingungen erreicht: 1. Unter den Stütznormalen müssen sich vier solche vorfinden, dass sie eine Opposition bilden. 2. Die drei übrigen Normalen müssen solche Richtungen haben, dass auf der Parameterkugel die negativen Endpunkte ihrer Richtungen im Gebiete eines sphärischen Dreiecks liegen, welches die positiven Endpunkte der Richtungen dreier von den vier ersten Normalen zu seinen Ecken hat. 3. Wenn man vier Determinanten sechsten Grades aus den Coordinaten von Stütznormalen auf solche Weise bildet, dass dort jedesmal die Coordinaten derjenigen drei Normalen sich vorfinden, welche die Ecken des oben genannten Dreiecks bestimmen, so müssen zwei von diesen Determinanten das entgegengesetzte Zeichen von dem der zwei anderen haben.

Alles Gesagte zusammenfassend, findet der Verf. im Schlussparagraphen seiner Arbeit: 1. Wenn vier von den sieben Stützflächen den für die Opposition nötigen Bedingungen genügen, so werden vier oder sechs oder acht Gruppen von vier Stütznormalen in Opposition sein. 2. Im ersten dieser Fälle kann die Festlegung des starren Körpers durch sieben Stützflächen erreicht werden; dann müssen die im obigen Satze gegebenen Bedingungen erfüllt werden. 3. Dieser Fall der Festlegung ist bei sieben Stützflächen der einzig mögliche; in den zwei anderen Fällen können die möglichen Schraubenaxen nicht wirklich verschwinden.

Die kleinste Anzahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung des starren Körpers erreicht werden kann, ist mithin sieben. Lp.

T. J. I'A. Bromwich. The displacement of a given line by a motion on a given screw. Messenger (2) **30**, 41-51.

„Es ist klar, dass das ganze System der Rotationen eines starren Körpers auf einer Schraube eine Gruppe bilden wird, d. h. die Verknüpfung irgend zweier Operationen des Systems wird eine dritte Ope-

ration des Systems ergeben. Ferner ist die Gruppe continuirlich und enthält die identische Transformation, welche den Körper unverschoben belässt; mithin bestimmt die Gruppe eine infinitesimale Transformation und ist selbst bestimmt, wenn die infinitesimale Transformation bekannt ist. Unabhängig von der Gruppentheorie ist es einleuchtend genug, dass jede endliche Bewegung um eine Schraube durch die Ueberlagerung einer unendlichen Folge von infinitesimalen Rotationen um dieselbe Schraube bewirkt werden kann." Der analytischen Durchführung dieser Gedanken bezüglich der Bewegung einer gegebenen Linie auf einer Schraube ist die Arbeit gewidmet. In dem zweiten Teile wird eine Darstellung der bezüglichen Untersuchungen von Lie in der Geometrie der Berührungstransformationen geliefert. Lp.

É. Cotton. Sur quelques mouvements à plusieurs paramètres et sur la théorie des vis principales d'inertie. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 9-20.

Verf. behandelt 1. die Bestimmung solcher Bewegungen mit n Parametern, bei denen das System der instantanen Schrauben in Bezug auf das bewegliche Trieder fest ist; 2. die Bestimmung der Bedingungen, unter denen die Hauptträgheitsschrauben eines starren Körpers in Bezug auf diesen Körper fest sind (Aufgabe von Koenigs in Leçons de cinématique, p. 457). Von den verschiedenen Sätzen diene der folgende als Beispiel: Damit die Hauptträgheitsschrauben in Bezug auf den Körper fest seien, muss die Bewegung mit n Parametern eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen sein. Lp.

Fr. Daniels. Ueber die Derivirte eines Vectors. Zeitschr. für Math. **45**, 203-215.

Resal und nach ihm Somoff haben in ihren Werken über Kinematik eine Productbildung aufgestellt und zur Ableitung von Formeln benutzt, auf deren völlige Uebereinstimmung mit dem inneren Producte Grassmann's Ref. bereits vor längerer Zeit hingewiesen hat. In obiger Arbeit werden nun die Somoff'schen Formeln in vereinfachter Weise mittels zweier „Vectorencombinationen" abgeleitet, von denen die erste richtig als Grassmann's „inneres" Product bezeichnet wird. Uebersetzt man aber (aus der Sprache Hamilton's in diejenige Grassmann's) „Vector" mit „Strecke" und „Tensor" mit „numerischer Wert", so zeigt sich, dass auch die zweite Vectorcombination mit der Bezeichnung $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nichts anderes ist als eine zu den Strecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrechte Strecke, deren Länge gleich dem numerischen Werte des „äusseren" Productes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Die auf obigem Wege gefundene Formel für den zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{B}$ nach der Zeit t wird angewandt, um die Beschleunigungen der absoluten und der relativen Ge-

schwindigkeit eines Körperpunktes P und ihre Beziehung zu einander (auch für Beschleunigungen höherer Ordnung) auszudrücken. Hierbei wird nach einander vorausgesetzt, dass mit einem festen Körper ein rechtwinkliges Axensystem verbunden ist, und dass P einer in einer Ebene beweglichen Figur in fester oder veränderlicher Verbindung angehört. Zum Schluss wird die von P beschriebene Curve und die Bewegung einer mit den beiden beweglichen Axen fest verbundenen Curve untersucht. Schg.

P. Burgatti. Teoria dei sistemi articolati più semplici. Palermo: Rend. **14**, 192-201.

In Bezug auf die Gelenksysteme unterscheidet der Verf. zwei Hauptaufgaben: 1. Die Punkttransformation zu bestimmen, die ein gegebenes Gelenksystem verwirklicht. 2. Wenn eine Punkttransformation mittels der zugehörigen analytischen Formeln oder ihrer charakteristischen geometrischen Eigenschaften gegeben ist, ein Gelenksystem zu bauen, falls dies möglich ist, so dass es jene Transformation verwirklicht. Während die erste Aufgabe durch die bekannten geometrischen Methoden immer lösbar ist, sind die Lösungen der zweiten Aufgabe ohne ein systematisches Verfahren scheinbar zufällig entdeckt worden. Daher hat sich der Verf. in dem vorliegenden Aufsatze das Ziel gesteckt, die bekanntesten und einfachsten Gelenksysteme aus wenigen allgemeinen Principien durch ein leicht anschauliches, sozusagen graphisches Verfahren herzuleiten. Die in dieser Weise vorgeführten Instrumente sind: Translator, Rotator, Pantograph, Inversor. Lp.

A. Krahe. Cuadriláteros esféricos articulados. Progreso mat. (2) **2**, 318-320.

Kinematische Untersuchung sphärischer Gelenkvierecke mit Anwendung auf das cardanische Universalgelenk. Lp.

É. Delassus. Sur les systèmes articulés gauches. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 445-499.

Räumliche gelenkige Verbindungen (Articulations) zerfallen nach dem Freiheitsgrad, den sie den geketteten Körpern gestatten, in drei Gattungen. Articulationen mit einem Freiheitsgrad (einfache) giebt es drei, nämlich die Schraubung und deren Unterfälle, die Drehung und die Gleitung. Articulationen mit zwei Freiheitsgraden (doppelte) giebt es nur eine, nämlich diejenige, die jede beliebige Bewegung um eine Axe gestattet. Articulationen mit drei Freiheitsgraden (dreifache) giebt es wiederum zwei; erstens diejenige, bei der ein Punkt fest, und die jede Bewegung um diesen Punkt gestattet, und zweitens diejenige, bei der eine Ebene fest bleibt und die jede dem entsprechende Bewegung gestattet. Jede dieser Articulationen ist also an einen bestimmten Träger gebunden.

Man denke sich nun einen Körper S, dessen Beweglichkeit in bestimmter Weise beschränkt ist, so dass seine Bewegung von weniger als sechs Parametern abhängt; um ein Beispiel zu geben, so werde die Bewegung durch ein im Körper S festes Coordinatentrieder, resp. durch seinen Anfangspunkt (ξ, η, ζ) und durch die Euler'schen Winkel ϑ, φ, ψ definirt, und es sei $\vartheta = 0$, $\psi = 0$. Von nicht äquivalenten Articulationen, d. h. solchen, die nicht die gleiche Relativbewegung von S gegen den festen Raum S' vermitteln, sind dann noch folgende mit den Bedingungen verträglich: Erstens alle Schraubungen, Drehungen und Schiebungen längs einer zur z-Axe parallelen Geraden; zweitens Articulationen zweiter Ordnung um jede zur z-Axe parallele Gerade, und von Articulationen dritter Ordnung jede, bei der eine zur z-Axe parallele Ebene fest bleibt. Die Aufsuchung aller speciellen Bewegungen dieser Art ist das erste Problem, das der Verf. erledigt.

Das zweite von ihm behandelte Problem enthält eine Verallgemeinerung des vorstehenden. Wird die Bewegung von S durch die Gleichungen

$$\vartheta = 0, \quad \psi = 0, \quad \sigma = F(\xi, \eta)$$

gegeben, so gestattet der Körper ebenfalls noch jede zur z-Axe parallele Gerade als Axe einer Articulation zweiter Ordnung, aber nur so, dass um sie nicht jede beliebige, sondern nur eine gewisse Bewegung möglich ist, die aber im allgemeinen keine Articulation erster Ordnung darstellt. Man kann daher allgemein die Frage nach solchen besonderen Bewegungen stellen, die zwar Articulationen höherer Ordnung zulassen, jedoch so, dass für sie nicht die allgemeinste ihnen entsprechende Bewegung eintreten kann, und diese Frage hat der Verf. ebenfalls eingehend beantwortet.

Zu bemerken ist, dass es sich hierbei stets um endliche und nicht etwa um momentane Bewegungen handelt. Sfs.

E. M. Blake. The ellipsograph of Proclus. American J. **22**, 146-153.

Wird bei der Ellipsographenbewegung der ganze mit jeder der beiden beweglichen Ebenen verbundene Raum ins Auge gefasst, so beschreibt eine beliebige Gerade eine Fläche, und ebenso umhüllt jede Ebene eine Developpable. Die Fläche ist für die directe und umgekehrte Bewegung von der vierten Ordnung. Diese Gebilde werden vom Verf. genauer betrachtet. Sfs.

E. M. Blake. Two plane movements generating quartic scrolls. American M. S. Trans. **1**, 421-429.

Der Verf. betrachtet zwei specielle ebene Bewegungen, die sich als Unterfälle der Dreistabbewegung, resp. der Konchoidenbewegung definiren lassen, und zwar so, dass die Polcurven im ersten Falle Pascal'sche

Schnecken, im zweiten Falle ebenfalls sehr specielle Curven vierter Ordnung sind. Geometrisch sind die Bewegungen durch Constanz gewisser Entfernungen bestimmt. Sfs.

Weitere Litteratur.

Fr. Schilling. Nouveaux modèles cinématiques et introduction nouvelle à la théorie des courbes cycloïdales. Ens math. **2**, 31-48.

Uebersetzt aus dem Deutschen von H. Duaime; vergl. F. d. M. **30**, 620, 1899.

A. Emch. Illustration of the elliptic integral of the first kind by a certain linkwork. Annals of Math. (2) **1**, 81-92.

Bericht auf S. 452 dieses Bandes.

B. Cluzeau. Sur le déplacement d'une figure qui reste semblable à elle-même. Bull. math. spéc. **6**, 69-70.

M. R. Zechlin. Kugel- und Rollenlager; Theorie, Berechnung und praktische Beispiele derselben. Berlin: Seydel. III + 70 S. 8°.

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

St. Jolles. Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens. Zeitschr. für Math. **45**, 1-9.

Bewegt sich über einen gleichmässig belasteten Balken eine Einzellast P, so liegen die Querschnitte, in denen die Maximalmomente auftreten, nur innerhalb einer begrenzten mittleren Strecke. Als Curven der Maximalmomente entsprechen den Angriffspunkten auf der mittleren Strecke eine von P abhängige Parabel, auf den zwei äusseren Strecken aber zwei von P völlig unabhängige congruente Parabeln. Diese werden als die charakteristischen Parabeln der gleichförmigen Belastung bezeichnet und näher untersucht. Sie gestatten eine sehr anschauliche und einfache Darstellung der Maximalbeanspruchungen. Auch in dem weiterhin behandelten Fall, dass sich eine continuirliche (insbesondere gleichförmige) Belastung über den permanent gleichmässig belasteten Balken verschiebt, erweisen sich die Parabeln charakteristisch für die Darstellung der erzeugten Maximalmomente. Hk.

É. Delassus. Sur la méthode de Cremona pour déterminer les tensions dans les systèmes articulés. Toulouse Ann. (2) **2**, 67-70.

Die Existenz eines reciproken Kräfteplans für jedes ein einfaches

Dreiecksnetz bildende Fachwerk und die Regeln für seine Construction werden nachgewiesen, indem von einem einzigen Dreieck ausgegangen und von n auf $n+1$ geschlossen wird. Hk.

F. JASINSKI. Graphische Methode der Berechnung des flachen Fussringes räumlicher Fachwerke. Schweiz. Bauz. 35, 189-192.

Ein aus gelenkig verbundenen Stäben zusammengesetztes Polygon ist bekanntlich geometrisch unbestimmt, da es seine Gestalt unter Kräften, die auf die Polygonecken wirken, verändert. Werden aber die Ecken auf Gleitbahnen geführt, so wird das System geometrisch festgelegt, und es können die Stabspannungen statisch berechnet werden, falls nicht eine gewisse Determinante verschwindet. Verf. giebt auf graphischem Wege die Berechnung der Spannungen und eine Kontrolle für das Nichtverschwinden der Determinante. A. S.

W. RITTER. Die Richtersweiler Holzriese. Schweiz. Bauz. 35, 199-201, 213-215.

Es handelt sich um eine Seilbahn zum Transport von Holzstämmen über ca. 2 km Horizontal- und 200 m Verticalerstreckung. Im theoretischen Teil werden Formeln aus der Theorie der Seillinie in geeigneter Anpassung an die vorliegende Constructionsaufgabe entwickelt.

A. S.

A. S. OESTERREICHER. Graphische Bestimmung des Flächeninhalts von unregelmässigen Figuren. Zeitschr. deutsch. Ing. 44, 155-156.

Es wird empfohlen, zu der zu planimetrirenden y-Curve eine z-Curve hinzu zu construiren, die durch die Gleichung $y dx = z dz$ definirt ist. Die z-Curve lässt sich schrittweise bequem aufzeichnen, unter Zugrundelegung einer endlichen Differenz Δx statt dx, nach der Proportion $\Delta z : \Delta x = y : z$. Dabei wird die Ordinate der y-Curve gleich der Subnormale der z-Curve für die Abscisse x. Der gesuchte Flächeninhalt ergiebt sich aus der Endordinate der z-Curve gleich $\frac{1}{2} z^2$. Die Ungenauigkeit soll im ungünstigsten Falle zwei Procent betragen.

A. S.

C. WASTEELS. Sur la composition des forces Mathesis (2) 10, 220-221.

Der Schwerpunkt eines Vierecks ist der Angriffspunkt der Resultante von vier gleichen, in den Ecken angreifenden Kräften und von einer Kraft gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung, deren Angriffspunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist. Mn. (Lp.).

L. Clariana Ricart. Applicación à la Mecánica de la fórmula de L. Dirichlet. Progreso mat. (2) **2**, 179-185.

Anwendung der Dirichlet'schen Formel:

$$\iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \, dx \, dy \, dz = \frac{a^p b^q c^r \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\alpha\beta\gamma\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)},$$

wenn $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leqq 1$, auf die Lösung einiger Aufgaben über Schwerpunkte und Trägheitsmomente. Lp.

R. Kohlfahl. Winddruck. Zeitschr. deutsch. Ing. **44**, 1201-1208.

Die gewöhnliche Formel für senkrechten Winddruck (Gesamtdruck $P = \frac{1}{8} F v^2$, specif. Druck $p = \frac{1}{8} v^2$) berücksichtigt nicht, dass die Aufstellung und Umgebung der Druckfläche F von Einfluss auf die Druckwirkung ist. Für diesen Einfluss werden (nach Graf Zeppelin) Beispiele von der Helgoländer Steilküste angeführt. Um von dem senkrechten zu einem unter α geneigten Winddruck überzugehen, ist der obigen Formel eine Function $\varphi(\alpha)$ hinzuzufügen; fünf für diese vorgeschlagene verschiedene Formeln werden besprochen und durch Zeichnung und tabellarische Rechnung erläutert. Ferner wird für ein Prisma von polygonal-regelmässiger Basis der Winddruck nach allen fünf Formeln berechnet. Auch wird auf die Saugwirkung an der Rückseite des vom Winde getroffenen Körpers hingewiesen. Nach dem statistischen Material der Hamburger Seewarte wird zum Schluss als häufiger vorkommende grosse Windgeschwindigkeit für Norddeutschland 25, als aussergewöhnliche 35 m/sec. angegeben. Der entsprechende Winddruck beträgt, nach der Formel $p = \frac{1}{8} v^2$ berechnet, 75 bez. 150 kg/m². Diese Zahlen sind wegen der Saugwirkung etwa auf 100 und 200 kg/m² zu erhöhen. A. S.

J. H. Michell. The uniplanar stability of a rigid body. Messenger (2) **30**, 35-40.

Der betrachtete Körper ist als eine starre ebene Scheibe von zwei Dimensionen zu denken, die genötigt ist, in einer gegebenen Ebene zu bleiben. Die einwirkenden Kräfte bilden ein willkürliches System, von dem jedes Glied sowohl in Grösse als auch in Richtung nach irgend einer vorgeschriebenen Art sich ändern kann, wenn die Scheibe sich bewegt, für eine gegebene Lage der Scheibe aber gegeben ist. Die Betrachtungen beziehen sich auf die beiden Fälle, wenn die Scheibe

einen Grad der Freiheit oder zwei Freiheitsgrade besitzt. Die Ergebnisse, welche in Formeln ausgedrückt sind, lassen sich hier nicht kurz wiedergeben. Lp.

V. JAMET. Sur un théorème de statique. Marseille Ann. 8 S. sep.

Beweis des Satzes: Wenn jedes Element der Fläche einer Ellipse E einen Punkt M des Raumes im directen Verhältnisse zum Flächeninhalt und im umgekehrten Verhältnis zum Kubus der Entfernung anzieht, so ist die Resultante der auf diesen Punkt ausgeübten Anziehungen nach der inneren Hauptaxe des Kegels gerichtet, der M zur Spitze, E zur Basis hat. Die Niveauflächen sind daher Ellipsoide, welche die gegebene Ellipse als Focalellipse besitzen. Der Verf. bestimmt auch die Kräftefunction als Doppelintegral und löst zuletzt die Aufgabe: Alle Punkte des Raumes seien solchen Kräften unterworfen, dass in jedem Punkte P einer Niveaufläche die Resultante dieser Kräfte dem Abstande eines festen Punktes von der Tangentialebene an der Oberfläche in P proportional ist; die Gestalt dieser Oberflächen zu bestimmen. Lp.

J. J. WALKER, W. K. CLIFFORD, F. W. EDMONDSON. Solution of questions 6172, 6120. Ed. Times 78, 77-79.

6172 (gestellt von Walker). Die Seiten eines Dreiecks stossen mit einer Kraft ab, die dem Kubus des Abstandes umgekehrt proportional ist. Die von den drei Seiten auf einen Massenpunkt im Centrum C des Inkreises ausgeübten Kräfte lassen sich auf drei andere zurückführen, die senkrecht zu den Seiten und proportional den Winkeln sind, unter welchen die Seiten von C aus erscheinen.

6120 (gestellt von Clifford). Bei gleicher Annahme der Abstossungskräfte die Gleichgewichtslage eines Massenpunktes zu finden und die Aufgabe auf das Tetraeder auszudehnen. — Für das Tetraeder findet Edmondson den Mittelpunkt der Inkugel als Gleichgewichtslage. Die erste Frage betreffs des Dreiecks ist nicht beantwortet. Lp.

J. JUNG. Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie. Zeitschrift f. Math. 45, 229-234.

Elementar-synthetische Behandlung, die mit der von Gretschel im Archiv der Math. und Phys. 43, 121, gegebenen Ableitung zwar einige Berührungspunkte hat, aber viel mehr geometrisch ist und sich im Anfang auf eine Ueberlegung stützt, die derjenigen von Stevin bei der Ermittelung der Gesetze der schiefen Ebene nachgebildet ist. Am Schlusse wird durch Grenzbetrachtungen auch die Gleichung ermittelt. Lp.

Weitere Litteratur.

W. Ritter. Anwendungen der graphischen Statik. Nach C. Culmann bearbeitet. 3. Teil. Der continuirliche Balken. Zürich: A. Raustein. XII + 270 S. und 4 Taf. gr. 8°.

Ch. J. Joly. Astatics and quaternion functions. Dublin Proc. (3) **5,** 366 bis 369 (1899).

Th. Schwartze. Zusammensetzung lebendiger Kräfte. Hoppe Arch. (2) **17,** 333-336.

J. Neuberg. Rapport sur un Mémoire de M. G. Cesàro intitulé: Sur les moments d'inertie des polygones et polyèdres. Belg. Bull. Sciences 1900, 332-336. Mn.

A. Emch. On the projectivity of stresses in a plane. Amer. Math. Monthly **7,** 134-135.

B. Hydrostatik.

S. L. Loney. Elements of hydrostatics. Cambridge: At the University Press. VIII + 248 + XII S. [Nature **68,** 57.]

Loney hat als Verfasser von Lehrbüchern einen guten und angesehenen Namen; in dem vorliegenden Buche beweist er sein bekanntes Geschick in der Darstellung. Jedoch würde es eine Verbesserung bedeuten, wenn die physikalischen Grundlagen des Gegenstandes gelegentlich mehr veranschaulicht würden. Für Studenten, die sich für die üblichen Prüfungen vorbereiten, wird sich das Buch als äusserst brauchbar erweisen. Gbs. (Lp.)

G. Schülen. Das Schwimmen, teilweise von einem neuen Standpunkte aus betrachtet. Hoffmann Z. **31,** 505-511, 589-594.

Der Verf. kennt nur drei Werke, „die tiefer auf das Problem des Schwimmens eingehen“: Duhamel's Mechanik, Kunzeck's Studien aus der höheren Physik, Ritter's Lehrbuch der technischen Mechanik. Da er in diesen Werken über manche Fragen des Schwimmens keine Auskunft gefunden hat, so giebt er in der vorliegenden Arbeit die Ergebnisse eigener Untersuchungen. Dieselben beziehen sich auf die Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Würfels und die Arbeit, welche zu leisten ist, „wenn man einen schwimmenden Körper in eine etwas andere Lage bringen will“. Von der reichen Litteratur über das Gleichgewicht schwimmender Körper und von den ausgebildeten Methoden zur Bestimmung der Stabilität, die ja für den Schiffbau von grundlegender Bedeutung sind, hat also Verf. nichts gesehen; deshalb konnte er nicht wissen, dass die von ihm behandelten Fragen in viel allgemeinerer Weise längst behandelt worden sind. Lp.

G. H. Bryan. The steadying of ships. Nature **62**, 186-188.

Um einen geringen Tiefgang von Schiffen zu erzielen, die in seichten Gewässern benutzt werden sollen, hat man in neuerer Zeit dem Querschnitt eine rechteckige Form gegeben mit abgerundeten unteren Ecken und hat anstatt des unteren Kieles zwei „Bauchkiele" (bilge-keels) an diesen abgerundeten unteren Längskanten angebracht. Die Probe ergab eine bedeutende Verminderung des Rollens bei den so construirten Fahrzeugen. Der Gegenstand der Untersuchung des Verf., von der die Note auszugsweise einige Ergebnisse bringt, während die ausführliche Darstellung den Inhalt eines Vortrages vor der „Institution of Naval Architects" bildete, ist der Nachweis, dass die Wirksamkeit der Bauchkiele bei der Schwächung des Schiffsrollens durch das Mitspielen der Seiten des Schiffes bedeutend erhöht werden kann und in Wirklichkeit bei einem Schiffe von einem Querschnitte vergrössert wird, der sich der Rechtecksform nähert, vorausgesetzt, dass die Bauchkiele an den vorspringenden Ecken des Querschnitts angebracht werden. Die erhöhte Wirksamkeit ist zwei Ursachen zuzuschreiben: 1. Das Schaukeln des Schiffes ruft Strömungen im Wasser hervor, die um die Ecken in entgegengesetzter Richtung der Schiffsschwankung stattfinden; dieselben vergrössern damit den Druck auf die Bauchkiele. 2. Die discontinuirliche Bewegung hinter den Bauchkielen ändert die Verteilung des Druckes gegen die Seiten des Schiffes, und die so erzeugten Unterschiede des Druckes haben ein Moment, das immer auf eine Verzögerung der schwankenden Bewegung abzielt. Die Untersuchungen sind demnach eine interessante Anwendung rein theoretischer Ueberlegungen auf ein äusserst wichtiges praktisches Problem. Lp.

L. E. Bertin. Position d'équilibre des navires sur la houle. Mém. de la Soc. des sc. nat. Cherbourg **31** [(4), **1**], 1-63, 1898-1900.

Der Verf. hat in den Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg wiederholt Artikel veröffentlicht, welche der Theorie der Wasserwogen und der Schiffsmechanik dienen sollen. Wir verweisen auf die Referate über dieselben in den „Fortschritten der Physik" **27**, 115-118, 1871 (Sur la houle et le roulis. **15**, 5-44, 313-355); **29**, 165-167, 1873 (Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis, **17**, 209-352). Beide Referate sind ausführlich gehalten und beschäftigen sich mit den physikalisch interessirenden Thatsachen und Theorien der Schriften in ausreichender Weise. Die dritte Arbeit „Amplitude du roulis sur houle non synchrone" **30**, 1-54, ist in Band **53** [1], 398, nur noch mit dem Titel erwähnt. Die neue Abhandlung ist eine summarische Darstellung der ganzen Frage. „Um zu wissen, wie die Stabilität auf die Amplitude des Schlingerns der Panzerschiffe einwirkt, habe ich zuerst genau untersuchen müssen, welchen Einfluss sie auf ihre Gleichgewichtslage hat. Der so begrenzte Gegenstand ist verhältnismässig einfach und lässt sich mit einer Strenge be-

handeln, die in den übrigen Abschnitten der Schiffsmechanik kaum vorkommt; er ist ausserdem wichtig und verdient eine Aufmerksamkeit, die er früher nicht erlangt hatte." Mit Rücksicht auf die angezogenen Referate, welche der theoretischen Seite der Frage vollkommen gerecht geworden sind, beschränken wir uns hier auf den Hinweis, dass der Verf., „Director der Schiffsconstructionen", die Ergebnisse seiner theoretischen Ueberlegungen praktisch verwertet hat und seine Anwendungen in dem vorliegenden Artikel durch zahlreiche Tabellen und an einer Reihe von Schiffen, die er namentlich aufführt, in reichem Masse erläutert. Lp.

A. Sella. **Sulla forma della superficie libera di un liquido pesante in presenza di un corpo elettrizzato.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_2$, 80-86.

Zunächst wird die in der Ueberschrift ausgesprochene Aufgabe unter der Annahme gelöst, dass die elektrische Masse punktförmig und soweit entfernt ist, dass die Deformation der leitenden Flüssigkeitsoberfläche bei der Bestimmung des elektrischen Feldes vernachlässigt werden kann. Letztere Voraussetzung wird auch für den zweiten Fall einer Kugel von endlichem Radius mit dem Potential E gemacht, indem die Flüssigkeitsoberfläche als Spiegelungsebene aufgefasst, und das Problem auf das schon gelöste zweier Kugeln von gleichem Radius und entgegengesetztem Potential zurückgeführt wird. Rr.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

E. Study. **Die Geometrie der Dynamen.** Deutsche Math. Ver. 8$_1$, 204-216.

Der Inhalt dieses Vortrags deckt sich zum Teil mit dem der Abhandlung: „Eine neue Darstellung der Kräfte der Mechanik durch geometrische Figuren" in Leipz. Ber. **51**, 29-67 (F. d. M. **30**, 613, 1899). Zur Gewinnung eines systematischen Ueberblicks werden die Sätze und Constructionen in Gruppen verteilt: I. Die geometrische Addition der Vectoren. II, a). Die geometrische Addition der Stäbe. II, b). Die geometrische Addition der Quirle. II, c). Die geometrische Addition der Keile. III, 1). Die geometrische Addition der Motoren. III, 2). Die geometrische Addition der Impulsoren. IV. Die stereometrische Addition der Motoren. III, 1*). Die lineare Superposition der Bewegungen. III, 2*). Die correlative Superposition der Bewegungen. IV*. Die stereometrische Superposition der Bewegungen.

„Als Ganzes betrachtet, zeigt unser System geometrischer Sätze eine eigentümliche Structur, die wir durch die Wahl der Zeichen und

durch die vorausgestellten Ziffern kenntlich zu machen gesucht haben. Es werden auf diese Weise die aufgestellten Sätze zunächst auf die vier mit I, II, III, IV bezeichneten Hauptgruppen verteilt; aber auch diese weisen unter einander weitgehende Analogien auf. . . Das Auffallende der besprochenen Erscheinung verschwindet, wenn man das gegenseitige Verhältnis zwischen der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie zweifach und dreifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten eingehend untersucht.“ Lp.

P. Appell. Sur une forme générale des équations de la dynamique. J. für Math. **121**, 310-319.

Die Lagrange'schen Gleichungen sind nicht anwendbar, wenn gewisse Verbindungen durch nicht integrable Differentialrelationen ausgedrückt werden, oder wenn man Parameter einführt, die mit den Coordinaten durch nicht integrable Differentialrelationen verknüpft sind. Diese Schwierigkeit ist der Gegenstand verschiedener Untersuchungen gewesen, worüber der Verf. in der bei Carré und Naud jüngst veröffentlichten, der Sammlung Scientia angehörigen Schrift „Les mouvements de roulement en dynamique“ eine genauere Bibliographie gegeben hat (F. d. M. **30**, 642, 1899). In der gegenwärtigen Abhandlung lehrt Verf. die Bildung einer allgemeinen Form der Bewegungsgleichungen, die nicht den angedeuteten Ausnahmen unterliegen. Hierzu genügt es, die Function $S=\frac{1}{2}\Sigma mJ^2$ zu bilden, in der m die Masse jedes einzelnen der Systempunkte bezeichnet und J die absolute Beschleunigung dieses Punktes; diese Function S ist also aus den Beschleunigungen ebenso gebildet, wie die halbe lebendige Kraft aus den Geschwindigkeiten. Uebrigens ist das Princip dieser Methode vom Verf. bekannt gegeben in C. R. **129**, 317 bis 320, 423-427, 459-460 (vergl. F. d. M. **30**, 641, 1899). Wie aus den Berichten über diese Noten erhellt, liefern die Ableitungen von S nach den Lagrange'schen Parametern die neuen Bewegungsgleichungen. Dies wird an der Herleitung der Gleichung für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt sowie an derjenigen für die Bewegung eines Reifens erläutert. Lp.

P. Appell. Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de Gauss. J. für Math. **122**, 205-208.

Wenn die Verbindungen eines reibungslosen Systems in endlichen Gliedern ausgedrückt werden können, und wenn man Parameter anwendet, die wirkliche Coordinaten sind, so sind die Lagrange'schen Gleichungen anwendbar. Wenn dagegen die Verbindungen sich nicht alle durch Beziehungen zwischen endlichen Gliedern ausdrücken lassen, so kann man nicht mehr die Lagrange'schen Gleichungen benutzen. Zur Hinschreibung der Bewegungsgleichungen genügt die Kenntnis der Kräftefunction U und der Function $S=\frac{1}{2}\Sigma mJ^2$ (vergl. das vorangehende Referat). Um zu

entscheiden, ob es nicht allgemeinere Gleichungen als die Lagrangeschen geben könne, nur abhängig von der halben lebendigen Kraft T und der Kräftefunction U, bildet der Verf. zwei verschiedene Systeme, in denen die Functionen T und U identisch sind, ohne dass die Bewegungsgleichungen übereinstimmen, und schliesst daraus die Unmöglichkeit der Existenz solcher hypothetischen Gleichungen. Der zweite Teil dieses Aufsatzes giebt bibliographische Nachweise zu dem analytischen Ausdrucke des Gauss'schen Princips nach Mitteilungen von A. Mayer in Leipzig. Lp.

P. Appell. Développements sur une forme nouvelle des équations de la dynamique. Journ. de Math. (5) **7**, 5-40.

In dieser Abhandlung giebt der Verf. die Behandlung ausgeführter Beispiele nach der von ihm aufgestellten neuen Form der Differentialgleichungen der Dynamik (vergl. die vorangehenden Berichte). Die beiden Vorzüge dieser Gleichungen bestehen darin, dass dieselben 1. auf alle Arten von Verbindungen anwendbar sind, sogar auf die Verbindungen, welche, wie die Rollbewegungen, durch nicht integrable Differentialrelationen ausgedrückt werden; 2. dass sie sich auch dann noch anwenden lassen, wenn man statt der Definition der Lage eines Systems durch wirkliche Coordinaten Parameter verwendet, die mit den Coordinaten durch nicht integrable Differentialrelationen verknüpft sind.

Nachdem zunächst die neuen Gleichungen nochmals aufgestellt sind und ihr Gebrauch im allgemeinen erläutert ist, werden folgende Aufgaben der Reihe nach behandelt: Ebene Bewegung eines Massenpunktes in Polarcoordinaten. Ein dem Koenig'schen Theoreme analoger Satz. Starrer Körper, der sich parallel zu einer festen Ebene bewegt. Starrer, um einen festen Punkt drehbarer Körper. Die Euler'schen Formeln. Fall, bei dem das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt ein Umdrehungsellipsoid ist. Ein ganz freier Körper. Ein homogener, schwerer Umdrehungskörper, der auf einer festen horizontalen Ebene ohne Reibung gleitet. Ein homogener schwerer Umdrehungskörper, der auf einer festen horizontalen Ebene rollt, ohne zu gleiten. Besondere Fälle. Bemerkung über die Gleichung der lebendigen Kräfte. Lp.

P. Appell. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. Palermo Rend. **14**, 1-6.

D. J. Korteweg. Extrait d'une lettre à M. Appell. Ibid. **14**, 7-8.

Die Integration der Gleichungen des im ersten Titel angegebenen Problems wird auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und nachfolgende Quadraturen gebracht. Durchgeführt wird die Integration für den Fall eines Reifens, wo die Differentialgleichung leicht in die Form derjenigen für die Gauss'sche hyper-

geometrische Reihe übergeführt werden kann. Korteweg, der im Nieuw Archief (2) **4** (F. d. M. **30**, 639, 1899) ebenfalls die Aufgabe für den Reifen auf hypergeometrische Reihen gebracht hatte, berichtigt einen Rechenfehler in einer seiner Formeln und zeigt die Vorteile, welche aus einer von ihm angegebenen Transformation für besondere Fälle sich ergeben. Lp.

A. de Saint-Germain. Sur la fonction S introduite par M. Appell dans les équations de la dynamique. C. R. **130**, 1174.

Für die von Appell eingeführte Function $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$, wo J die absolute Beschleunigung des Massenpunktes m bedeutet, schlägt der Verf. den Namen „Energie der Beschleunigungen" vor und beweist für sie einen Satz, der dem Koenig'schen Satze über die lebendige Kraft analog ist. Er fragt nämlich, welches die Punkte A sind, bei denen die Energie der Beschleunigungen für den Körper gleich der Beschleunigungsenergie einer im Punkte A concentrirten, der Masse des Körpers gleichen Masse ist, wenn man diese Energie um die Energie der Beschleunigungen vermehrt, die der Relativbewegung in Bezug auf Axen von unveränderlichen Richtungen durch den Punkt A entspricht. Der betreffende Ort von A ist ein Ellipsoid, das den Ellipsoiden, auf denen die Beschleunigung eine gegebene Grösse hat, ähnlich und ähnlich liegend ist. Der Schwerpunkt und das Centrum der Beschleunigungen liegen in den Endpunkten eines Durchmessers desselben. Lp.

M. Puglisi. Sulle formole per la composizione di più movimenti finiti. Palermo Rend. **14**, 225-255.

In der Abhandlung: „Formole per la composizione di più movimenti finiti" (Annali di Mat. (2) **26**, 101-112; F. d. M. **29**, 590, 1898) hat Marcolongo einige Sätze ausgesprochen und allgemeine Formeln gegeben betreffs der Zusammensetzung mehrerer Rotationen um Axen, die sich schneiden oder auch nicht, und betreffs der Zusammensetzung mehrerer Schraubenbewegungen. Zwar ist dort die Methode angedeutet, die zur Untersuchung gedient hat; allein die Beweise fehlen im allgemeinen. Da nun die Herleitung mancher Formeln nicht auf der Hand liegt, so giebt der Verf. hier willkommene Ergänzungen zu jener Arbeit, entwickelt unter anderem die Beweise der verschiedenen Sätze und Formeln. Lp.

A. S. Chessin. On relative motion. Amer. M. S. Trans. **1**, 116-169.

Der gegenwärtig vorliegende erste Teil dieser Abhandlung handelt bloss von der Theorie der relativen Bewegung. Die Differentialgleichungen werden aus einem einzigen Grundprincipe hergeleitet, das in dem sogenannten „Theorem von Coriolis" verkörpert ist. Dasselbe er-

möglicht nicht nur das Hinschreiben der Differentialgleichungen für die relative Bewegung unmittelbar nach den entsprechenden Gleichungen für die absolute Bewegung, sondern auch die Gewinnung von ebenso allgemeinen Gleichungen wie die bekannten für die absolute Bewegung (Kap. I und II). Wenn die Kräfte eine Potentialfunction haben, so reduciren sich die Gleichungen des Verf. auf die von Kamerlingh Onnes (vergl. F. d. M. **11**, 658-662, 1879). Wenn ausserdem die Zwangsverbindungen die Zeit nicht explicite enthalten, kommen sie auf die Gleichungen von Bour zurück (Journ. de Math. (2) **8**, 1863). Diese Gleichungen werden später (Kap. X) auf anderem Wege hergeleitet, und dann wird der Zusammenhang zwischen beiden Methoden ermittelt (Kap. XI).

Im III. Kapitel wird der Begriff der Störungen in die Theorie der relativen Bewegung eingeführt, indem die Führungsbewegung der störende Factor ist. Die so erhaltene Störungsfunction ist die Summe dreier Terme, von denen nur zwei von Bour und Kamerlingh Onnes wohl definirt waren, nämlich die Functionen K und L, während die Form und die mechanische Bedeutung des dritten, in dieser Abhandlung mit G_2 bezeichneten Terms unbestimmt, wenn nicht unbekannt blieb. Für die Function G_2 werden mehrere Ausdrücke gegeben, welche offen zeigen, dass ihre Existenz allein den Zwängen des Materials zuzuschreiben ist (Kap. V und VII), und dann wird die mechanische Bedeutung dieser Function aufgestellt (Kap. VIII und IX). Die Kapitel IV und V enthalten einige notwendige Digressionen über Coordinatentransformation. Die Formeln dieser beiden Kapitel gestatten weitere Anwendungen.

Lp.

H. Petrini. **Elementär geometrisk framställning af Coriolis Theorem.** Nyt Tidss. for Math. **10** B, 60-62.

Elementare Darstellung des Coriolis'schen Theorems. V.

H. Petrini. **De allmänna rörelseeqvationerna för en fast kropp i förhållande till rörliga axar.** Nyt Tidsskr. **11** B, 1-6.

A. Voss. **Ueber die Principe von Hamilton und Maupertuis.** Gött. Nachr. 1900, 322-327.

In der Arbeit von Hölder über die Principien von Hamilton und Maupertuis (Gött. Nachr. 1896, 122-157; F. d. M. **27**, 574, 1896) ist der Zusammenhang des Princips der kleinsten Wirkung mit dem Hamilton'schen Principe, sowie die Natur der dabei anzustellenden Variationsbetrachtungen ausführlich dargelegt. Voss kommt jetzt auf diese Arbeit noch einmal zurück, nicht etwa, um für die principielle Frage

etwas Wesentliches hinzuzufügen, sondern um den Gedankengang auf den Fall ganz allgemeiner Coordinaten anzuwenden, weil hierbei einige Ueberlegungen erforderlich sind, die sich in jener Arbeit nicht finden (wo nur Coordinaten benutzt werden, die explicite von der Zeit abhängen). Zu diesem Zweck wird der Hölder'sche Gedankengang in einer etwas anderen Form reproducirt und dann bei Zugrundelegung ganz allgemeiner Coordinaten dargelegt. Lp.

K. Laves. Maupertuis' Princip der kleinsten Wirkung für Kräfte, die ein effectives Potential zulassen. Astron. Nachr. **152**, No. 3647, 361-366.

Unter Voranstellung des Hamilton'schen Princips als einer „Norma suprema et sacrosancta, nullis exceptionibus obvia" ist C. Neumann in seinen „Allgemeinen Untersuchungen über das Newton'sche Princip" etc. (Leipzig, 1896) zur Definition seines effectiven Potentiales gekommen, das ein Eindringen in das Gebiet jener Kräfte gestattet, die ausser den Coordinaten deren erste und zweite Differentialquotienten enthalten. Verf. giebt eine Erweiterung, deren das Princip der kleinsten Wirkung fähig ist, wenn man Kräfte, die ein effectives Potential zulassen, in den Kreis der Betrachtungen zieht. Lp.

S. Tschaplygin. Ueber das Princip des letzten Multiplicators. Mosk. Math. Samml. **21**, 479-490.

Der Autor giebt einen neuen Beweis für das Theorem von Jacobi, indem er von der Identität:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial (D\, Y_i)}{\partial y_i} = D \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

ausgeht, wo $X_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ willkürliche Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind und

$$D = D\left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{y_1, y_2, \dots, y_n}\right),$$

$$Y = X_1 \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_i}{\partial x_n}.$$

Darauf wird die Möglichkeit gezeigt, den letzten integrirenden Factor zu finden, mag auch nur eine Gruppe particularer Integrale des Systems von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = X_i$$

bekannt sein.

Wenn $y_i = 0$ ein solches particulares Integral darstellt, dann kann der integrirende Factor ermittelt werden, falls als Folge der Integrale die Gleichungen:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_1} = 0$$

und ausserdem:

$$\Sigma \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$$

statthaben. Jk.

E. T. Whittaker. On the reduction of the order of the differential equations of a dynamical problem, by use of the integral of energy. Messenger (2) **30**, 93-97.

Sowohl in die Lagrange'sche Form für die Differentialgleichungen der Bewegung eines dynamischen Systems als auch in die Hamilton'sche Function geht die Zeit t nur durch ihr Differential dt ein. Eliminirt man dt, so reducirt sich die Ordnung der Differentialgleichungen um eine Einheit. Durch Benutzung des Integrals der Energie kann man die Ordnung noch einmal um 1 erniedrigen. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung besteht in der wirklichen Ausführung dieser Reduction nach einem Verfahren, bei welchem die Differentialgleichungen des reducirten Systems die Lagrange'sche oder die Hamilton'sche Form behalten. Das Resultat dieser für die beiden genannten Formen getrennt geführten Untersuchung zeigt, wie die Differentialgleichungen eines beliebigen dynamischen Problems mit n Freiheitsgraden, für welches das Integral der Energie gilt, auf eine Gestalt gebracht werden können, in der sie die Differentialgleichungen eines anderen dynamischen Problems mit nur $n-1$ Freiheitsgraden darstellen, für welches das Integral der Energie im allgemeinen nicht besteht. Ausserdem ergiebt sich, dass die zweite Form des Princips der kleinsten Wirkung in dem ursprünglichen Problem der ersten Form des Princips der kleinsten Wirkung in dem reducirten Problem äquivalent ist. Lp.

T. Levi-Civita. Sur l'instabilité de certaines substitutions. C. R. **131**, 103-106.

Man betrachte die reellen Punkttransformationen in zwei Variabeln

$$(1) \begin{cases} x_1 = x + \varphi(x, y) + \cdots, & y_1 = y + \psi(x, y) + \cdots, \\ \varphi = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2, & \psi = b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2, \end{cases}$$

bei welcher der Teil von der ersten Ordnung sich auf die Identität reducirt, die nicht hingesetzten Glieder von höherer Ordnung als 2 sind. Solche Substitutionen sind im allgemeinen instabil, d. h. durch Iterationen:

$$(2) \quad x_n = x_{n-1} + \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \cdots, \quad y_n = y_{n-1} + \psi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \cdots$$

kann man den abbildenden Punkt P_n (dessen Coordinaten x_n, y_n sind) aus einem festen Kreise C um den Ursprung O heraustreten lassen, vorausgesetzt, dass man die Anfangslage P (mit den Coordinaten x, y)

in einem passenden Sector so nahe an O annimmt, wie man will. Dieser Satz dient zur Vorbereitung der Untersuchungen des Verf. über die Instabilität der periodischen Lösungen bei den Differentialgleichungen der Dynamik. Lp.

T. Levi-Civita. Sur l'instabilité de certaines solutions périodiques. C. R. **131**, 170-173.

Die Arbeit bezieht sich auf die periodischen Lösungen gewisser von Poincaré und Liapunow jüngst behandelter Differentialgleichungen der Dynamik bezüglich eines kanonischen Systems mit zwei Freiheitsgraden. Die periodische Lösung in der vom Verf. angegebenen Form hängt von zwei charakteristischen Exponenten Null ab und von zwei anderen α und $-\alpha$. Wenn der reelle Teil von α nicht Null ist, so ist die Lösung instabil. Bei einem rein imaginären α nennt Poincaré die Lösung nach dem Vorgange der Engländer noch stabil. In der vorliegenden Note zeigt der Verf., dass, wenn die Zahl $\alpha/\sqrt{-1}$ mit der mittleren Bewegung $2\pi/T$ commensurabel ist, die Bewegung nicht stabil ist, und spricht die Vermutung aus, dass die Annahme der Stabilität für ein rein imaginäres α daher überhaupt nicht gerechtfertigt sein dürfte. Lp.

P. Stäckel. Ueber die Gestalt der Bahncurven bei einer Klasse dynamischer Probleme. Math. Ann. **54**, 86-90.

Wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen bei einem dynamischen Probleme n beträgt, so füllt eine Bahncurve eines solchen Problems im allgemeinen einen n-fach ausgedehnten Bereich überall dicht, wie der Verf. mit sehr einfachen Mitteln beweist. Die Anfangsrichtungen, welche zu periodischen Bahnen gehören, sind unter der Gesamtheit der Anfangsrichtungen überall dicht verteilt. Lp.

A. Viterbi. Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{9}_1$, 66-70, 97-102.

Die Abhandlung schliesst sich an die Veröffentlichungen von Painlevé an: „Sur les transformations des équations de la dynamique" (Journ. de Math. (4) **10**, 5-92 und C. R. **123**, 392-395; F. d. M. **25**, 1386, 1894 und **27**, 607, 1896).

Der Verf. beweist ein an der zweiten Stelle ausgesprochenes Theorem und gelangt dadurch zur wirklichen Bestimmung aller correspondirenden Systeme zweiter Gattung für ein System dynamischer Gleichungen mit zwei Variabeln. Dabei ergiebt sich auch ein Kriterium betreffs der Correspondenz zweiter Art, welche unter gewissen Bedingungen zwischen zwei Systemen dynamischer Gleichungen solcher Art besteht, dass die quadratischen, ihnen zugehörigen Differentialformen beide mit Hülfe von Vertauschungen der Variabeln auf die Liouville'sche Form zurück-

führbar sind. In der zweiten Note wird die entsprechende Untersuchung für diejenigen Systeme dynamischer Gleichungen mit zwei Variabeln geführt, welche ausser dem Integrale der lebendigen Kräfte noch ein anderes erstes quadratisches Integral besitzen. Lp.

Chr. Hansen. Om Massetilraekning. Nyt Tidsskr. **10** B, 85-90 (1899).

Relative und absolute Bewegung zweier sich anziehenden Massenpunkte. Lp.

N. Saltykoff. Note sur le problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance. Charkow. Ges. (2) **7**, 1-4.

Der Autor giebt die Lösung der Frage nach der Bewegung eines materiellen Punktes bei Anziehung durch zwei Centren mit Hülfe der ersten Methode von Jacobi. Indem er x' und y' aus dem Differentialausdruck $x'dx + y'dy$ mit Hülfe zweier bekannten allgemeinen Integrale des Problems eliminirt, bekommt er ein exactes Differential, dessen Integral die charakteristische Function Jacobi's darstellt. Die Elimination wird mit Hülfe von neuen Veränderlichen λ' und λ'' ausgeführt, indem gesetzt wird:

$$ax = \sqrt{(a^2 - \lambda')(a^2 - \lambda'')}, \quad ay = \sqrt{-\lambda'\lambda''}.$$

Die zwei letzten Integrale des Problems findet der Autor durch Differentiirung dieser charakteristischen Function nach den willkürlichen Constanten. Jk.

P. Painlevé. Sur les intégrales uniformes du problème des n corps. C. R. **130**, 1699-1701.

Als weitere Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Bruns und Poincaré nach der vom Verf. schon früher angegebenen Richtung beweist er jetzt den Satz: Es giebt ausser den klassischen Integralen kein in Bezug auf die Geschwindigkeiten eindeutiges analytisches Integral innerhalb des reellen Gebietes. Lp.

T. Levi-Civita. Sur le problème restreint des trois corps. C. R. **131**, 236-239.

Es seien S, J, P (Sonne, Jupiter, Planet) die drei Körper, ihre Massen $1, \mu, 0$. Die Bewegung finde in einer Ebene statt, die Bahn von J sei ein Kreis. In der Note wird gezeigt, dass unter den Bahnen von P periodische Lösungen dieses beschränkten Dreikörperproblems vorhanden sind, die sich von Kreisbahnen sehr wenig unterscheiden und beim Stattfinden einer angegebenen Bedingung entschieden instabil sind, obgleich sie in der ersten Annäherung stabil scheinen. Lp.

Éd. Collignon. Problème de mécanique. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 40-59.

In einer Verticalebene zieht man zwei rechtwinklige Axen, die eine horizontal, die andere vertical. In dieser Ebene sei eine Curve gezeichnet. Die in dem Punkte M der Curve gezogene Tangente treffe die horizontale Axe OX in R; ein schwerer Punkt gleite ohne Reibung auf MR mit der Anfangsgeschwindigkeit Null von M bis R. Die Zeitdauer T dieser Bewegung wird als eine Function $\varphi(y)$ der Ordinate von M gegeben; die Curve zu finden. — Man findet leicht:

$$(1)\quad ds = \sqrt{\frac{g}{2y}} \cdot \varphi(y)\, dy, \qquad (2)\quad dx = dy \sqrt{\frac{g}{2y}[\varphi(y)]^2 - 1}.$$

Die Integrationen dieser Gleichungen werden für verschiedene Annahmen von $\varphi(y)$ durchgeführt. Ferner wird auch die Aufgabe gelöst, das Minimum von T für einige gegebene Curven zu finden. Lp.

H. Wilda. Die graphische Darstellung der Bewegung auf schiefer Ebene mit Reibung. Poske Z. **18**, 203-205.

M. Puglisi. Sul movimento di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro. Palermo Rend. **14**, 180-191.

Durch die Abhandlung von Otto Staude „Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche" (Acta math. **11**, 303-332; F. d. M. **20**, 937, 1888) ist der Verfasser angeregt worden, die reibungslose Bewegung eines Massenpunktes, der keinen äusseren Kräften unterworfen ist, auf der Oberfläche eines Torus zu untersuchen, und befolgt dabei grossenteils das von Staude für den Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf Umdrehungsflächen vorgezeichnete Verfahren. Der gegenwärtige Aufsatz behandelt also ein neues Beispiel zu den Ueberlegungen, die der Verf. in seinem Artikel angestellt hatte: Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di rivoluzione (Palermo Rend. **12**, 312-321; F. d. M. **29**, 617, 1898).

Lp.

G. A. Maggi. Sulla teoria del pendolo. Batt. G. **38**, 1-6.

Der Verf. zeigt, wie man nach einem kurzen, einheitlichen Verfahren die verschiedenen Fälle des einfachen Pendels behandeln kann. Er bedient sich hierbei der für die drei elliptischen Functionen sn u, cn u, dn u gleichmässig geltenden Relationen $dx/du = ayz$, wo x eine der drei genannten Functionen bezeichnet, y und z die beiden anderen sind, a dem Wert $1, -1, -k^2$ hat, wenn x bezw. sn u, cn u, dn u ist. Nach Ansicht des Verf. tritt in seiner Methode das Band zwischen der oscillirenden und der rotirenden Bewegung klarer hervor. Lp.

R. Pitoni. Isocronismo delle piccole oscillazioni. Boll. di mat. Bologna **1**, 133-136.

A. Schmidt. Zur Theorie des Foucault'schen Pendels. Poske Z. **18**, 206-210.

Unter Bezugnahme auf die Kritik von Rehdans an den üblichen elementaren Methoden zur Herleitung der Foucault'schen Formel (F. d. M. **30**, 653, 1899) und mit Berücksichtigung der bezüglichen Note von Vahlen (F. d. M. **29**, 630, 1898) giebt der Verf. vier verschiedene Schlussweisen für die Betrachtung der Bewegung, die ersten beiden von elementarer Natur, die letzten zwei unter Anwendung der Infinitesimalrechnung. Lp.

Fischer. Die elementare Behandlung des Foucault'schen Pendelversuches. Württ. Correspbl. **7**, 215-222.

F. Körber. Die Ableitung der Formel für das Foucault'sche Pendel. Poske Z. **18**, 73-76.

P. Burgatti. Sul moto di un pendolo verticale, il punto di sospensione del quale è soggetto a movimenti oscillatori e sulla determinazione di questi movimenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{9}_2$, 295-301.

Das vom Verf. behandelte Problem ist, rein mathematisch ausgesprochen, das folgende: Ein mathematisches Pendel von der Länge l hat einen Aufhängepunkt A, der in der horizontal genommenen x-Axe Schwingungen nach dem Gesetze $\xi = a \sin(\pi t/2T)$ ausführt. Die Schwingungen des Pendels zu untersuchen. Die Differentialgleichung für den Winkel α des Pendels mit der Verticale wird leicht gefunden; dieselbe ist von der zweiten Ordnung und wird linear in α mit constanten Coefficienten, wenn man $\sin\alpha$ mit α vertauscht. Aus der bekannten Lösung derselben wird die Gleichung der Curve (S) abgeleitet, welche der Massenpunkt des Pendels beschreibt. Die Discussion der Curve (S) zielt darauf ab, aus der Curve Rückschlüsse auf die Bewegung des Aufhängepunktes A zu ziehen und somit die Betrachtung für seismische Zwecke nutzbar zu machen. „Wenn die Bewegung von A sich durch eine Gleichung von der Form $\xi = a \sin(\pi t/2T)$ mit a und T als Constanten darstellen lässt und in der besprochenen Weise geschieht, so ist die Kenntnis der allerersten Punkte der Curve (S) und des ersten Wendepunktes genügend, um mit grosser Annäherung die Amplitude und Oscillationsdauer von A zu berechnen." Lp.

H. Leutz. Geschichte, Theorie und Anwendungen des Horizontalpendels. II. Teil. Anwendung des Horizontalpendels zur Beobachtung der Bewegungen des Erdbodens. Pr. (No. 667) Realgymn. Karlsruhe. 15 S. 4°.

Vergl. das Referat über den I. Teil in F. d. M. **29**, 630, 1898. Der Inhalt des vorliegenden zweiten Teils fällt als nicht mathematisch ausserhalb des Rahmens des Jahrbuchs. Lp.

J. Collet. Sur la correction topographique des observations pendulaires. C. R. **131**, 654-657, 742-745.

Bemerkungen über die Correctionen in der Nähe von Bergen, die aber keine Rücksicht auf andere bezügliche Arbeiten nehmen. Lp.

A. v. Obermayer. Versuche über das Rollen auf kreisförmiger Bahn. Poske Z. **13**, 264-268.

C. Viola. Ueber den Verticalpendelseismograph. Neues Jahrb. für Min. 1900, **1**, 145-151.

Die Untersuchung der Differentialgleichungen für die Bewegungen eines Verticalpendels von der bei Seismographen gebräuchlichen Form ergiebt dem Verf. folgendes Resultat: Hängen die am Verticalpendelseismographen wahrgenommenen Schwingungen lediglich von der wellenförmigen Bewegung der Erdoberfläche ab, so ist der Seismograph nicht im Stande, weder die Dauer, noch die Richtung und um so weniger den Sinn der erfolgten Erderschütterung anzugeben. Giebt er dagegen die genannten Daten, wie sie bis auf eine gewisse Genauigkeit controllirt werden können, entweder mit Hülfe der Angaben der in anderen Stationen befindlichen Verticalpendelseismographen, oder der in der nämlichen Station vorhandenen, nach anderem Principe gebauten Seismographen, so werden wir zu dem Ergebnisse gezwungen, anzunehmen, dass die durch den Verticalpendelseismographen erhaltenen und zuverlässigen Resultate nicht einer seismischen Wellenbewegung der Erdoberfläche, sondern einer periodischen oder, besser gesagt, schwingenden Abweichung der Verticale ihre Entstehung verdanken." Lp.

E. Lacour. Formules elliptiques pour l'étude des mouvements de Poinsot. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 283-294.

Verf. stellt mit Hülfe der Weierstrass'schen elliptischen Functionen die Formeln für die Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt auf und nimmt mit diesen neuen Bezeichnungen die eine der von Hermite (Sur quelques applications des fonctions elliptiques, S. 35) angegebenen Methoden wieder auf, um aus den Gleichungen der Herpolhodie den Cosinus der Winkel abzuleiten, welche die im Körper befestigt gedachten Axen mit den im Raume festliegenden Axen bilden. Lp.

G. SusslOFF. Pseudoreguläre Präcessionen. Mosk. Phys. Sect. **10**, Lief. 2, 30-35 (Russisch).

Der Autor bietet in verkürzter Form eine Methode der Untersuchung der Kreiselbewegung bei sehr grosser Winkelgeschwindigkeit und zeigt, dass das Ende der Kreiselaxe eine sphärische Cykloide mit sehr kleinen und dichten Wellen beschreibt. Er benutzt die Gleichungen in der Lagrange'schen Form und bekommt für den Nutationswinkel $\varphi_0 + \alpha$ und für den Präcessionswinkel ψ folgende Formeln:

$$\alpha = \frac{AL_0}{C^2 r_0^2} + \left(\alpha_0 - \frac{AL_0}{C^2 r_0^2}\right) \cos \frac{Cr_0 t}{A},$$

$$\psi = \frac{L_0}{Cr_0 \sin \varphi_0}\, t + \left(\alpha_0 - \frac{AL_0}{C^2 r_0^2}\right) \frac{1}{\sin \varphi_0} \sin \frac{Cr_0 t}{A},$$

wo C das Trägheitsmoment des Kreisels in Bezug auf dessen Axe ist, A das Trägheitsmoment des Kreisels in Bezug auf eine perpendiculare Axe, welche durch den unbeweglichen Stützpunkt geht, r_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieaxe des Kreisels, L_0 das Anfangsmoment der Schwerkraft in Bezug auf eine horizontale Axe ist, welche zu der Symmetrieaxe senkrecht steht.

Diese Formeln fallen mit denen zusammen, welche F. Klein und A. Sommerfeld auf Grund ausführlicher Analysen gefunden haben.

Jk.

N. Joukowsky. Analogie zweier mechanischen Probleme. Mosk. Math. Samml. **21**, 542-551.

Unter diesem Titel veröffentlicht der Autor eine Rede, welche er in der Festsitzung der Moskauer Mathematischen Gesellschaft zur Feier der Ausgabe des 21. Bandes der Mathematischen Sammlung gehalten hat. Der Autor erklärt in dieser Rede in populärer Form die Ursache, weshalb jedes Problem über die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ein analoges Problem in der Theorie des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes hat. Sodann zeigt er eine Reihe von Problemen über das Gleichgewicht elastischer Stäbe, welche den bekannten gelösten Problemen über die Bewegung eines starren Körpers analog sind.

Er betrachtet die Pendelbewegung, die Probleme von Poinsot und Lagrange und verschiedene Probleme über die Bewegung der Gyroskope. Auch die Versuche über das Gleichgewicht elastischer Stäbe, welche der Autor während der Rede anstellte, werden beschrieben. Jk.

É. Cotton. Sur quelques mouvements à plusieurs paramètres et sur la théorie des vis principales d'inertie. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 9-20.

Die Abhandlung enthält 1. die Bestimmung der Bewegungen mit n Parametern, bei denen das System der instantanen Schrauben in Bezug auf das bewegliche Dreikant fest ist, 2. die Lösung der von Koenigs

in seinen Leçons de cinématique, p. 457 gestellten Aufgabe: die Bedingungen festzustellen, unter denen die Hauptträgheitsschrauben eines starren Körpers in Bezug auf diesen Körper fest sind. Die mit Hülfe der Gruppentheorie geführte Untersuchung ergiebt, dass die unter 1. gekennzeichneten Bewegungen die Untergruppen der Gruppe der Bewegungen in dem von C. Jordan festgestellten Sinne sind. Hieraus folgt weiter: Wenn das System der instantanen Schrauben im Körper fest ist, so ist es auch im Raume fest. Für die zweite Aufgabe wird ermittelt: Damit die Hauptträgheitsschrauben in Bezug auf den Körper fest sind, muss die Bewegung zu n Parametern eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen sein. Die notwendige Bedingung erweist sich bei näherer Prüfung auch als hinreichend. Lp.

A. de Saint-Germain. **Solution du problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1899.** Nouv. Ann. (3) **19**, 468-475.

Eine homogene schwere und nicht elastische Kugel S von dem Radius ϱ und der Masse m ruht auf einer vollkommen glatten Horizontalebene H und wird in einem Punkte P ihrer Oberfläche durch einen Punkt M vom Gewichte mg mit bekannter horizontaler, an S nicht tangentialer Geschwindigkeit getroffen. Nach dem Stosse vereinigt sich M in P mit der Kugel. Die Bewegung des Systems unmittelbar nach dem Stosse zu finden; anzugeben, in welchen Gebieten P sich befinden muss, damit die Kugel über die Ebene H aufgehoben wird oder nicht. In beiden Fällen den Verlust an lebendiger Kraft zu berechnen. In dem zweiten Falle die weitere Bewegung des Systems zu suchen. Lp.

D. de Francesco. **Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.** Torino Atti **35**, 34-37, 387-399.

Ergänzung der Abhandlung von Heath: „On the dynamics of a rigid body in elliptic space" (Phil. Trans. **175**, 281-324; F. d. M. **16**, 756, 1884). Heath hatte für die Differentialgleichungen der fraglichen Bewegung statt der allgemeinen Lösung, die sechs willkürliche Constanten enthalten muss, eine particulare mit nur vier Constanten gefunden. Verf. vervollständigt im ersten Artikel die Heath'sche Betrachtung durch den Nachweis eines vierten, von seinem Vorgänger nicht bemerkten Integrales, unter Benutzung eines Theorems von Volterra („Sopra una classe di equazioni dinamiche" in Torino Atti **33**, 451-457; F. d. M. **29**, 604, 1898). In dem zweiten Artikel wird das Verfahren von Heath, welches das Problem durch Berechnung der sechs Winkelgeschwindigkeiten nur zur Hälfte löst, weiter noch dadurch vervollständigt, dass der Verf. die sechs Parameter zu bestimmen sucht, welche in jedem Augenblicke die Lage des Körpers festlegen. Die sechs in der ersten Note aus neuen Differentialgleichungen berechneten Integrale sind nicht unabhängig von

einander, kommen vielmehr auf nur vier zurück. Die beiden fehlenden werden in dem zweiten Aufsatze gefunden. Lp.

D. de Francesco. Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Rom. Acc. L. Rend. (5) **9**$_1$, 245-252.

Ergänzung zu den beiden Noten, über welche vorstehend berichtet ist. „Für einen Raum constanter Krümmung von mehr als drei Dimensionen giebt es keine andere Lösung als die von Volterra angegebene (Torino Atti **33**, 558; F. d. M. **29**, 604, 1898), bei der die Charakteristiken durch Reihen von Functionen der Zeit ausgedrückt werden. Für den Fall von drei Dimensionen giebt es ausser dieser Lösung und einer anderen von uns in zwei vorangehenden Noten angegebenen noch eine dritte, welche geraden Weges zu der expliciten Bestimmung der beiden Integrale führt, die im Verein mit den drei erstmaligen quadratischen Integralen von Heath und dem von uns in der ersten der beiden erwähnten Noten angegebenen die Integration der sechs Differentialgleichungen vervollständigen. Diese Lösung besteht in der Bestimmung einer charakteristischen Function des Problems; aus ihr werden neben den sechs auf die Geschwindigkeit bezüglichen Integralen die sechs anderen bezüglich der Lage des Körpers abgeleitet." Lp.

D. de Francesco. Alcuni problemi di meccanica in un spazio a tre dimensioni di curvatura costante. I, II. Napoli Rend. (3) **6**, 15-16, 153-155.

Beide Noten sind Selbstreferate des Verf. über grössere Abhandlungen, die in den Atti derselben Akademie erscheinen sollen. Lp.

H. Lorenz. Dynamik der Kurbelgetriebe. Zeitschr. für Math. **45**, 57-77, 177-202.

Schluss der Abhandlung; vergl. das Referat in F. d. M. **30**, 673, 1899. Der jetzt vorliegende Abschnitt enthält das Kapitel II: Der Energieaustausch. Im § 9 wird die kinetische Energie im Kurbelgetriebe behandelt, zunächst als Function des Kurbelwinkels bestimmt. Für das einfache Schubkurbelgetriebe wird die Berechnung bezüglich der drei Bestandteile: Gleitstück, Schubstange und Kurbel, mit allen lediglich rotirenden Massen durchgeführt. Es ergiebt sich hierbei unter anderem, dass für die kinetische Energie die Möglichkeit einer Teilung der Schubstangenmasse in einen lediglich rotirenden und einen geradlinig bewegten Betrag, wie sie für die Massendrucke gilt, nicht existirt. Verf. kritisirt dieses in manchen üblichen Rechnungsvorschriften gegebene

Verfahren. Die Summe der einzelnen erhaltenen Energien ergiebt dann die gesamte kinetische Energie und dient zur Anwendung auf eine Anzahl praktischer Fälle. Nach diesen Bemerkungen wird die kinetische Energie für ein System von n parallelen Getrieben berechnet.

Die Bewegungen im Kurbelgetriebe haben Veränderungen in der Höhenlage der Schwerpunkte der einzelnen Getriebteile sowie des Gesamtschwerpunktes zur Folge, die sich in der Aufnahme oder Abgabe von Energie durch das Getriebe geltend machen. Um diese Thatsache zum Ausdruck zu bringen, berechnet der Verf. in § 10 die potentielle Energie des Systems in ihrer Abhängkeit von der Kurbelstellung. Aus den erhaltenen Ausdrücken könnte man durch die Annahme der Unveränderlichkeit der potentiellen Energie die Schlick'schen Bedingungen für den Massenausgleich ableiten.

Die Berechnung der Arbeit der treibenden Kraft im § 11 lässt sich nicht mehr aus der augenblicklichen Configuration des Systems ableiten, sondern muss auf solche Diagramme gegründet werden, welche durch den Indicator am Maschinencylinder selbstthätig aufgezeichnet werden. Die Formeln werden in der Gestalt trigonometrischer Reihen gegeben; einzelne Bemerkungen schliessen sich an.

Eine längere Erörterung wird dem auf mehrkurblige Maschinen bezüglichen Satze gewidmet, dass die Arbeiten auf die einzelnen Cylinder der Maschine zu einander in demselben Verhältnis stehen müssen wie die hin- und hergehenden Gewichte für den Fall des Ausgleichs der Massendrucke, falls man ein ganz gleichförmiges Drehkraftdiagramm erhalten will. Dieser schon früher von Fränzel ausgesprochene Satz erweist sich als bedeutungslos für die Drei- und Vierkurbelmaschine. Begnügt man sich mit dem Verschwinden der Glieder mit 2φ in den Reihen, so folgt: Man darf einen möglichst gleichförmigen Verlauf des resultirenden Drehkraftdiagramms dann erwarten, wenn die auf die einzelnen Kurbeln entfallenden Arbeiten sich durch Aneinanderreihen mit den doppelten Kurbelwinkeln zu einem geschlossenen Polygon vereinigen lassen. Nach Anwendung dieses mit seinen Consequenzen vom Verf. schon in einem Vortrage vor der Institution of Naval Architects 1900 entwickelten Satzes geht er in § 12 zur Widerstandsarbeit über, die graphisch als Diagramm der treibenden Kraft mit Rücksicht auf die Reibungswiderstände veranschaulicht wird; die Reibungsarbeit ist dadurch für jede mittlere Winkelgeschwindigkeit unmittelbar aus der Form und dem Inhalte des Indicatordiagramms bestimmt. Danach wird die Bestimmung der Nutzarbeit leicht erledigt. Damit sind die notwendigen Elemente gewonnen zur Bestimmung der Aenderungen der Winkelgeschwindigkeit bei gegebener Widerstandscurve (§ 13), wobei besonders der Ungleichförmigkeitsgrad eine eingehendere Behandlung erfährt. Sowohl die Regeln für die Arbeitsverteilung als die für die Erfüllung des Massenausgleichs sind zur Erzielung eines möglichst gleichförmigen Ganges zu berücksichtigen. Der letzte § 14 endlich behandelt die Aenderungen der Winkelgeschwindigkeit bei einem von ihr abhängigen Nutzwider-

stande. — Bei der grossen Zahl der Formeln (Verf. geht bis zur Nummer 186a) war es durchaus geboten, in diesem Referate ausschliesslich nur den allgemeinen Gedankengang anzudeuten. Lp.

F. Göpel. Die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades rotirender Maschinen durch das Stimmgabelverfahren. Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 1359-1363, 1431-1435.

Verf. hat in der physikalisch-technischen Reichsanstalt ein Verfahren ausgearbeitet, bei dem die Schwingungen einer elektromagnetisch angetriebenen Stimmgabel auf eine an der Stirnseite der Maschinenwelle angebrachte berusste Messingscheibe aufgezeichnet werden. Aus der Anzahl der Stimmgabelschwingungen, die auf einen gewissen Umdrehungswinkel entfallen, ergiebt sich die Geschwindigkeit der Umdrehung in dem betreffenden Winkelraume und hieraus der Ungleichförmigkeitsgrad, der bekanntlich als das Verhältnis: grösste Schwankung der Geschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeit während einer Umdrehung oder (mit Rücksicht auf die Gasmaschine) besser während einer Kraftzuführungsperiode definirt wird. Bei der Berechnung derselben ist es nötig, die langsamen Veränderungen der Geschwindigkeit von den periodisch wiederkehrenden zu trennen und die regelmässigen von den zufälligen. Letzteres geschieht durch Entwickelung der Beobachtungsdaten in eine Fourier'sche Reihe, von der eventuell die Glieder bis zum Dreifachen des Winkelargumentes mitzunehmen sind. A. S.

G. Floquet. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. C. R. **130,** 1745-1748; **131,** 27-30.

Unter gleichem Titel hatte der Verf. in C. R. **115,** 499-502 (F. d. M. **24,** 894, 1892) die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Fadens aufgestellt, bezogen auf ein mit der Curve verbundenes Coordinatensystem, das aus der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale gebildet wird. Von den damals versprochenen Anwendungen werden jetzt einige behandelt. Zunächst wird die Frage erörtert, ob es eine Bewegung giebt, die durch das Gleiten des Fadens längs einer Schraubenlinie sich darstellen lässt, während diese letztere eine geradlinige Translationsbewegung ausführt parallel zu den Erzeugenden des zugehörigen Cylinders. Indem die Componenten der auf die Einheit der Masse des Fadens einwirkenden Kraft als nur von der Geschwindigkeit abhängig angenommen werden, ergiebt sich, dass eine derartige Bewegung auf unendlich viele Arten bestehen kann. Wenn die nach der Hauptnormale gerichtete Componente nicht Null ist, entsteht die Bewegung nur auf einem Cylinder, dessen senkrechter Querschnitt eine logarithmische Spirale ist; wofern dagegen jene Componente Null ist, so ist die Bewegung auf einem Cylinder von beliebigem Querschnitt möglich. In

der zweiten Note wird der Satz bewiesen: Wenn ein Faden sich unter Annahme der Gestalt einer ebenen Curve so bewegt, dass die Geschwindigkeiten seiner Punkte alle zum Faden normal sind, so erzeugt er, wenn keine binormale Kraft auf das Fadenelement einwirkt, stets eine Umdrehungsfläche: seine verschiedenen Lagen fallen mit den Meridianen zusammen, und seine Punkte beschreiben die Parallelkreise mit gleichförmiger Bewegung. An einem besonderen Beispiele ergiebt sich wiederum die Möglichkeit von unendlich vielen solchen Bewegungen.

Lp.

G. Floquet. Sur les équations du mouvement d'un fil en coordonnées quelconques. C. R. **131,** 97-100.

Die Gleichungen für die Bewegung eines Fadens werden zuerst in die Lagrange'schen Variabeln transformirt und mit Hülfe der Function $H = \frac{1}{2} m V^2$ ausgedrückt; danach wird die von Appell eingeführte Function $S = \frac{1}{2} m J^2$ zu gleichem Zwecke benutzt. Endlich werden diese Gleichungen auf die erste Ordnung zurückgeführt; die Form entspricht der kanonischen, hängt jedoch von zwei Functionen Φ, Π der variabeln Parameter ab. Es sind dies folgende Gleichungen ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \dfrac{\partial r_i}{\partial s} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial t} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad \dfrac{\partial q_i}{\partial s} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial r_i}, \end{cases}$$

$$T = \Pi(q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3, t),$$

wo T die Spannung bedeutet.

Lp.

G. Floquet. Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un fil et sur le calcul de sa tension. C. R. **131,** 666-668.

Routh hat in seinem Buche „Advanced rigid dynamics“ Bd. II für manche Fälle eine Differentialgleichung gegeben, die unter besonders angegebenen Bedingungen die Berechnung der Spannungen eines Fadens ermöglicht, der von äusseren bekannten Kräften beansprucht wird. Verf. zeigt, dass man leicht eine Gleichung erhalten kann, die auf alle Fälle passt, in denen der Faden, wenn er keiner allgemeinen Verbindung unterliegt, eine beliebige Bewegung im dreidimensionalen Raume ausführt. Im zweiten Teile der Note wird dann der Fall näher betrachtet, in welchem der Faden sich reibungslos auf einer festen Oberfläche bewegt.

Lp.

J. Jung. Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens. Zeitschr. für Math. **45,** 39-42.

Geometrische Behandlung der Frage nach demjenigen System von

unendlich kleinen Kräften, welche, in den Elementen eines Fadens von beliebiger Curvenform normal angreifend, vermöge der Verbindungen ihrer Angriffspunkte durch den Faden einander stets das Gleichgewicht halten. Das fragliche Kräftesystem ist kein anderes als das der Fliehkräfte.

Lp.

P. Vieille. Sur la loi de la résistance de l'air au mouvement des projectiles. C. R. **130**, 235-238.

Um die Werte der Luftwiderstände, welche man experimentell bei den grossen Geschwindigkeiten der neueren Geschosse erhält, mit den Werten zu vergleichen, welche die Theorie den Unstetigkeiten zuschreibt, durch die dieselben Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entstehen, modificirt der Verf. eine von Riemann und Hugoniot gegebene Formel und gewinnt die folgende:

$$V=\sqrt{\frac{1}{\varrho_0}\cdot\frac{P_0}{2}\left\{2m+(m+1)\,\frac{P_1-P_0}{P_0}\right\}},$$

wo ϱ_0 die Masse der Volumeneinheit des in Ruhe befindlichen Mediums bezeichnet, P_1-P_0 die endliche Differenz der Drucke P, m den Exponenten des statischen adiabatischen Ausdrucks (der hier durch den dynamischen adiabatischen Ausdruck ersetzt wird):

$$P_1=P_0\left(\frac{1+z_0}{1+z_1}\right)^m,$$

z die Dilatation. Die obige Formel liefert Werte des Luftwiderstandes, die mit den neuesten Schiessversuchen bis zu Geschwindigkeiten von 1200 m gut übereinstimmen. Am Schlusse werden aus dieser Formel Zahlenwerte bezüglich des Luftwiderstandes und der Temperatur von Meteorsteinen berechnet.

Lp.

E. Armanini. Sulla superficie di minima resistenza. Annali di Mat. (3) **4**, 131-149.

Verf. ergänzt die Untersuchungen über die Fläche kleinsten Widerstandes in einem Medium, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, nach einigen Richtungen hin. Wir heben folgende Resultate hervor.

Wenn der Winkel der Tangente der Meridiancurve der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes bei einer Bewegungsrichtung, die mit der Axe des Körpers zusammenfällt, 45° nicht übersteigt, so existirt immer eine continuirliche Curve (ohne Treppen, nach dem hergebrachten Ausdrucke), der ein kleinerer Widerstand entspricht, als der bei einer beliebigen Treppencurve ist, die den gemachten Voraussetzungen entspricht. Ist dagegen γ grösser als 45°, so existirt eine gewisse Treppencurve, der ein geringerer Widerstand entspricht als der bei einer beliebigen continuir-

lichen Curve. Dieses Resultat berichtigt eine Behauptung von F. August in seiner bezüglichen Abhandlung (J. für Math. **103**, 1-24; F. d. M. **19**, 954, 1887).

Der Rotationskörper, welchem die kleinste verzögernde Kraft bei einer gegen seine Axe geneigten Bewegungsrichtung entspricht, wenn diese Neigung den Winkel 30° nicht überschreitet und die ganze Seitenfläche desselben den Widerstand erfährt, ist der Körper, welcher die Newton'sche Curve $yy'^3 = a(1+y'^2)^2$ zur Meridiancurve hat, und diese trifft die Stirnfläche unter dem Winkel 45°.

Ist der Widerstand der n-ten Potenz der Geschwindigkeit proportional, und wächst n über 2, so wächst der Winkel α und nimmt der Radius der Stirnfläche ab. Lp.

Lefevre. Forme théorique de l'ogive de moindre résistance d'après Newton. Revue d'Art. **27**, 221-234.

Der Verf. hat die Differentialgleichung der Newton'schen Curve bei Lacroix (Traité du calcul différentiel et intégral **2**, 791, 1814) gefunden und unternimmt, in der Meinung, es sei über diese Curve nichts bekannt, eine Untersuchung der Gestalt, wobei er sich aber in Fehler verwickelt. In Bezug auf die Bedeutung der Curve befindet er sich völlig im Unklaren; er glaubt, dass die Axe, um welche die Curve zur Erzeugung der Fläche kleinsten Widerstandes rotiren muss, nicht bestimmt sei. Lp.

H. Rohne. Der Einfluss der Witterungsverhältnisse auf die Geschossbahn. Kriegstechn. Zeitschr. **8**, 129-138, 201-211.

Bei den verschiedenen meteorologischen Elementen werden die Einflüsse auf die Bahn des Geschosses discutirt, und die erhaltenen Formeln werden auf praktische Beispiele angewandt. Am Schlusse werden die Ergebnisse in der Form von vier allgemeinen Sätzen zusammengefasst. Lp.

E. Gazot. Formule pratique simple de la probabilité d'une erreur (étant donnée sa grandeur en fonction de l'écart probable). Revue d'Art. **57**, 70-73.

Für die Formel

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-h^2 x^2}\, dx,$$

wo $n = \frac{\varepsilon}{E_p}$, $h E_p = 0{,}4769363$, wenn E_p die wahrscheinliche Abweichung bezeichnet, schlägt der Verf. zur leichteren Berechnung die angenäherte Formel vor:

$$P = \sqrt{1 - 0{,}75^{n^2}},$$

woraus folgt:

$$n = \sqrt{\frac{\log(1-P^2)}{\log 0{,}75}}.$$

Lp.

B. Schöffler. Gesetz der zufälligen Abweichungen. Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Theorie des Schiessens. Mitt. über Art. u. Genie **31**, 429-468.

„Das durch das Laplace'sche Integral definirte Gesetz der zufälligen Abweichungen widerspricht bei seiner Anwendung auf die Theorie der Treffwahrscheinlichkeit insofern der Anschauung und Erfahrung, ja selbst der Theorie, als durch dieses Gesetz beliebig grosse positive und negative Abweichungen als praktisch möglich hingestellt werden; beispielsweise können darnach beim Schiessen aus dem 9 cm M. 75 auf die Distanz von 100 Schritten von 1 Million Schüssen mehr als 1,5 Treffer hinter dem Geschütze erwartet werden. Auch ist die Anwendung dieses Gesetzes in vielen Fällen umständlich, daher zeitraubend.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, ein Gesetz der zufälligen Abweichungen aufzustellen, welches mit den angeführten Mängeln nicht behaftet ist, jedoch nahezu zu denselben Resultaten führt wie das Gesetz von Laplace. Die Abhandlung gliedert sich in 3 Abschnitte, und zwar: Abschnitt 1 zeigt, wie man die in die Schusstafeln aufgenommenen Daten über Treffwahrscheinlichkeit auf niederem Wege finden kann. Abschnitt 2 behandelt die Aufstellung des Gesetzes der zufälligen Abweichungen. Abschnitt 3 enthält die Anwendung des aufgestellten Gesetzes auf die Theorie des Schiessens." Der vorliegende Artikel enthält nur die Abschnitte 1 und 2. Lp.

J. Pesseaud. Tables de tir théoriques du canon de campagne allemand de 7,7 cm mod. 96. Revue d'Art. **56**, 416-420.

Nach der kriegstechnischen Zeitschrift 1899, der Rivista di Artiglieria e Genio 1900 und der Revue de l'armée belge 1900 stellt der Verf. eine kleine Schiesstafel für das genannte deutsche Feldgeschütz auf, das hiernach in seinen Leistungen den älteren französischen Geschützen gleichen Zweckes gleichwertig ist. Lp.

R. Edler von Portenschlag-Ledermayr. Graphische Schiesstafeln für Festungsgeschütze. Mitt. über Art. u. Genie **31**, 796-797.

Nach dem Vorgange eines Artikels von G. Ronca: „Note sul tiro" (Rivista marittima 1899) zeigt der Verf. die Entstehung graphischer Schiesstafeln und ihren praktischen Gebrauch. Lp.

V. Aubry. Étude sur la convergence. Revue d'Art. **57**, 31-46.

Wenn zwei Geschütze dasselbe Ziel beschiessen, so ist der wahrscheinliche Fehler der Convergenz zu untersuchen. Dies geschieht vom Verf. zuerst durch ein graphisches Verfahren, danach durch eine genauere analytische Betrachtung. Lp.

Percin. Répartition du feu de l'artillerie. Revue d'Art. **55**, 23-51, 163-177, 233-244, 265-279, 353-374, 451-463; **56**, 5-60.

Diese Reihe von Artikeln, denen schon im 54. Bande der Revue d'Artillerie (1899) vier andere vorangegangen waren, sind im ganzen nur vom militärischen Standpunkt aus interessant, enthalten aber auch einige Abschnitte, in denen die theoretische Ballistik benutzt ist. Lp.

E. Sternad. Die Verwendung goniometrischer Apparate zur indirecten Erteilung der ersten Seitenrichtung bei Geschützen. Mitt. über Art. u. Genie **31**, 169-181.

Der Verf., der sich mehrfach auf die im vorstehenden Referate besprochene Studie von Percin bezieht, behandelt in zwei Abschnitten I. die Methode mit einem Standpunkte, II. die Methode mit zwei Standpunkten. In beiden Fällen wird der Gebrauch der Instrumente gelehrt, und dann werden die Rechenregeln zur Benutzung der beobachteten Zahlen entwickelt. Lp.

---

de Sparre. Sur une application des fonctions elliptiques. S. M. F. Bull. **28**, 52-55.

Bericht auf S. 451 dieses Bandes. Lp.

St. N. Burileanu. Le mouvement des projectiles sphériques. Bull. Bukarest **9**, 301-313.

In dem ersten Teile der Abhandlung gelangt der Verf. durch Schlüsse, die nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse nicht für zwingend erachtet werden können, zu dem Ergebnisse, dass der Luftwiderstand gegen sphärische Geschosse durch die Function

$$F(v) = \alpha v^2 + \beta v^4$$

dargestellt werde, wo α und β zwei Constanten bezeichnen. In dem übrigen Teile der Untersuchung wird dann gezeigt, wie das ballistische Problem unter Zugrundelegung dieses Widerstandsgesetzes in Angriff zu nehmen ist, insbesondere wie die vier nach dem Vorgange von Siacci einzuführenden ballistischen Functionen zu berechnen sind. Die Darstellung dient zur Ergänzung des „Curs de Balistică exterióră“ des Verf., auf den wiederholt verwiesen wird. Lp.

O. Faller. **Eine neue Anschauung über die Reibung. Vorläufige Mitteilung.** München: Th. Ackermann. 16 S. 8°.

„Vortrag, gehalten bei der 71. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in München am 19. September 1899 in der Abteilung für Physik und Meteorologie.“ Der Verf. will die Reibung eines elastischen Körpers auf horizontaler ebener, elastischer Unterlage durch ein dynamisches Modell erklären, nämlich durch einen starren Körper, der auf einer starren schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten wird. Als Beispiel einer Anwendung diene die Stelle: „Bei einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ bis 5 m in der Secunde ist der Reibungscoefficient kleiner als bei relativer Ruhe der beiden Körper, scheint aber nur wenig von der Geschwindigkeit abzuhängen; bei Geschwindigkeiten von 15 bis 25 m in der Secunde nimmt er beträchtlich ab.“ Denn „wächst die Geschwindigkeit allmählich an, so kommt es bald dahin, dass der Körper in jeder neuen Lage nicht mehr die Zeit t_0 zum Einsinken besitzt“. Lp.

N. Petroff. **Frottement dans les machines.** Mém. de St. Pétersb. (8) **10**, No. 4, 84 S. Fol.

Um zunächst eine Uebersicht über den Inhalt dieser umfangreichen Arbeit zu geben, bringen wir die Ueberschriften der Paragraphen zum Abdruck. § 1. Vorhandene Theorien der Reibung in den Maschinen und ihre Mängel. § 2. Elemente, welche auf die Reibung gut geschmierter fester Körper Einfluss haben, und Grad des Einflusses. § 3. Grundgleichungen der hydrodynamischen Theorie der Reibung in den Teilen gut geschmierter Maschinen. § 4. Anwendung der Grundgleichungen auf die zwischen dem Zapfen und dem Lager enthaltene Flüssigkeitsschicht. § 5. Bestimmung der Reibungskräfte durch Formeln, die keinen Differentialausdruck enthalten. § 6. Angenäherte Bestimmung des hydrodynamischen Druckes. § 7. Bestimmung der Formeln mit den Ausdrücken für die Coefficienten $A_{1,0}, A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{2,0}, A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{3,0}, A_{3,1}, A_{3,2}, \ldots, B_{1,0}, B_{1,1}, B_{1,2}, \ldots, B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}, \ldots, B_{3,0}, B_{3,1}, B_{3,2}, \ldots$. § 8. Integration der Differentialgleichungen, welche die hydrodynamischen Drucke ausdrücken. § 9. Integration der Gleichgewichtsbedingungen des Lagers. § 10. Einfluss der äusseren Reibung der Flüssigkeit mit dem Lager und dem Zapfen. § 11. Anwendung der dargestellten Theorie in dem Falle eines cylindrischen continuirlichen Lagers ohne Ritzen. § 12. Anwendung der Theorie auf meine Versuche. § 13. Anwendung der Gleichungen (41), (43) und (45) auf den geprüften Fall. § 14. Bestimmung der Coefficienten A_i und B_i für $c = 0$, $c = 0{,}1$, $c = 0{,}2$, $c = 0{,}3$, $c = 0{,}4$, $c = 0{,}5$ und $c = 0{,}6$. § 15. Bestimmung des Winkels Φ_0 und der Grössen X_1 und X_3. § 16. Bestimmung der Grösse a und aller anderen Grössen. § 17. Genauigkeit der in den Tabellen IX-XXII angegebenen Grössen. § 18. Die hydrodynamischen Drucke in den verschiedenen Punkten der Flüssigkeitsschicht. § 19. Die hauptsächlichen Folgerungen, gezogen aus den auf

meine Versuche bezüglichen Rechnungen. § 20. Der Fehler in den Rechnungen von Osborne Reynolds. § 21. Ohne Ueberschrift; betrifft einige Punkte der Arbeit von Masi: „Esperienze d'attrito", Bologna 1897.

Gegenüber der Reichhaltigkeit und Vielgestaltigkeit des Inhaltes befindet sich Ref. in einiger Verlegenheit, zu entscheiden, was hier näher besprochen werden kann. Die vom Verf. vorgeschlagene Theorie der Reibung ist zuerst 1883 bekannt geworden; eine Uebersetzung dieser Arbeit von L. Wurzel erschien 1887. In dem letzteren Jahre wurde eine zweite Schrift von Petroff veröffentlicht und in F. d. M. **19**, 1025 kurz angezeigt. Inzwischen war die Abhandlung von Osborne Reynolds in Phil. Trans. **117**, 157 ff. „On the theory of lubrication etc." geschrieben (vergl. F. d. M. **18**, 946, 1886), und in jüngster Zeit hat Masi in zwei Schriften dasselbe Thema bearbeitet. Da somit das Wesen der hydrodynamischen Theorie der Reibung als bekannt vorausgesetzt werden kann, so beschränken wir uns auf die Wiedergabe derjenigen Stellen in § 2, welche die Zielpunkte der Untersuchung des Verf. kennzeichnen.

Die vom Verf. vorgeschlagene Theorie, die durch seine Versuche und die von F. Masi Bestätigung gefunden hat, zeigt klar den Einfluss der relativen Geschwindigkeit bei der Bewegung der geschmierten Körper und der inneren Reibung der Schmierflüssigkeit. Seine Versuche haben auch auf genügende Weise den Einfluss der Temperatur der Schmierschicht, sowie auch den der umgebenden Luft gezeigt. In der Theorie von Osborne Reynolds tritt der Einfluss dieser Elemente unter derselben Form auf. Der Einfluss der Ausdehnung der geschmierten Fläche, welche mit dem Lager zur Reibung kommt, ist in der Reynolds'schen Theorie etwas weniger einfach als in der Petroff'schen; aber in den Hauptzügen drücken die beiden Theorien diesen Einfluss auf gleiche Weise aus. Ebenso wird der Einfluss der Dicke der Schicht auf identische Weise ausgedrückt; die Abhängigkeit jedoch, welche hinsichtlich der Dicke der Schicht gegenüber dem Drucke besteht, wird abweichend dargestellt. In der Petroff'schen Theorie wird diese Abhängigkeit durch eine Formel ausgedrückt, die sich auf die Versuche von Hirn und von anderen Experimentatoren gründet; diese Formel zeigt, dass die Dicke der Schicht umgekehrt proportional ist der Quadratwurzel aus dem mittleren Drucke der Flüssigkeit auf die Einheit der Reibungsfläche. Die fragliche Abhängigkeit wird durch die Versuche des Verf. und durch die von Masi bestätigt. Nach Reynolds bestimmt sich die Abhängigkeit der Dicke der Schicht gegenüber dem Drucke mit Hülfe einer der Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes der an einem unbeweglichen Lager angebrachten Kräfte ausdrücken.

Der Einfluss der äusseren Reibungen der Flüssigkeitsschicht an den Oberflächen, die sie schmiert, ist in der Theorie des Verf. angegeben, nicht aber in der von Reynolds; durch Versuche ist er überhaupt noch nicht bestätigt worden. Endlich zeigt die Reynolds'sche Theorie den sehr fühlbaren Einfluss der relativen Lage der Axen von Lager und Zapfen. Die Formeln, die diesen Einfluss mit Hülfe von Grössen ausdrücken, welche die relative Lage der besagten Axen bestimmen, sind

so verwickelt und eignen sich so wenig für die zu einem durchsichtigen Verständnisse des fraglichen Einflusses nötigen Vereinfachungen, dass das einzige Mittel zur genügenden Aufhellung der Frage in dem gleichzeitigen Gebrauche der Theorie und der Versuche erblickt werden muss. Osborne Reynolds hat diese Vergleichung unternommen; in seine Rechnungen haben sich jedoch derartige Fehler eingeschlichen, dass dadurch der Nutzen seiner Arbeit verloren gegangen ist. Hiernach ist in der hydrodynamischen Theorie der Reibung eine so bedeutende Lücke verblieben, dass der Verf. es für nützlich erachtet hat, dieselbe auszufüllen. Nun aber war es zum Vergleiche der Theorie und der von ihm angestellten Versuche notwendig, zuerst Formeln zu haben, die für die Bedingungen des Experimentes passten; deshalb musste zur Bestimmung dieser Formeln geschritten werden. Hierbei wurden dann auch die Experimente von Masi berücksichtigt. Das vorgeschlagene Mittel ist auch in den Fällen leicht anwendbar, in denen die Zahl der einzelnen Teile der beiden Cylinderflächen nicht bloss 3 ist, sondern so gross man will, falls jeder der cylindrischen Teile von zwei geradlinigen Erzeugenden begrenzt ist; die Anwendung ist auch noch in dem Falle möglich, wenn das Lager die Form eines continuirlichen cylindrischen Ringes hat.

Lp.

Otto Fischer. Der Gang des Menschen. III. Teil: Betrachtungen über die weiteren Ziele der Untersuchung und Ueberblick über die Bewegungen der unteren Extremitäten. Leipz. Abhandl. **26**, No. III, 87-170.

Die Berichte über den zweiten Teil der Arbeit findet man in F. d. M. **30**, 677, 1899. Wir schliessen das Referat über den gegenwärtigen Teil an den „Rückblick“, den der Verf. S. 168-170 giebt, an.

Um dem Endziel näher zu kommen, nämlich die Rolle aufzudecken, welche den einzelnen Muskeln bei der Hervorbringung der Bewegungen des Gehens zugeteilt ist, muss man zuerst eine eingehende Kenntnis des wechselnden Bewegungszustandes des menschlichen Körpers für den ganzen Verlauf eines Doppelschrittes zu gewinnen versuchen. Dann erst kann man hoffen, das Ziel mit Hülfe der Differentialgleichungen der Bewegung zu erreichen.

Nach dem ersten Abschnitte der Arbeit lassen die Bewegungsgleichungen des menschlichen Körpers, obgleich sie an sich sehr verwickelt sind, eine für die weitere Untersuchung sehr wertvolle und verhältnismässig einfache Integration zu, welche nicht nur volles Licht auf die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Körperteile in ihren Bewegungen wirft, sondern auch vor allen Dingen gestattet, die Gleichungen selbst im gegebenen Falle ohne Mühe hinzuschreiben. Die übrigen Abschnitte liefern einen weiteren Beitrag zur Kenntnis der beim Gange des Menschen befolgten Bewegungsgesetze, indem sie sich mit der Bewegung der unteren Extremitäten beschäftigen.

Während im I. Teil der Arbeit die Bahncurven der verschiedenen

Gelenkmittelpunkte und einiger anderer für das Gehen wichtiger Punkte des menschlichen Körpers und im II. Teil die Bahn des Gesamtschwerpunktes mit den zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abgeleitet worden sind, giebt der vorliegende III. Teil einen Ueberblick über das Verhalten der unteren Extremitäten im Verlauf eines Doppelschritts. Es finden sich zunächst sowohl die Drehungen abgeleitet, welche die drei Abschnitte der Beine in der Projection des ganzen Bewegungsvorganges auf die Gangebene ausführen, als auch die damit im Zusammenhange stehenden gleichzeitigen Bewegungen in den Knie- und Fussgelenken.

Ein Vergleich der gewonnenen Resultate, der dann ausgeführt ist, mit der Darstellung der successiven Stellungen der Beine, welche die Gebrüder Weber in ihrer Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge gegeben haben, zeigt, dass die Weber'schen Anschauungen sich Angesichts der durch die Momentphotographie aufgedeckten Thatsachen nicht mehr halten lassen. Insbesondere ergiebt sich, dass die drei Principien, welche für die beiden Forscher die Grundlage in ihrer Theorie des Gehens abgegeben haben: das Princip der anfänglichen Stellung, das Princip des Masses der Anstrengung und das Princip der Richtung der Streckung, auch nicht annähernd erfüllt sind. Alle drei Grundprincipien entsprechen dem idealen Falle einer geradlinigen horizontalen Bewegung des Gesamtschwerpunktes mit constanter Geschwindigkeit, während der Schwerpunkt in Wirklichkeit eine doppelt gekrümmte Bahn mit teils beschleunigter, teils verzögerter Bewegung durchläuft. Trotzdem bleibt die Weber'sche Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge (Wilh. Weber's Ges. Werke, Bd. **6**, 1894) für alle Zeiten ein klassisches Werk, welches den Anfang einer exacten Forschung auf dem Gebiete der Bewegungsphysiologie bildet.

Für die Ableitung der Winkelgeschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit denen die einzelnen Abschnitte der Beine im Raume ihre Richtung ändern, muss man die genauen Werte von Winkelcoordinaten kennen, durch welche die Stellung eines jeden Körperteils im Raume eindeutig bestimmt ist. Hierzu reicht infolge des Zusammenhanges der einzelnen Glieder die Angabe zweier Winkel für jeden Körperteil aus. In der Arbeit finden sich nun für alle durch die Photographie fixirten Bewegungsphasen der drei Versuche die Werte der Winkel berechnet, welche die Projectionen der Längsaxen der einzelnen Abschnitte der Beine auf die Gangebene und die zur Gangrichtung senkrechte Ebene mit der nach unten gerichteten Verticale bilden. Ferner sind auch die Werte der Gelenkwinkel sowohl für das Kniegelenk wie für das I. Fussgelenk, d. h. also der Winkel, welche in den einzelnen Bewegungsphasen die Längsaxe der distalen mit der Verlängerung der Längsaxe des proximalen der beiden durch das betreffende Gelenk verbundenen Glieder im Raume bildet, berechnet worden. Lp.

R. E. Crompton and C. Crompton. The fitting of the cycle to its rider. Nature **61**, 87-91, 391.

D. E. Hutchins. The fitting of the cycle to the rider. Nature 61, 368.

Wm. H. Massey. The fitting of the cycle to the rider. Nature 61, 391-392.

Von technischem und physiologischem Interesse. Der erste Aufsatz giebt den Inhalt eines Vortrages, in welchem auf der Basis gründlicher Versuche die Frage behandelt wurde, wie gross der Verbrauch an Gehirn, Nerven und Muskeln bei Abänderung der Abmessungen eines Zweirades sei. Lp.

J. Bartl. Die Berechnung der Centrifugalregulatoren. Leipzig: A. Felix. VIII + 88 S. gr. 8°.

B. Hydrodynamik.

W. Wien. Lehrbuch der Hydrodynamik. Mit 18 Figuren. Leipzig: S. Hirzel. XIV u. 319 S. gr. 8°.

Während die Engländer, die sich in den letzten Jahrzehnten mit grossem Eifer und vielem Erfolge der Lösung hydrodynamischer Probleme zugewandt haben, die beiden zusammenfassenden Werke von Lamb und von Basset über Hydrodynamik besitzen, mangelte es bis jetzt in Deutschland an einem selbständigen Werke über diesen Gegenstand. Aus diesem Grunde hat W. Wien das vorliegende Lehrbuch veröffentlicht. Zugleich möchte er hierdurch die deutschen Mathematiker und Physiker veranlassen, den vielen auf diesem Felde der Lösung harrenden Problemen eine erhöhte Thätigkeit zuzuwenden und damit die Untersuchungen wieder zu pflegen, die gerade in Deutschland zuerst angegriffen, nachher aber etwas vernachlässigt worden sind.

In acht Abschnitten werden der Reihe nach behandelt: die Grundlagen, allgemeine Bewegungen nicht reibender Flüssigkeiten, Strömungen ohne Drehung der Flüssigkeitsteilchen, Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Theorie der Wellen, Ebbe und Flut, Reibung der Flüssigkeiten, Gleichgewicht rotirender flüssiger Massen. Gegenüber dem an sich nicht gerade bedeutenden Umfange des Buches ist der abgehandelte Stoff recht reichlich bemessen. Die Absicht, eine Uebersicht über den gegenwärtigen Stand der Hydrodynamik dadurch zu geben, dass aus allen ihren Gebieten eine Anzahl der Ergebnisse, namentlich auch neuerer Forschungen vorgeführt wird, ist jedenfalls aufs beste erreicht. Auch darin ist dem Verf. beizupflichten, dass das Hauptgewicht auf specielle Probleme gelegt ist; denn gerade die Einsicht in die zur Bewältigung derselben eingeschlagenen Wege und in die dabei benutzten analytischen Hülfsmittel ist es, aus der weitere Fortschritte zu erhoffen sind. Die Darstellung ist zwar knapp, etwa in Anlehnung an die Vorlesungen von Kirchhoff, dürfte aber dem Verständnisse beim Studium keine ernstlichen Schwierigkeiten bieten.

Die am Schlusse der Abschnitte hinzugefügten Litteraturangaben, welche in zweckmässiger Weise auf die wichtigeren Originalarbeiten hinweisen, machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Bei aller Berücksichtigung dieser vorausgeschickten Entschuldigung will es dem Ref. dennoch scheinen, als ob gerade die Arbeiten der letzten Jahre zu wenig beachtet wären und die englische Litteratur eine Bevorzugung erfahren hätte. Bei einer neuen Auflage des nützlichen Werkes würde eine Ergänzung der Citate seine Brauchbarkeit für Anfänger, die der Anleitung zur Auffindung der bezüglichen Originalarbeiten bedürfen, zweifelsohne bedeutend erhöhen. Endlich wäre es auch sehr löblich, wenn der Verf. den von ihm so gut gekannten und mit Recht geschätzten englischen Autoren sich darin anschliessen wollte, dass er, wie dies bei den Briten üblich ist, ein alphabetisches Sachregister und Personenverzeichnis hinzufügte. Lp.

V. Bjerknes. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Band I. Mit 40 Figuren im Text. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. XVI u. 338 S. gr. 8°.

Gegenstand der Vorlesungen ist die Bewegung eines Systems von pulsirenden und oscillirenden Kugeln in einer incompressibeln, reibungslosen Flüssigkeit und die durch den Flüssigkeitsdruck entstehenden scheinbaren Fernkräfte zwischen diesen Kugeln.

Die Untersuchung zerfällt naturgemäss in einen kinematischen und einen dynamischen Teil. Ersterer beschäftigt sich mit der Integration der für das Geschwindigkeitspotential einer incompressibeln, wirbellosen Flüssigkeit geltenden partiellen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ unter den durch den Bewegungszustand der Kugeln gegebenen Grenzbedingungen. Da zur nachfolgenden Bestimmung der Druckkräfte auf die Kugeln nur das Potential φ an der Oberfläche derselben bekannt sein muss, ist es nur nötig, das Geschwindigkeitspotential in der Umgebung jeder Kugel bis zu einer gewissen Annäherung mit Hülfe von Reihen, die nach räumlichen Kugelfunctionen fortschreiten, zu entwickeln.

Zu dem Zweck wird das Potential φ in der Umgebung der g-ten Kugel in der Form dargestellt:

$$\varphi = \varphi_g + (\varphi_\gamma + \varphi_{\gamma g}),$$

wo φ_g das Potential einer pulsirenden und oscillirenden Kugel ist, die sich allein in einer ruhenden, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit befindet. Es ist:

$$\varphi_g = -\frac{d^2}{r}\dot{d} - \frac{1}{2}\frac{d^3}{r^3}\{\dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c)\},$$

wo d den Kugelradius, r die Entfernung des Punktes mit den Coordinaten x, y, z vom Kugelmittelpunkt und a, b, c dessen Coordinaten bedeuten; φ_γ ferner ist das Potential der von den andern Kugeln herrührenden Einfallströme, welches nach einer in räumlichen Kugelfunctionen positiven Grades fortschreitenden Reihe in der Umgebung der betrachteten Kugel

entwickelt wird. Ebenso wird das Reactionspotential $\varphi_{\gamma g}$, d. h. das Potential der Veränderung des Einfallstromes durch das Vorhandensein der Kugel, durch die den ersten entsprechenden räumlichen Kugelfunctionen ausgedrückt. Die Aufgaben des Buches verlangen jedoch nur das Fortschreiten der Reihe bis zum zweiten Grade, d. h. die Zusammensetzung eines beliebigen Einfallstromes aus einem Translations- und einem Deformationsstrom.

Der dynamische Teil der Aufgabe kann nun auf zweierlei Weise erledigt werden.

Entweder benutzt man das bekannte für eine incompressible, wirbellose Flüssigkeit geltende erste Integral der Bewegungsgleichungen:

$$p = P - q\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}q\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\},$$

wo q die Dichte der Flüssigkeit, und summirt die auf die Oberfläche einer Kugel wirkenden Elementardrucke zu einer im Mittelpunkte derselben angreifenden Resultante, wobei im vorliegenden Falle die Eigenschaften der Kugelflächenfunctionen benutzt werden, oder man stellt die kinetische Energie T des gesamten Systems als Function der Parameter a, b, c, d und ihrer Aenderungsgeschwindigkeiten dar und wendet auf diese Form von T die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen der zweiten Form an, von denen z. B. die auf die Mittelpunktscoordinate a_g der g-ten Kugel bezügliche lautet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_g}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_g} = X_g.$$

Beide Methoden ergeben übereinstimmend bei dem gewählten Grade der Annäherung von φ die folgenden Grundgleichungen für die Kugelkräfte:

$$X = -q\frac{d}{dt}\{E(\tfrac{1}{2}\dot{a} - \tfrac{3}{2}\dot{\alpha})\} - q\dot{\alpha}\dot{E} - q\{\dot{\alpha}_\alpha \dot{F} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H}\}$$

und die entsprechenden für Y und Z.

Hierin bedeuten:

$E = \frac{4}{3}\pi d^3$ das Volumen der Kugel; $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ die Componenten der Geschwindigkeit des Einfallstromes, welche als die ersten Differentialquotienten des Einfallpotentials erscheinen;

$\dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta$ u. s. w. die sogenannten deformativen Geschwindigkeiten des Einfallstromes, welche als die zweiten Differentialquotienten des Einfallpotentials, genommen an der Kugeloberfläche, erscheinen;

$\dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$ die sogenannten kinematischen Actionsmomente, definirt durch die Gleichungen

$$\dot{F} = \tfrac{1}{2}(\dot{a} - \dot{\alpha})E,\quad \dot{G} = \tfrac{1}{2}(\dot{b} - \dot{\beta})E,\quad \dot{H} = \tfrac{1}{2}(\dot{c} - \dot{\gamma})E.$$

Aus den obigen Grundgleichungen der auf die Kugel wirkenden Kräfte bietet sich von selbst eine Zerlegung derselben in die Inductionskraft, die als totale Zeitabgeleitete erscheint, und in die Energiekraft, die als Product von Geschwindigkeiten auftritt, dar.

Die Energiekraft zerfällt dann wiederum in eine temporäre, die nur von den Geschwindigkeiten des Einfallstromes, und eine permanente, die von den Eigenpulsationen und Oscillationen herrührt.

Die permanent energetischen und die inducirenden Kräfte sind bei der gewählten Annäherung bis zu Kugelfunctionen 2. Grades im Verhältnis zu der kleinen Grösse d/r klein von 2., 3. und 4. Ordnung, d. h. sie nehmen ab, wie die 2., 3. und 4. Potenz des Abstandes von den Kugeln zunimmt, die temporär energetischen Kräfte hingegen sind von der 5., 6. und 7. Ordnung. Die ersteren nennt Bjerknes niedere, die letzteren höhere hydrodynamische Fernkräfte.

Von den Inductionskräften kommen nur diejenigen in Betracht, welche die Trägheit der Kugel ausdrücken. Die Masse der Kugel wird von denselben bekanntlich um die halbe verdrängte Flüssigkeitsmasse scheinbar vermehrt.

Für einen Beobachter, der keine Pulsationen oder Oscillationen von grosser Geschwindigkeit, aber kleiner Amplitude, sondern nur Bewegungen, die gross sind gegen die Kugeldurchmesser, wahrnehmen kann, treten nur die permanenten Energiekräfte in Erscheinung, und diese erfüllen die Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte, von der Action und Reaction sowie von der Erhaltung der Energie gerade wie die Kräfte der Gravitation, der Elektrostatik und des Magnetismus.

Insbesondere ergeben sich folgende scheinbare Fernwirkungen, wenn man statt der Pulsationsintensität $\dot{E}$ und der Actionsmomente $\dot{F}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$ ihre zeitlichen, quadratischen Mittelwerte E', F', G', H' einführt und für die synchronen Bewegungen das Vorzeichen + bei gleichen Phasen, das Vorzeichen — bei Phasenunterschieden von π wählt.

1. Als permanente Energiekraft zwischen 2 synchron pulsirenden Kugeln:

$$-q\frac{E' E_1'}{4\pi r^2},$$

also eine Anziehung bei gleicher Phase, eine Abstossung bei entgegengesetzten Phasen, welche proportional der Dichte der Flüssigkeit sowie den mittleren Pulsationsintensitäten und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist.

Man sieht sofort die vollständige Analogie mit dem Gravitationsgesetz sowie den Gesetzen der Anziehung zwischen elektrischen Massen und zwischen Magnetpolen.

2. Als permanente Energiekraft zwischen zwei oscillirenden Kugeln eine Kraft, die mit derjenigen zweier Elementarmagnete bis auf das Vorzeichen übereinstimmt.

3. Als permanente Energiekraft zwischen einer oscillirenden und einer pulsirenden Kugel eine Kraft, die mit derjenigen zwischen Elementarmagneten und Magnetpolen bis auf das Vorzeichen übereinstimmt.

Hierbei entsprechen sich gleiche Pulsationsphasen und elektrische Massen von gleichem Vorzeichen, gleiche und gleichzeitige Oscillationsrichtungen und gleichnamige Pole.

Ebenso lassen sich auch sehr vollständig wieder inverse Analogien zwischen den höheren Energiekräften aufstellen.

Doch zeigt sich ebenso, wie in dem entsprechenden Teile der Elektricitätstheorie, dass es handlicher ist, die Stromfelder, resp. Kraftlinien zu betrachten, als die Kräfte selbst, die an dieser Stelle anfangen, ihre einfachen Eigenschaften, wie Superposition, Conservatismus, Actionsgleichheit, zu verlieren.

In diesem Fall ist folgender Satz von Nutzen: Bei Abwesenheit von Eigenpulsation und Oscillation verschiebt sich eine Kugel von grösserer Dichte als die Flüssigkeit in der Richtung des grössten Wachsens der Energie des Einfallstroms, eine Kugel von geringerer Dichte als die Flüssigkeit im entgegengesetzten Sinn.

Zum Schlusse möge noch die Beziehung zu Hertz's „Principien der Mechanik", die in den vorliegenden Untersuchungen öfters betont wird, auseinander gesetzt werden.

Wenn man nämlich mit Bjerknes die Geschwindigkeiten der Kugeln in einen langsam veränderlichen Teil, die Parametergeschwindigkeiten, und einen zwar schnell veränderlichen, aber wegen der Periodicität unsichtbaren Teil, die verborgenen Geschwindigkeiten (cyklischen Intensitäten) zerlegt, so gewinnt man für die kinetische Energie des Systems formale Uebereinstimmung mit den Hertz'schen Kraftformeln cyklischer Systeme, indem die lebendige Kraft nur von der Aenderungsgeschwindigkeit der cyklischen Coordinate und nicht von der cyklischen Coordinate selbst, ferner nur von den Parametern selbst und nicht von deren Aenderungsgeschwindigkeiten abhängt.

In Wirklichkeit besteht jedoch der fundamentale Unterschied, dass bei Bjerknes elastische Kräfte in den Kugeln auftreten müssen, die bei Hertz erst durch starre Verbindungen zu ersetzen wären. Rr.

V. Bjerknes. Les actions hydrodynamiques à distance d'après la théorie de C. A. Bjerknes. Rapports du Congrès intern. de Physique **1**, 251-276.

Fontaneau. Sur l'intégration des équations différentielles de l'hydrodynamique. Assoc. Franç. Boulogne **28**, 1-40.

Zunächst entwickelt Fontaneau als Hülfsmittel die wesentlichsten Formeln zur Transformation krummliniger Coordinaten, indem er von gewissen Identitäten ausgeht, aus denen man fast ohne Rechnung alle in der Folge benutzten Beziehungen herleiten kann. Unter den verschiedenen behandelten Problemen ist zuerst dasjenige hervorzuheben, welches die Forderung aufstellt, dass jede der Componenten der Elementarrotation die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in den Wärmeleitern verificiren soll. Er löst die Aufgabe mit Hülfe eines Satzes, der unmittelbar aus der Anwendung der krummlinigen Coordinaten fliesst, der aber in einer etwas weniger allgemeinen Form von H. Poincaré

bereits angegeben und auf elegante Art bewiesen ist. Die in die Hydrodynamik durch die Betrachtung der elementaren Rotation gebrachte Dualität zieht bei dem Integrationsverfahren eine vom Verf. schon früher angedeutete Modification nach sich. Nach Auseinandersetzung derselben wendet er sie auf den Fall an, bei welchem in der bewegten Flüssigkeit ein Rotationspotential besteht. Dieses Problem kann, ebenso wie sein correlatives, in Abhängigkeit von dem allgemeineren Falle gebracht werden, bei welchem die Componenten der Elementarrotation gleich den Producten der Differentialquotienten einer und derselben Function mit einer und derselben variablen Grösse sind. Der Verf. löst diese Frage, indem er das von Helmholtz behandelte Problem der Wirbelbewegungen als Vorbild benutzt, und danach noch eine andere, etwas weniger einfache Aufgabe. Den Beschluss machen einige Betrachtungen über die von verschiedenen Autoren vorgeschlagenen Grenzbedingungen und über die Zweckdienlichkeit der vom Verf. behandelten Integrationen für die praktische Erforschung der Flüssigkeitsbewegung. Lp.

Th. Schwedoff. **La rigidité des fluides.** Rapports du Congrès intern. de Physique **1**, 478-486.

Der Aufsatz ist nicht ein blosses Referat über die Eigenschaften der Flüssigkeiten, welche denen der starren Körper parallel gehen, sondern enthält auch zugehörige theoretische Betrachtungen des Verf. Lp.

Touche. **Les équations de l'hydraulique données par Lagrange.** S. M. F. Bull. **28**, 121-124.

Touche. **Observations sur les équations de l'hydraulique d'après Lagrange.** Ibid. 125-127.

Verf. hat in einer früheren Mitteilung die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen auf ein Coordinatensystem transformirt, das in jedem Punkte den Richtungen des Stromfadens, dessen Haupt- und dessen Binormale folgt. In den vorliegenden Mitteilungen macht er die entsprechende Transformation an den hydrodynamischen Gleichungen, die Lagrange gegen Ende seines Lebens veröffentlicht hat, und über die man in seiner Mécanique analytique einige Bemerkungen von Bertrand findet. Zuerst wird die Umformung für stationäre und dann für beliebige Strömung ausgeführt. Rr.

P. E. Doudna. **Equations of motion of a viscous liquid.** Colorado College Studies **8**, 1-20.

R. Reiff. **Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik.** Ann. der Phys. (4) **1**, 225-231.

L. Boltzmann. **Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik.** Ibid. 673-677.

In dem ersten Aufsatze sucht der Verf. zu zeigen, dass das den hydrodynamischen Druck enthaltende Glied in den Euler'schen Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten allein von der Bedingung der Constanz der Masse herrühre, während doch Hertz' Mechanik verlange, dass die Kräfte durch Koppelung mit anderen Systemen entstehen. Er behandelt sodann den Fall zweier in demselben Raume befindlichen Flüssigkeiten, deren Coordinaten durch eine Bedingungsgleichung verknüpft sind, und erhält Gleichungen, die denen reibender Flüssigkeiten analog sein sollen. Ref. ist in Bezug auf die erste Ableitung der Ansicht, dass die Aufgabe der Hertz'schen Mechanik nach Aufstellung der Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Flüssigkeitselements erledigt ist, und dass die Hertz'sche Mechanik weiterhin mit der üblichen zusammenfällt. In Bezug auf den zweiten Teil kann Ref. eine Analogie zwischen den aufgestellten Gleichungen und denen reibender Flüssigkeiten nicht sehen.

In dem zweiten Aufsatz erörtert Boltzmann, dass Reiff in Wirklichkeit nicht die Constanz der Masse als Bedingung eingeführt habe, sondern vielmehr die räumliche Constanz der Dichte, und dass die Incompressibilitätsbedingung sehr wohl eine Bedingungsgleichung im Hertz'schen Sinne vorstelle. Rr.

E. J. Wilczynski. An application of group theory to hydrodynamics. American M. S. Trans. 1, 339-352.

Sophus Lie hat die Bemerkung gemacht, dass die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit zur Versinnlichung einer Einparametergruppe von drei Variabeln dienen kann. Diese Bemerkung wird hier benutzt, um zu zeigen, dass jede stationäre Flüssigkeitsbewegung dargestellt werden kann in der Form

$$\Omega_i(x,y,z) = \Omega_i(a,b,c)_{(i=1,2)},\quad W(x,y,z) = W(a,b,c) + t;$$

ferner dass, wenn ein Kräftepotential besteht, die allgemeinste ternäre projective Gruppe, die eine stationäre Flüssigkeitsbewegung ausdrückt, eine lineare Gruppe ist.

Schliesslich werden zwei Beispiele von Bewegungen berechnet, das erste, bei dem die Geschwindigkeiten lineare Functionen der Coordinaten sind, das zweite, bei dem die Bewegung durch eine linearoide Gruppe ausgedrückt ist, d. h. durch eine solche, bei der die Geschwindigkeiten lineare Functionen von zwei der Coordinaten und beliebige der dritten sind. Dieser zweite Fall ergiebt eine Klasse von Flüssigkeitsbewegungen, deren Theorie durch lineare Differentialgleichungen erledigt werden kann. Rr.

H. Bénard. Mouvements tourbillonnaires à structure cellulaire. Étude optique de la surface libre. C. R. 130, 1065-1068.

Diese Mitteilung hat die experimentelle Untersuchung der Strömungen, die in einer Wärme von unten nach oben leitenden Flüssigkeit entstehen,

zum Gegenstand. Verf. benutzt zur Constatirung der sich in sechskantigen Prismen anordnenden Stromfäden fein verteilte, besonders schuppenartige Stäubchen und zur Bestimmung der diesen Stromfäden folgenden Ungleichmässigkeiten der Oberfläche deren Brennlinien und Brennpunkte und die beim Lichtdurchgang sich zeigenden Interferenzstreifen. Rr.

K. Žorawski. Ueber gewisse Aenderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines continuirlichen materiellen Systems. Erste Mitteilung. Krak. Anz. 1900, 367-374.

Verf. zieht für den dreifachen Raum eines derjenigen Probleme in Betracht, welche er in den Leipz. Ber. **52**, 77-89 (vergl. das Referat S. 662 dieses Bandes) für die Ebene behandelt hat, und welche mit der Gruppentheorie bei den infinitesimalen Transformationen zusammenhängen. Die Cosinus der Richtung, welche als Hauptrichtung bezeichnet wird, hängen von den Wurzeln einer kubischen Gleichung ab, der „charakteristischen Gleichung". Je nach der Beschaffenheit der Wurzeln dieser charakteristischen Gleichung gelten mehrere Sätze. Lp.

R. F. Gwyther. On the conditions for the propagation of a solitary wave. Mem. Manchester Soc. **44**, No. 9, 12 S. [Nature **61**, 383.]

R. F. Gwyther. On the motion of the fluid particles in a class of cases of steady motion. Mem. Manchester Soc. **44**, No. 10, 4 S. [Nature **61**, 383.]

Dem Ref. sind nur die kurzen Berichte über die Vorträge in Literary and Philos. Soc. of Manchester zugänglich gewesen. „Um mathematische Formeln zu erhalten, die in wenigen Gliedern die Gleichheit des Oberflächendrucks über den langen Zügen der Einsiedlerwelle auszudrücken fähig sind, wird die Welle angesehen als hauptsächlich unterhalten durch den Druck auf die Aussengrenzen, indem jeder Mangel an der Gleichheit des Druckes oberhalb des Kammes unter gewissen Umständen als überwogen durch eine kleine Einrenkung der Partikelchen betrachtet wird. Die Resultate stimmen gut mit den Versuchsergebnissen von Scott-Russell. — In dem zweiten Vortrage wird gezeigt, dass die Lösung der Lagrange'schen Gleichungen die Form $x+iy=f(a+ib)$ annimmt, wo u durch eine Quadratur als Function von a, b, t zu bestimmen ist." Lp.

R. F. Gwyther. The classes of progressive long waves. Phil. Mag. (5) **50**, 213-216 u. 308-312.

R. F. Gwyther. The general motion of long waves with an examination of the direct reflection of a solitary wave. Ibid. 349-352.

Aus der allgemeinen Wellengleichung und der Grenzbedingung für

die freie Oberfläche einer Flüssigkeitswelle wird eine Differentialgleichung für diese Fläche abgeleitet und mit den entsprechenden Vernachlässigungen in einigen Specialfällen integrirt. In der zweiten Arbeit wird unter Hinzunahme einer Continuitätsbedingung eine zweite Form für die Differentialgleichung aufgestellt und durch Integration mit entsprechenden Vernachlässigungen der experimentell gefundene Satz abgeleitet, dass die Reflexion an einer verticalen Wand die Form der freien Oberfläche nicht wesentlich beeinflusst. Br.

H. Lamb. Geometrical representation of the relation between wave-velocity and group-velocity. Manchester Mem. **44**, No. 6, 5 S.

E. W. Brown. On tide currents in estuaries and rivers. Annals of Math. (2) **1**, 68-71.

In qualitativer Weise werden die Erscheinungen der Flutwelle in Mündungen und Flüssen besprochen, indem nicht die Form der Welle, sondern der Weg des einzelnen Wassertropfens oder, was dasselbe ist, die Bewegung eines schwimmenden Körpers betrachtet wird.

Es wird gezeigt, dass diese Bewegung im offenen Meere eine rein auf- und abgehende ist, die sich, je mehr man in die Mündung eines Flusses eintritt, zu einer hin- und hergehenden verwandelt, dergestalt, dass die ursprünglich senkrechte grosse Axe der Bewegungscurve sich mehr und mehr dreht und vergrössert, bis die Bewegung schliesslich ziemlich horizontal geworden ist. Im ersten Fall muss daher Strömungsstillstand bei Mittelwasser eintreten, im zweiten Fall in der Nähe von Hoch- oder Niedrigwasser. Aus den Unsymmetrien der Bewegungscurve eines Wasserteilchens lassen sich alle zum Teil merkwürdigen Erscheinungen der Flutwelle ableiten, die aus der Verengerung, Tiefenänderung und dem Reibungswiderstand des Flutkanals herrühren. Für ausführliche Darstellung wird auf das Buch von Darwin „The Tides" verwiesen. Rr.

E. Guyou. Formules et tables pour calculer les heures et hauteurs des pleines et basses mers, connaissant les hauteurs d'heure en heure. C. R. **131**, 1158.

Verf. giebt eine Formel an, um aus drei auf einander folgenden Stundenhöhen des Meeres, die das Maximum oder Minimum einschliessen, Zeit und Höhe derselben zu bestimmen, und weist auf eine diese Bestimmung erleichternde Tabelle in dem „Annuaire des marées pour 1901", herausgegeben vom hydrographischen Amt der französischen Marine, hin. Rr.

H. S. ALLEN. The motion of a sphere in a viscous fluid. Phil. Mag. (5) **50**, 323-338, 519-534.

Es handelt sich um Versuche, die angestellt sind, um zu prüfen, ob die theoretisch aufgestellten Formeln der Wirklichkeit entsprechen. Es ergab sich im wesentlichen ausreichende Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie in der gleichförmigen Endgeschwindigkeit des Falles. Aufsteigende Luftblasen verhielten sich analog. Br.

F. KÖTTER. Die von Stekloff und Liapunow entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Berl. Ber. 1900, 79-87.

Für das Problem der Bewegung eines starren Körpers in einer reibungslosen Flüssigkeit hat Clebsch zwei Fälle aufgedeckt, in denen die Differentialgleichungen für die Impulscomponenten ausser den drei allgemein gültigen Integralen ein viertes, von der Zeit freies algebraisches Integral besitzen. Der eine ist von Halphen, der andere von H. Weber und F. Kötter erledigt worden. Diesen Fällen haben Steklow und Liapunow vor einigen Jahren neue Fälle hinzugefügt. Beide Fälle sind nahe mit einander verwandt; in jedem derselben wird das vierte Integral durch eine constant gesetzte homogene Function zweiten Grades gebildet. Mit der Beschreibung dieser beiden Fälle haben sich die Verf. begnügt, ohne die Bewegung, d. h. die neun Richtungscosinus der im Raum festen Axen zu den im Körper festen Axen, die sechs Componenten der Drehungsgeschwindigkeit nach diesen Axen sowie die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Körpermittelpunktes explicite als Functionen der Zeit darzustellen. Dieses Problem wird von Kötter gelöst.

Die genannten Grössen lassen sich, wie sich zeigt, durch die Thetafunctionen von zwei Argumenten ausdrücken, und diese Ausdrücke gehören einem allgemeinen, auch bei anderen Problemen der Mechanik auftretenden Typus an, jenem so überraschend durchsichtigen Orthogonalsystem, dessen Entdeckung die Wissenschaft ebenfalls Fritz Kötter verdankt (vergl. Berl. Ber. 1895, 807-814 und J. für Math. **116**, 213-246), und welches, wie Ref. nachgewiesen hat, durch Composition zweier identischen orthogonalen Sechzehnersysteme hervorgeht. Dabei stellen sich die Argumente der Thetafunctionen linear durch die Zeit dar. Jhk.

FR. KÖTTER. Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. J. für Math. **121**, 300-309.

Die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit lässt sich für den Fall, dass die lebendige Kraft die Form derjenigen in dem

von Clebsch entdeckten integrablen Falle hat, durch Thetafunctionen zweier Argumente ausdrücken. Die Darstellung der drehenden Bewegung ist äquivalent mit der des Rollens einer Ebene auf der kegelförmigen Gleichgewichtsfigur eines homogenen, aus einem biegsamen, unausdehnbaren Material gefertigten Flächenstücks, welches sich auf einem Kegelschnittsector abwickeln lässt, vorausgesetzt, dass der Scheitel des Sectors im Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt und zwischen den Constanten des Kegelschnitts und denen der lebendigen Kraft eine gewisse Bedingungsgleichung besteht. Lässt man den Kegelschnittsector auf der Gleichgewichtsfigur rollen, so entsprechen den drei Hauptaxen des Körpers die beiden Axen des Kegelschnitts und die Normale. Beim hydrodynamischen Problem sind die beiden Argumente der Thetafunctionen ganze lineare Functionen der Zeit. Das gilt auch von der rollenden Bewegung der Ebene auf der Gleichgewichtsfigur, wenn über den zeitlichen Verlauf der Bewegung die Festsetzung getroffen wird, dass die horizontale Projection des in der Gleichgewichtsfigur enthaltenen Stückes der momentanen Drehaxe in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreicht. Lp.

Rateau. Théorie des hélices propulsives. C. R. **130**, 486-489, 702-705.

Verf. erweitert die Theorie der Schiffsschrauben, indem er auch die Hinterfläche der Schraube berücksichtigt. Er geht von folgenden Hypothesen aus:

1. Die Dicke der Schicht des durch ein Flächenelement der Schraube beeinflussten Wassers ist proportional (gleich) der Länge dieses Elements, und wenn die beeinflussten Wasserschichten, wie in der Nähe der Axe, in einander greifen, ist der ganze Wassercylinder dort als beeinflusst anzusehen. Das betrachtete Flächenelement soll durch einen Hohlcylinder von der Wandstärke ds ausgeschnitten gedacht sein, dessen Axe mit der der Schraube zusammenfällt.

2. Diese Wasserschicht erfährt eine Verminderung der Relativgeschwindigkeit und eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit, die nur von der Gestalt, dem Querschnitt des Schraubenflügels und der Rauhigkeit der Wände abhängt, aber nicht vom Angriffswinkel (innerhalb gewisser Grenzen), und die Relativgeschwindigkeit hat nach Verlassen der Schraube nicht die Richtung der Vorderfläche, sondern eine Richtung, die zwischen den Tangenten an die Vorder- und Hinterfläche am Austrittspunkte liegt.

Die daraus sich ergebenden Formeln für den Nutzeffect sind denen von Drzewiecki gleich gebaut, nur dass zwei bei letzterem auftretende Coefficienten bei Rateau einen von den Eigenschaften der Schraube abhängigen Wert haben. Rr.

Fr. Ahlborn. Ueber die Mechanik der Flugbewegung. Unterrichtsbl. f. Math. **6**, 108-113.

Ein wesentlich zusammenfassender Vortrag nach des Verf. Schrift:

„Schwebflug und Fallbewegung“ (Abhdl. a. d. Geb. d. Naturw. Bd. 15. Hamburg 1897). Von Vorgängern wird nur Avanzini erwähnt, der vor etwa 100 Jahren die Lage des Widerstandspunktes, d. h. des Angriffspunktes der Resultante des Widerstandes festgestellt hat. Insbesondere fehlen die Versuche von E. Gerlach über fallende Scheiben (F. d. M. 18, 913, 1886), welche dem ersten Teil des Vortrages Entsprechendes geben.

Lp.

Lord Rayleigh. The mechanical principles of flight. Wilde lecture. Manchester Mem. **44,** No. 5, 26 S.

H. Wilde. On aerial locomotion. Manchester Mem. **44,** No. 11, 16 S.

F. Koester. Die Gesetze des Drachenfluges in Darstellung und Berechnung. Berlin: Mayer & Müller. 18 S. gr. 4°.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

A. Korn. Lehrbuch der Potentialtheorie. II. Allgemeine Theorie des logarithmischen Potentials und der Potentialfunctionen in der Ebene. Berlin: F. Dümmler. X + 366 S. 8° m. 58 Fig.

Der im vorigen Jahre (F. d. M. **30,** 690, 1899) besprochenen Theorie des Potentials und der Potentialfunctionen im Raume lässt Korn hier als zweiten Band seines Lehrbuchs eine analoge Darstellung der Theorie des logarithmischen Potentials folgen. Wie der erste Band verfolgt auch dieser ein doppeltes Ziel: er soll einerseits in die Theorie einführen, wobei nur die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung wie der analytischen Geometrie vorausgesetzt werden; er soll aber andererseits auch diejenigen, die eine gewisse Vertrautheit mit den Grundlagen der Theorie besitzen, bis zu den gegenwärtigen Grenzen dieses nicht nur für die Physik, sondern auch für die allgemeine Functionentheorie wichtigen Gebietes hinführen. Auch in der äusseren Anlage schliesst sich Band II eng an Band I, dessen Kenntnis übrigens nirgends vorausgesetzt wird, an. Er beginnt mit einleitenden Bemerkungen über Curven- und Flächenintegrale, erörtert dann (Tl. I) die allgemeinen Eigenschaften des logarithmischen Punkt-, Curven- und Flächenpotentials und betrachtet weiter (Tl. II) das logarithmische Potential der einfachen und Doppelbelegung eines Kreises. Die hier in Frage kommende Entwickelung einer Function nach Kreisfunctionen wird in engem Anschluss an C. Neumann (vergl.

F. d. M. **13**, 337, 1881) erledigt. Es folgen (Tl. III) die Grundlagen der Theorie der Potentialfunctionen (Lösungen von $\Delta V = 0$) für ein zweidimensionales Gebiet, ihre Darstellung durch Curvenintegrale, ihre Maximal- und Minimal-Eigenschaften, endlich die Lösung der beiden Hauptprobleme für das Innen- und Aussengebiet eines Kreises.

Nach diesen drei der Einführung in die Theorie gewidmeten Teilen wendet sich der Verf. (Teil IV und V) den neueren Untersuchungen über die Randwertaufgaben zu. Zur Lösung derselben bedient er sich einer Combination der Methoden von C. Neumann, Schwarz und Poincaré, indem er die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels zunächst für geschlossene Curven beweist, die gegen einen inneren Punkt convex sind (d. h. für Curven, innerhalb deren wenigstens ein Punkt existirt, durch den keine Tangente der Curve hindurchgeht), und dann mit Hülfe der Schwarz'schen Methode des alternirenden Verfahrens zu beliebigen geschlossenen Curven übergeht. Besonders hervorzuheben ist die einfache Art, in der sich der Verf. von irgend welchen Voraussetznngen über die Ableitungen der Randwerte befreit. Sind naturgemäss die hier zur Anwendung gelangenden Methoden den Methoden im Raume einigermassen analog, so existiren doch wesentliche Verschiedenheiten, die eine getrennte Behandlung des Gegenstandes erforderlich machen, und man kann in diesem einfacheren Gebiete weiter vordringen als in den entsprechenden Untersuchungen im Raume. Aeusserlich kommt dies im vorliegenden Bande zum Ausdruck durch Hinzufügung eines VI. Teiles, für welchen ein Analogon im Raume nicht existirt. Dieser VI. Teil betrifft die Theorie der conformen Abbildung und einen darauf gestützten allgemeinen Beweis der Methode des arithmetischen Mittels für Gebiete mit einer beliebigen stetig gekrümmten Randcurve.

Auch diesem zweiten Bande sind erläuternde Anmerkungen sowie ein Verzeichnis der benutzten Litteratur beigegeben. Wn.

H. Burkhardt u. W. Fr. Meyer. Potentialtheorie. (Theorie der Laplace-Poisson'schen Differentialgleichung). Encykl. d. math. Wiss. **2**, 464-503.

Inhaltsübersicht: 1. Definition des Potentials. 2. Die Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung. 3. Stetigkeit. Verhalten im Unendlichen. 4. Abgeleitete Potentiale. 5. Flächenpotential. 6. Potential einer Doppelschicht. 7. Potential von Linien und Punkten. 8. Logarithmisches Potential. 9. Analytische Fortsetzung. 10. Niveauflächen und Kraftlinien. 11. Verallgemeinerungen des Potentialbegriffs. 12. Green'sche Formeln. 13. Gauss' allgemeine Lehrsätze. 14. Entwickelungen des Potentials nach Kugelfunctionen. 15. Potential von Kugel und Ellipsoid. 16. W. Thomson's elektrische Bilder. 17. Randwertaufgaben; Eindeutigkeits- und Existenztheorem. 18. Green'sche Function. 19. Die Poisson'schen Integrale. 20. und 21. Entwickelung nach trigonometrischen und Kugelfunctionen. 22. Allgemeinere Entwickelungen. 23. Gauss'

Versuch, das Existenztheorem zu beweisen. 24. Thomson-Dirichlet'sches Princip. 25. Kritik desselben. 26. Methode der Approximation durch Polygone, bezw. Polyeder. 27. Methode des arithmetischen Mittels. 28. Combinatorische Methoden. 29. Specielle Methoden für analytische Randcurven. 30. Hülfssätze zu Convergenzbeweisen. 31. Die Balayagemethode.

Wbg.

H. Petrini. Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel. C. R. **180**, 233-235.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ des Körperpotentials für Punkte der Masse findet der Verf., dass die Function

$$W_h = -\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} (1-3u^2)\,du \int_h^a \varrho(r,u,\psi)\frac{dr}{r}$$

sich für $h=0$ einer endlichen Grenze nähert, während die Dichtigkeit ϱ und die Function

$$\varrho_0 = \lim_{h=0} (ht, u, \psi)$$

endlich und integrabel sind. Der Beweis wird kurz angedeutet, aber nicht durchgeführt. Hat schon das Integral

$$\int_h^a \varrho\frac{dr}{r}$$

für $h=0$ eine endliche Grenze, so existiren die drei zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Falls ϱ continuirlich ist, lässt sich eine der Poisson'schen Gleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ analoge Gleichung ableiten, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen von V vorauszusetzen; man hat nun das Symbol Δ anders zu definiren.

Zum Schluss wird an einem speciellen Beispiel gezeigt, dass ϱ continuirlich sein kann, ohne dass die zweiten Ableitungen von V existiren.

Wn.

G. Lauricella. Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. Torino Atti **35**, 480-497.

In einer Arbeit, die den gleichen Titel trägt wie die vorliegende, hatte Morera die discontinuirliche Aenderung der ersten Ableitung des Flächenpotentials nach der Normale untersucht, ohne, wie meist üblich, teilweise Integration anzuwenden, d. h. ohne die Differentiirbarkeit der Dichtigkeit vorauszusetzen (vergl. F. d. M. **19**, 1036, 1887). Dabei war er zu dem Resultate gelangt, dass für die Existenz der erwähnten Ab-

leitung die continuirliche Aenderung der Dichtigkeit nicht genüge, dass letztere vielmehr noch eine gewisse andere Bedingung erfüllen müsse. Hier wird nun gezeigt, dass die continuirliche Aenderung der Dichtigkeit doch hinreicht, und dass es einer weiteren Bedingung nicht bedarf. Durch eine Modification der Morera'schen Rechnungen lässt sich nämlich die Untersuchung der normalen Ableitung des Flächenpotentials auf die Untersuchung des Potentials einer Doppelbelegung reduciren, und von letzterem Potential lässt sich zeigen, dass für seine Existenz die Endlichkeit und Continuität der Dichtigkeit genügt.

Die Erörterung der Eigenschaften des Potentials der Doppelbelegung bildet den ersten Teil der Arbeit, und zwar werden dabei auch gewisse singuläre Flächenpunkte in Betracht gezogen, während im zweiten Teil die Modificationen der Morera'schen Entwickelungen mitgeteilt werden. In einem Anhange wird die Continuität der normalen Ableitung des Potentials einer Doppelbelegung beim Durchgang durch die Fläche nachgewiesen; auch hier genügt zur Existenz jener Ableitung die Continuität der Dichtigkeit. Wn.

W. Stekloff. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Toulouse Ann. (2) **2**, 207-272.

Im Anschluss an Poincaré's Untersuchungen über die Neumann'sche Methode und das Dirichlet'sche Princip (vergl. F. d. M. **27**, 316, 1896) stellt sich der Verf. zunächst die Aufgabe, durch eine Modification der Methode von Robin das Problem der Elektricitätsverteilung allgemein zu lösen, ohne sich auf die normale Ableitung des Potentials einer Doppelschicht zu stützen, und unabhängig von dem Dirichlet'schen Princip. Für convexe Flächen hatte der Verf. die Lösung bereits früher angegeben (F. d. M. **28**, 764, 1897). Hier dehnt er, wie schon in einer F. d. M. **30**, 772, 1899, besprochenen Note, die Lösung auf beliebige geschlossene Flächen S aus, die folgende Eigenschaften besitzen: 1. In jedem Punkte von S existirt eine bestimmte Tangentialebene. 2. Um jeden Punkt p_0 von S kann man eine Kugel mit einem hinreichend kleinen, aber bestimmten Radius D beschreiben derart, dass eine Parallele zu der Flächennormale in p_0 die Fläche innerhalb der Kugel nur einmal trifft. 3. Der Spitze Winkel ϑ, den zwei in den Punkten p_0 und p von S errichtete Normalen bilden, genügt der Bedingung $\vartheta < ar_0$, wo r_0 den Abstand p_0p bezeichnet und a eine Zahl ist, die unabhängig ist von der Wahl der Punkte p und p_0.

Für eine solche Fläche wird in Kap. I das folgende Fundamentaltheorem abgeleitet: Ist V eine innerhalb und ausserhalb S harmonische Function, welche die Eigenschaft des Flächenpotentials besitzt und der Bedingung

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0$$

genügt $\left(\frac{\partial V_e}{\partial n}\right.$ bezeichnet die Ableitung nach der äusseren Normale$\left.\right)$, so hat das Verhältnis

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau : \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'$$

eine endliche obere und eine von Null verschiedene untere Grenze. $d\tau$ und $d\tau'$ bezeichnen dabei die Volumenelemente des Innen- und des Aussenraumes von S. Der Satz wird zunächst für eine Kugel bewiesen und dann auf S übertragen durch Anwendung der Poincaré'schen Transformation, durch welche die Fläche S in die Einheitskugel übergeführt wird und zugleich der Innenraum von S in den Innenraum, der Aussenraum von S in den Aussenraum jener Kugel. Das Fundamentaltheorem gilt also zunächst nur unter der Voraussetzung, dass die Fläche S die Poincaré'sche Transformation zulässt. Der Verf. spricht aber die Ueberzeugung aus, dass es allgemeinere Gültigkeit hat, und dass die Lösung aller Fundamentalprobleme der mathematischen Physik sich auf den vollständigen Beweis eben dieses Fundamentaltheorems zurückführen lässt.

In Kap. II wird dann gezeigt, dass die Robin'sche Methode die Lösung des elektrostatischen Problems für alle Flächen S giebt, die den obigen Bedingungen 1-3 genügen, und für die zugleich das Fundamentaltheorem gilt. Die Hauptsätze, die hier entwickelt werden, sind die folgenden: S habe die erwähnten Eigenschaften, und ϱ_0 sei eine auf S continuirliche Function, die der Bedingung

$$\int \varrho_0\, ds = 0$$

genügt. Man setze

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \varrho_0 \frac{1}{r}\, ds$$

und bilde successive die Functionen

$$\overline{V}_2 = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_1 \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \ldots, \qquad \overline{V}_k = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

wo r der Abstand des Elements ds von dem angezogenen Punkte P ist, φ der Winkel, den die innere Normale an der Stelle ds mit r bildet, und wo der Strich über V die Bedeutung hat, dass P auf S selbst liegt: dann ist

$$|\overline{V}_k| < C \cdot \tau^k,$$

wo C eine endliche positive Constante ist, die nur von ϱ_0 und der Fläche S abhängt, τ eine positive Zahl kleiner als 1.

Bildet man ferner die Integrale

$$\varrho_k = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo ψ den Winkel bezeichnet, den die Normale in dem auf S liegenden Punkte P mit r bildet, und wo ϱ_0 derselben Bedingung genügt wie vorher, so convergirt die Reihe

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_k + \cdots$$

absolut und gleichförmig auf der Fläche S.

Der Uebergang zu dem Falle, in dem $\int \varrho_0 ds$ nicht verschwindet, wird dadurch bewerkstelligt, dass man

$$\varrho'_k = \varrho_k - \varrho_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

setzt; dann wird

$$\varrho'_k = \frac{1}{2\pi}\int \varrho'_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

und

$$\int \varrho'_1 ds = 0.$$

Kap. III behandelt dann in analoger Weise das hydrostatische Problem, bei dem es sich darum handelt, im Innern eines Bereiches D eine harmonische Function zu finden, deren normale Ableitung an der Grenze S gleich einer gegebenen Function f ist. Für die Behandlung dieses Problems giebt es zwei Methoden, die von C. Neumann und die von Robin. Beide gelten unmittelbar nur für convexe Flächen. Hier wird nun gezeigt, dass beide auf alle Flächen S angewandt werden können, für welche die Resultate von Kap. II gelten, falls nur f auf S continuirlich ist.

Kap. IV ist dem eigentlichen Dirichlet'schen Problem gewidmet. Auch hier ergiebt sich, dass die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels für alle Flächen S gültig ist, welche die in Rede stehenden Eigenschaften besitzen, falls nur die Randwerte f auf S continuirlich sind.

Endlich wird in Kap. V das Dirichlet'sche Problem für eine einfache und eine Doppelbelegung unter der Annahme durchgeführt, dass f nicht nur continuirlich ist, sondern noch der folgenden weiteren Bedingung genügt. In der Tangentialebene eines Punktes p_0 von S seien r_0 und ω Polarcoordinaten, ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f d\omega = \bar{f}.$$

Dann soll

$$\bar{f} - f_0 < b r_0^{\beta+1}$$

sein (f_0 der Wert von f in p_0). Wn.

W. Stekloff. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré. Toulouse Ann. (2) **2**, 273-303.

Der Aufsatz, eine weitere Ausführung von früheren Untersuchungen des Verf. (vergl. F. d. M. **27**, 203, 1896; **30**, 374, 1899), knüpft unmittelbar an die im vorhergehenden Referate besprochene Arbeit an. In derselben war nebenbei für alle Flächen S, welche die dort mehrfach erwähnten Eigenschaften besitzen, die Existenz der sogenannten Poincaré'-

schen Fundamentalfunctionen (vergl. F. d. M. **25**, 1526, 1893-1894) nachgewiesen; d. h. es war gezeigt, dass für jene Flächen S unendlich viel positive Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots$ existiren, die mit s unbeschränkt wachsen, und entsprechende Functionen $U_1, U_2, \ldots, U_s, \ldots$, die im Innern von S der Gleichung $\Delta U_s + k_s U_s = 0$ genügen und in S verschwinden. Ueber diese Functionen wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet, von denen folgende hier Platz finden mögen.

1. Ist die Function f nebst ihren ersten Ableitungen in einem Bereiche D continuirlich und verschwindet sie an der Grenze von D, so ist das über D erstreckte Integral

$$\int f^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad A_s = \int f U_s d\tau.$$

Dieselbe Darstellung gilt auch, wenn f nur der einen Bedingung genügt, im Innern von S continuirlich zu sein.

2. Wenn die Function f nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung in einem Bereiche D continuirlich ist und an der Grenze von D verschwindet, so ist

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2,$$

wo A_s dieselbe Bedeutung wie in 1. hat.

3. Ist f im Innern von D continuirlich, φ eine beliebige Function, die nur der Bedingung

$$\int \varphi^2 d\tau < Q$$

genügt, unter Q eine angebbare Zahl verstanden, so ist

$$\int f\varphi d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \quad B_s = \int \varphi_s U_s d\tau.$$

Aus 3. ergiebt sich, dass man die Trägheitsmomente der Erde berechnen kann, ohne die Verteilung der Dichtigkeit zu kennen, falls man nur annimmt, dass die Dichtigkeit für alle Punkte der Erde endlich ist.

4. Wenn f in D continuirlich ist, so gilt die Gleichung

$$\int f^2 d\tau = D \cdot A_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad A_s = \int f V_s d\tau.$$

Darin bezeichnet D das Volumen des Bereiches D. Die V_s sind Functionen von ähnlichen Eigenschaften wie die U_s, von denen sie sich nur dadurch unterscheiden, dass an der Grenze S von D

$$\frac{\partial V_s}{\partial n_i} + hV_s = 0$$

ist, unter n_i die innere Normale verstanden.

5. Ist die Function φ nebst ihren ersten Ableitungen in D stetig und genügt sie ausserdem den Bedingungen:

$$\int \varphi d\tau = 0, \int \varphi V_s d\tau = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

so hat das Verhältnis

$$K = \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau : \int \varphi^2 d\tau$$

genau die Zahl λ_{p+1} zur unteren Grenze. λ_s ist dabei die Zahl, die an Stelle von k_s tritt, wenn U_s durch V_s ersetzt wird.

6. Eine gegebene Function f kann in eine absolut und gleichförmig convergirende, nach harmonischen Functionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, falls nur f nebst seinen ersten und zweiten Ableitungen im Innern von D continuirlich ist und an der Grenze von D verschwindet. Wn.

W. SteklOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C. R. **130,** 396-399.

A. Korn. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C. R. **130,** 557.

W. Stekloff. Remarque à une note de M. A. Korn: „Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet." C. R. **130,** 826-827.

A. Korn. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C. R. **130,** 1238-1241.

W. Stekloff. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C. R. **130,** 1599-1601.

A. Korn. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C. R. **131,** 26-27.

W. Stekloff. Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet. C. R. **131,** 870-873.

W. Stekloff. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. C. R. **131,** 987-989, 1182-1185.

In dem ersten der angeführten Aufsätze teilt Stekloff einige der Resultate mit, die er in der ausführlichen, Seite 731 besprochenen Arbeit entwickelt hat. Diese Mitteilung veranlasst Korn, darauf zu verweisen, dass die wesentlichsten Resultate Stekloff's schon in seinem (Korn's) Lehrbuch der Potentialtheorie (F. d. M. **30,** 690, 1899) abgeleitet seien, und daran knüpfen sich Erörterungen beider Autoren über die Ableitung der in Rede stehenden Resultate. Korn legt darauf Gewicht, dass er, indem er sich auf eine gewisse, sehr allgemeine Klasse von Flächen beschränke, die Poincaré'sche Transformation, auf die sich Stekloff stütze, nicht gebrauche, dass ferner der grosse Apparat, mittels dessen Liapunow die Continuität der ersten Ableitungen der Neumann'schen Lösung beweise, nicht nötig, dass somit ein Teil der Beweisführung von

Stekloff überflüssig sei. Stekloff betont dem gegenüber, dass bei seiner Beweisführung nur die Continuität der gegebenen Randwerte vorausgesetzt zu werden brauche, nicht, wie bei Korn, auch die Continuität der ersten und zweiten Ableitungen dieser Randwerte, dass seine Beweisführung ferner gestatte, die Neumann'sche Methode unabhängig vom Dirichlet'schen Princip zu begründen. Er halte deshalb seine Untersuchungen für einfacher und allgemeiner als die von Korn. Ferner sucht Stekloff die bei Liapunow nötige beschränkende Bedingung fortzuschaffen, wobei er die Entwickelungen benutzt, die in der zweiten seiner oben besprochenen Arbeiten (s. S. 733) gegeben sind. Korn hält allerdings, wie er im zweiten Bande seiner Potentialtheorie (Referat S. 728) bemerkt, durch die vorstehenden Erörterungen die Schwierigkeiten, welche der von Stekloff angewandten Methode der Reihenentwickelung anhaften, noch nicht für gehoben. Ob sich wirklich alle Bedingungen über die Ableitung der Randwerte in der Methode des arithmetischen Mittels fortschaffen lassen, stehe noch dahin.

Die letzten Aufsätze von Stekloff sind Recapitulationen aus der Seite 731 besprochenen Arbeit, wobei einige Beweise etwas modificirt werden. Wn.

F. Büttner. Studien über die Green'sche Abhandlung: Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids. Preisschr. d. Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig: B. G. Teubner. 98 S. 4°.

In seinen „Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluid“ (Cambr. Trans. 1833, abgedruckt in den Mathematical papers of Green, 1871) untersucht Green die Gesetze des Gleichgewichts einer hypothetischen Flüssigkeit, die der elektrischen Flüssigkeit analog ist, deren Teilchen sich jedoch nicht nach dem Newton'schen Gesetze, sondern umgekehrt proportional der n-ten Potenz der Entfernung abstossen. Da das Studium dieser für eine verallgemeinerte Theorie der Fernwirkungen wichtigen Arbeit durch mancherlei Lücken und Unklarheiten erschwert ist, hatte die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft als Preisaufgabe für das Jahr 1898 „eine wirkliche Lösung der von Green in seiner Abhandlung nur angedeuteten Aufgaben, sowie auch die Ausfüllung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten“ verlangt. In Beantwortung dieser Preisfrage hat Büttner die Green'sche Abhandlung möglichst sinngetreu, aber in freier Bearbeitung wiedergegeben und dabei durch Einschaltung einzelner Anmerkungen wie auch ganzer Abschnitte die Lücken der Arbeit auszufüllen und die vorhandenen Dunkelheiten aufzuklären gesucht. Dabei hat er durch Benutzung der Gammafunctionen wie der hypergeometrischen Reihe die Green'schen Formeln übersichtlicher gestaltet; ferner ist er über Green insofern hinausgegangen, als er mehrere der von Green nur für die Kugel behandelten Aufgaben auch für das dreiaxige Ellipsoid gelöst hat.

Mit Green betrachtet der Verf., unter Zugrundelegung des oben genannten Gesetzes, die Kräftefunction

$$V = \int \frac{\varrho dv}{g^{n-1}}$$

(ϱ die Dichtigkeit, g der Abstand des Elements dv vom angezogenen Punkte), aus der sich die Kraftcomponente in der Richtung q

$$= \frac{1}{1-n} \frac{\partial V}{\partial q}$$

ergiebt, und berechnet zunächst (§ 2) V für eine homogene Kugel. Dabei ergiebt sich, dass, wenn die Anziehung, die ein Punkt der Kugeloberfläche erleidet, endlich sein soll, $n < 3$ sein muss, ein Resultat, das Green nicht angiebt, das sich aber schon in Gauss' Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum (1813) findet. Indem von jetzt ab n der Beschränkung $1 < n < 3$ unterworfen wird, wird (§ 3) der folgende von Green ohne Beweis mitgeteilte Satz abgeleitet: Ist die Dichtigkeit ϱ des Fluidums in der Kugel eine gerade oder ungerade Function der Coordinaten, so ist das Potential des Fluidums auf einen inneren Punkt eine gerade oder ungerade Function der Coordinate dieses inneren Punktes; und ist ϱ eine gerade oder ungerade Function des Abstandes vom Mittelpunkte, so ist auch V für innere Punkte eine gerade oder ungerade Function der Entfernung des inneren Punktes vom Kugelmittelpunkte.

Es folgt (§§ 4, 5) die Berechnung von V für einen inneren Punkt einer Kugel vom Radius 1, falls $\varrho = (1 - r'^2)^\beta f(r'^2)$ und allgemeiner $\varrho = (1 - r'^2)^\beta f(x', y', z')$ ist. Dabei bezeichnet f eine ganze rationale Function und r' den Abstand vom Mittelpunkte. Die Resultate ergeben sich in Form von Reihen, die nach ganzen Potenzen von r (Abstand des angezogenen Punktes vom Kugelmittelpunkte) fortschreiten, und deren Coefficienten Doppelintegrale über eine Kugelfläche sind. Ist speciell $\beta = \frac{n-4}{2}$, so wird V eine ganze rationale Function von demselben Grade wie $f(x', y', z')$.

Die für die Kugel gefundenen Resultate lassen sich (§§ 6-8) auf dreiaxige Ellipsoide übertragen. Dabei werden die folgenden Variablen (der Verf. nennt sie elliptische Polarcoordinaten) benutzt:

$$x = \frac{r \cos \vartheta}{\sqrt{F}}, \quad y = \frac{r \sin \vartheta \cos \omega}{\sqrt{F}}, \quad z = \frac{r \sin \vartheta \sin \omega}{\sqrt{F}},$$

$$F = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \omega}{b^2} + \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \omega}{c^2}.$$

Auch hier ergiebt sich, dass, wenn ϱ eine gerade oder ungerade Function der Grösse r' der elliptischen Polarcoordinaten ist, das Potential des Ellipsoids für einen inneren Punkt nach geraden oder ungeraden Potenzen von r entwickelbar ist. Ebenso werden die Fälle $\varrho = (1 - r'^2)^\beta f(r'^2)$

und $\varrho = (1 - r'^2)^\beta f(x', y', z')$ für innere Ellipsoidpunkte erledigt, wo f wieder eine ganze rationale Function bezeichnet und

$$r' = \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}}$$

ist. Ist speciell $\beta = \frac{n-4}{2}$ und f constant, so ist auch das Potential für innere Ellipsoidpunkte constant.

Da die bis dahin abgeleiteten Formeln eine directe Umkehrung des Problems, nämlich die Dichtigkeit des Fluidums in einer Kugel zu berechnen, wenn das Potential für innere Punkte gegeben ist, nicht zulassen, so wendet der Verf. von nun an mit Green Kugelfunctionen an. Er berechnet zuerst (§ 9) das Potential einer Kugelfläche, deren Dichtigkeit durch die Laplace'sche Kugelfunction $Y^{(i)}(\vartheta', \omega')$ ausgedrückt ist, dann das einer Kugel, deren Dichtigkeit gleich ist $Y^{(i)}(\vartheta', \omega')$, multiplicirt mit einer beliebigen Function von r'. Auch die frühere Aufgabe, bei der $\varrho = (1 - r'^2) f(x', y', z')$ war, wird jetzt (§ 11) weiter geführt, indem sowohl g^{1-n} als ϱ nach Kugelfunctionen entwickelt werden. Zwischen den Gliedern, die sich bei der Entwickelung von ϱ ergeben, und den entsprechenden Gliedern der Reihe für V, bezogen auf innere Punkte, bestehen gewisse lineare Gleichungen, die es für den Fall $\beta = \frac{n-4}{2}$ gestatten, umgekehrt aus der Reihe für V die für ϱ zu berechnen. Nebenbei wird (§ 10) bewiesen, dass jede rationale ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten nach Laplace'schen Kugelfunctionen entwickelbar ist. Hier hätte sich der Verf. einfach auf Heine's Kugelfunctionen (2. Aufl., I, 323 ff.) berufen können.

Gestützt auf die Resultate von §§ 11, 12, wendet sich der Verf. mit Green zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes des supponirten Fluidums in einer leitenden Kugel und in einer Kreisscheibe. Nach Erörterung der Gründe für die Annahme zweier Fluida von entgegengesetztem Vorzeichen (§ 13) wird zunächst (§ 14) das Gleichgewicht einer Kugel behandelt, der ein gewisses Quantum freien Fluidums mitgeteilt ist, ohne dass äussere Kräfte auf dieselbe wirken. Hier verteilt sich jenes Fluidum nicht nur auf der Oberfläche der Kugel, sondern auch im Innern, und zwar wird die Dichtigkeit der $\frac{n-4}{2}$-ten Potenz von $a^2 - r'^2$ (a der Kugelradius, r' der Abstand vom Kugelmittelpunkte) proportional. Wenn nun n zwischen 2 und 3 liegt, wird zwar an der Oberfläche die räumliche Dichtigkeit unendlich gross, die Flächendichtigkeit bleibt jedoch endlich. Schwierigkeiten macht der Fall $n < 2$. Für diesen stellt sich (§ 15) heraus, dass ein stabiler Gleichgewichtszustand nur dann eintreten kann, wenn man annimmt, dass die Mengen der beiden Fluida, welche die Kugel im natürlichen Zustande enthält, begrenzt sind. Im § 16 wird ferner das Gleichgewicht der Kugel betrachtet, wenn auf dieselbe

beliebige äussere Kräfte wirken. Zum Schluss endlich (§ 17) wird die Verteilung des Fluidums auf einer leitenden ebenen Kreisscheibe untersucht. Das Potential der Scheibe für einen inneren Punkt wird unter der Annahme $\varrho = (1 - r'^2)^\beta f(x', y')$ $[r'^2 = x'^2 + y'^2$, f eine ganze rationale Function] in eine trigonometrische Reihe entwickelt, dann $\beta = \frac{n-3}{2}$ angenommen. Die Beziehungen zwischen den Gliedern der Entwickelung von ϱ und von V gestatten, erstere aus den letzteren zu berechnen. Das Resultat, das sich hier ergiebt, lässt sich unmittelbar auf den Specialfall $n = 2$ anwenden, während die früheren, auf die Kugel bezüglichen Resultate in einer Form auftreten, die auf $n = 2$ nicht ohne weiteres anwendbar ist. Für die Kugel wäre eine Erörterung des Zusammenhanges des allgemeinen Falles $n \gtrless 2$ mit dem speciellen $n = 2$ erwünscht gewesen. Wn.

L. Koenigsberger. Ueber das erweiterte Newton'sche Potential. Berl. Ber. 1900, 1150-1158.

Im Anschluss an seine früher besprochenen Arbeiten über das erweiterte Newton'sche Potential (vergl. F. d. M. **29**, 657, 1898) leitet der Verf. hier folgende Resultate her. Ist eine nach dem Weber'schen Gesetze wirkende Masse mit überall endlicher und stetiger Dichtigkeit δ auf einer endlichen und stetig gekrümmten Fläche ausgebreitet, so bleibt ihr Potential

$$V = \iint \frac{\delta}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right) ds$$

auch endlich und stetig, wenn der angezogene Punkt senkrecht durch die anziehende Fläche hindurchgeht. Dagegen ändern sich die ersten Ableitungen von V bei diesem Durchgang discontinuirlich, und zwar ist, wenn n_i und n_a die innere und die äussere Normale bezeichnen, n' die Projection der Geschwindigkeit des Punktes auf die Flächennormale:

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial n_i'}\right) + \frac{\partial V}{\partial n_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial n_a'}\right) = -4\pi\delta\left(1 + \frac{n'^2}{k^2}\right).$$

Ist ferner U das Potential räumlicher Massen, die nach demselben Gesetze wirken, σ ihre Dichtigkeit, also

$$U = \iiint \sigma \frac{d\tau}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right),$$

so gilt für einen ausserhalb der anziehenden Masse liegenden Punkt die Beziehung

$$\Delta_{00} U - \frac{d}{dt}(\Delta_{10} U) = \frac{2}{R^2}(x'' X + y'' Y + z'' Z),$$

worin X, Y, Z die Componenten der Kraft sind, welche das gegebene Massensystem nach dem Newton'schen Gesetze auf den Punkt ausüben

würde. (Ueber die Bedeutung der Symbole Δ_{00}, Δ_{10} vergl. das oben citirte Referat.) An Stelle der letzten Gleichung tritt für Punkte der Masse die folgende:

$$\Delta_{00} U - \frac{d}{dt}(\Delta_{10} U) = -4\pi\sigma\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) + \frac{2}{k^2}(x''X + y''Y + z''Z),$$

worin v die Geschwindigkeit ist. Es folgt dies daraus, dass man die ersten Ableitungen von U darstellen kann als Summe aus einem Flächen- und einem Raumpotential. Die Discontinuität des ersteren ergiebt die discontinuirliche Ableitung von $\Delta_{00} U - \frac{d}{dt}(\Delta_{10} U)$ bei Durchgang von dem Aussenraume zu Punkten der Masse nahe der Oberfläche. Das Resultat für innere Punkte endlich wird dadurch abgeleitet, dass man durch eine in unmittelbarer Nähe des Punktes gelegte Fläche, deren Normale die Richtung der Geschwindigkeit hat, die Masse in zwei Teile zerlegt.

Zum Schluss wird die letzte Gleichung für eine homogene Vollkugel verificirt. Wn.

T. Boggio. Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque. Torino Atti **35,** 498-509.

Als Green'sche Function m-ter Ordnung und erster Art in einem von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raume S wird diejenige Function G bezeichnet, die innerhalb S m-fach harmonisch ist [d. h. der Gleichung $\Delta^{2m} G = 0$ genügt, wo Δ^{2m} die m-fache Wiederholung der Operation Δ^2 bezeichnet, $\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$], die ferner an der Grenze von S den Bedingungen

$$(1) \qquad \frac{\partial^i G}{\partial n^i} = \frac{\partial^i r^{2m-3}}{\partial n^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

genügt. n ist dabei die innere Normale der Grenzfläche von S und r der Abstand eines festen Punktes P_1, des Pols, von einem beliebigen Punkte P von S. Von dieser Function wird gezeigt, dass sie, ebenso wie die einfache Green'sche Function, ihren Wert nicht ändert, wenn man den Pol P_1 und den Bezugspunkt P vertauscht. Ist also $G_0(P_1)$ der Wert von G in P_1 für den Pol P_0, $G_1(P_0)$ der Wert von G im Punkte P_0 für den Pol P_1, so ist

$$G_0(P_1) = G_1(P_0).$$

Der Beweis beruht auf einer Erweiterung des Green'schen Satzes, wonach man das über S erstreckte Raumintegral

$$\int_{\varphi} (U \Delta^{2m} V - V \Delta^{2m} U)\, dS$$

durch ein Oberflächenintegral ersetzen kann.

Ausserdem wird gezeigt, dass man den Bedingungen (1) noch eine andere Form geben kann; z. B. für gerade m:

$$(1') \qquad \Delta^{2i-2} G = \Delta^{2i-2}\, r^{2m-3}, \quad \frac{\partial \Delta^{2i-2} G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2i}\, r^{2m-3}}{\partial n},$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right).$$

Ferner wird der Satz auf eine beliebige Zahl n von unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt. Endlich wird noch eine andere Erweiterung angedeutet, die dadurch entsteht, dass die Function G nicht allen Bedingungen (1') genügt, sondern nur einigen derselben. Die so erhaltenen Functionen werden Green'sche Functionen m-ter Ordnung und zweiter, dritter, ... Art genannt. Wn.

S. Valentiner. Untersuchungen über die Beziehung zwischen dem Potential einer homogenen Kugel und dem des Mittelpunktes. Diss. Heidelberg. 65 S. 8°. (Karlsruhe, 1900.)

Die im ersten Teile der Arbeit behandelte Aufgabe lautet: „Wie muss ein Anziehungsgesetz, welches von der Entfernung des anziehenden Punktes vom angezogenen abhängt, beschaffen sein, damit zwischen der nach diesem Gesetz erfolgenden Anziehung der Kugeloberfläche in Bezug auf einen äusseren Punkt und der Anziehung des mit der Masse der Kugeloberfläche behafteten Mittelpunktes ein algebraischer Zusammenhang besteht, welcher unabhängig ist von der Lage des äusseren Punktes im Raume?" Als einzige transcendente Function wird die Potentialfunction

$$(1) \qquad \varphi = \frac{c_1}{z} e^{a_1 z} + \frac{c_2}{z} e^{-a_1 z} + c_3$$

gefunden. Rational lässt sich das Potential V der Kugeloberfläche durch das Potential W des Mittelpunkts ausdrücken, wenn φ ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\varphi}{dz} = c_1 \varphi + c_2$$

ist, oder die Form $\varphi = A_1 z + A_2$ hat. V ist gleich W bei Zugrundelegung eines Potentialgesetzes von der Form $\varphi(r) = a_1 + a_2/r$, und nur dann. V ist durch W linear ausdrückbar in den Fällen:

$$(a) \qquad \varphi(r) = a_1 r^2 + a_2 + \frac{a_3}{r},$$

$$(b) \qquad \varphi(r) = \frac{b_1}{r} e^{Ar} + \frac{b_2}{r} e^{-Ar} + b_3.$$

Im zweiten Teile der Arbeit wird die Frage in der Weise erweitert, dass die gesuchten Anziehungsgesetze ausser von der Entfernung auch von den Ableitungen der Entfernung nach der Zeit abhängig angenommen werden. Es wird jedoch nur der Fall, dass die Anziehungsgesetze die

erste Ableitung enthalten, ausserdem einschränkende Annahmen über die Abhängigkeit gemacht werden, näher untersucht. Wir übergehen die Resultate, die ja vorläufig nur ein rein theoretisches Interesse beanspruchen.

In einem dritten Teile wird endlich die Beziehung behandelt zwischen den Bewegungsvorgängen eines Punktes unter dem Einfluss einer homogenen materiellen Kugelfläche und denen unter dem Einfluss des mit der Masse der Kugel behafteten Mittelpunktes, wobei unter anderem die Frage beantwortet wird, wann die bekannten Integralprincipe bestehen können. Auch hier müssen wir auf eine Wiedergabe der einzelnen Ergebnisse verzichten. Die dem Professor L. Koenigsberger gewidmete Arbeit, welche den Einfluss dieses Gelehrten in mehrfacher Beziehung verrät, ist ein hübscher Beitrag zur Lehre von den Potentialgesetzen. Doch ist zu bemerken, dass das Gesetz (1) bereits von G. Bakker in Amst. Konink. Akad. v. Wetensch. 1899 gefunden ist.

Lp.

W. Peddie. Elementary proof of the potential theorems regarding uniform spherical shells. Edinb. M. S. Proc. **18**, 30.

R. F. Muirhead. Remark on Dr. Peddie's proof. Edinb. M. S. Proc. **18**, 32.

Der Beweis besteht darin, dass gezeigt wird, in einem Punkte P habe das Potential einer Zone, die der Einheitsdifferenz von Linien entspricht, welche von P nach der Oberfläche gezogen werden, den Wert $2\pi a\sigma/CP$, wo C das Centrum und a den Radius der Kugel bezeichnet, σ die Oberflächendichtigkeit ist. Gbs. (Lp.)

G. Prasad. On the potentials of ellipsoids of variable densities. Messenger (2) **30**, 8-15.

Der Verf. giebt für das Potential eines Ellipsoids bei beliebig gegebenem Gesetze der Kraftwirkung wenig übersichtliche Reihenentwickelungen in symbolischer Gestalt und zieht aus den erhaltenen Formeln einige Folgerungen. So liefert eine seiner Formeln „eine einfache und elegante Entwickelung jeder algebraischen ganzen Function nach Kugelfunctionen". Eine andere enthält Resultate, die früher von Niven (1893) und Routh (1895) gewonnen sind, als besondere Fälle. Die ungemein knappe Abfassung des Textes erschwert das Verständnis der Abhandlung. Lp.

R. Pitoni. Sul potenziale di forze direttamente proporzionali alla distanza. Suppl. al Period. **3**, 65-70.

Als Fortsetzung des Artikels „Sopra una formola di Eulero" bezeichnet (vergl. S. 507 dieses Bandes), wo schon Anwendungen auf

Schwerpunkte und Trägheitsmomente gemacht wurden, macht der gegenwärtige Aufsatz Gebrauch von den dortigen Betrachtungen zur elementaren Ableitung von Sätzen über das Potential von Kräften, die der Entfernung proportional wirken. Lp.

A. Sella. Sur une nouvelle méthode proposée par M. Gerschun de détermination de la densité de la Terre. Arch. sc. phys. et nat. (4) **10**, 322-328.

Die Note kritisirt einen von Gerschun in C. R. **129**, 1013-1015 gemachten Vorschlag, nach welchem die durch die Attraction einer homogenen Kugel bewirkte Deformation der horizontalen Oberfläche einer Flüssigkeit zur Bestimmung der Gravitationsconstante benutzt werden sollte. Zunächst wird darauf hingewiesen, dass die feste Kugel, welche in der Nähe des Flüssigkeitsspiegels sich befindet, und die Flüssigkeit selbst auf verschiedenen elektrischen Potentialen sind, und dass nach einer anderen Veröffentlichung des Verf. (Rom. Acc. L. Rend. **9**$_2$, 80) dadurch eine ähnliche Deformation der Flüssigkeitsoberfläche erzeugt wird wie durch die Gravitation. Daher muss dafür gesorgt werden, dass die elektrische Einwirkung, die von derselben Grössenordnung sein kann wie die der Schwere, eliminirt werde. Sodann wird gezeigt, dass die Ausdehnung der Deformation der Oberfläche so gering ist, dass die von Gerschun angegebenen optischen Messungen kaum Aussicht auf Erfolg bieten. Lp.

M. Brillouin. Constante de la gravitation universelle. Sur une cause de dissymétrie dans l'emploi de la balance de Cavendish. C. R. **131**, 1293-1296.

In Wied. Ann. **59**, 354ff., 1896 hat Eötvös gezeigt, dass ein horizontaler geradliniger Hebel, der um eine durch sein Centrum gehende verticale Axe drehbar ist und an seinen Enden kleine gleiche, in demselben Niveau liegende Massen trägt, im Felde der Schwere einem Kräftepaare unterliegt, das ihn in die Richtung der Krümmungslinie des grössten Krümmungsradius bringt (oberhalb einer Berührungsebene des geodätischen Umdrehungsellipsoids in der Richtung EW). Verf. berechnet den Einfluss dieser Ursache auf das Experiment von Cavendish und hebt zwei Sätze hervor: Da der Torsionscoefficient des Drahtes von der Temperatur abhängt, so wandert der Nullpunkt des Cavendish'schen Hebels, wenn die Temperatur sich ändert; er nähert sich der freien stabilen Orientirung, wenn die Temperatur steigt. Die Dissymmetrie der Ausschläge nach rechts und nach links lässt den Torsionswinkel des Drahtes beim Nullpunkte erkennen; wie dieser Winkel, so nimmt auch die Dissymmetrie bei steigender Temperatur zu, und zwar in demselben Verhältnisse. Lp.

M. Brillouin. La constante de la gravitation universelle et les irrégularités locales de la pesanteur. Soc. franç. de phys. Nr. 155, 2, 1900.

Kurzer Bericht über einen referirenden Vortrag. Lp.

C. V. Boys. La constante de la gravitation. Rapports du Congr. intern. de Phys. 3, 306-349.

R. Bourgeois. Répartition de l'intensité de la pesanteur à la surface du globe. Ibid. 350-370.

R. Eötvös. Étude sur les surfaces de niveau et la variation de la pesanteur et du champ magnétique. Ibid. 371-393.

O. Krigar-Menzel und F. Richarz. Bemerkungen zu dem auf dem internationalen Congress zu Paris von Herrn C. V. Boys erstatteten Bericht über die Gravitationsconstante. Phys. Zeitschr. 2, 135-136; Naturw. Rundsch. 15, 552.

In unserem Jahrbuch genügt es, die Titel dieser referirenden Artikel anzuführen; Ausführlicheres findet man in den „Fortschritten der Physik“. Lp.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

H. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet. Bd. I. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XVII u. 506 S. 8°.

Wenn sich das vorliegende Werk als vierte Auflage von Riemann's bekannten, 1869 in erster Auflage erschienenen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen bezeichnet, so hat das insofern seine Berechtigung, als dem Werke derselbe Plan wie jenen Vorlesungen zu Grunde liegt und es sich letzteren auch in seiner ganzen Anlage eng anschliesst. Aber nur den äusseren Rahmen hat Weber von Riemann übernommen; inhaltlich hat er ein vollständig neues, viel umfangreicheres Werk geschaffen, das allerdings ganz in Riemann's Sinn und Geist verfasst, in Darstellung und Behandlung der Einzelheiten aber durchaus eigenartig ist. Neben dem von Riemann behandelten Stoffe sind auch die neuen Aufgaben berücksichtigt, um die seit den letzten vierzig Jahren (Riemann's Vorlesungen sind zuletzt im Winter 1860-1861 gehalten) die mathematische Physik bereichert ist, und ebenso ist den Fortschritten, welche die Mathematik seit jener Zeit bezüglich der Integration der partiellen Differentialgleichungen gemacht hat, Rechnung getragen. Ferner ist auch die Theorie der Elektricität und des Magnetismus, die in den Hattendorff'schen Ausgaben der Vorlesungen fehlte, aufgenommen.

Mit den alten Vorlesungen hat das neue Werk das gemein, dass es kein physikalisches Lehrbuch sein will und daher die einzelnen physikalischen Theorien nur soweit entwickelt, als es zum Verständnis der

behandelten Probleme erforderlich ist. Der Schwerpunkt liegt in der mathematischen Behandlung der einzelnen Probleme, bei deren Auswahl besonders auf das mathematische Interesse Gewicht gelegt ist. Fragen von nur mathematischem Interesse, wie z. B. die nach der Existenz von Lösungen, sind nicht in den Kreis der Betrachtungen gezogen.

Unzweifelhaft wird sich das vortreffliche Werk, das einen vollgültigen modernen Ersatz der Riemann'schen Vorlesungen bildet, ebenso viele Freunde erwerben wie seinerzeit die genannten Vorlesungen.

Zur Orientirung über den Inhalt des Buches fügen wir die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte des vorliegenden ersten Bandes hinzu. Erstes Buch, analytische Hülfsmittel. I. Bestimmte Integrale. II. Der Fourier'sche Lehrsatz. III. Unendliche Reihen. IV. Fourier-sche Reihen. V. Mehrfache Integrale. VI. Functionen complexen Arguments. VII. Differentialgleichungen. VIII. Bessel'sche Functionen. — Zweites Buch, geometrische und mechanische Grundsätze. IX. Lineare infinitesimale Deformation. X. Vectoren. XI. Potentiale. XII. Beispiele zum Potential. XIII. Kugelfunctionen. XIV. Ueberblick über die Grundsätze der Mechanik. — Drittes Buch, Elektricität und Magnetismus. XV. Elektrostatik. XVI. Probleme der Elektrostatik. XVII. Magnetismus. XVIII. Elektrokinetik. XIX. Elektrolytische Leitung. XX. Stationäre elektrische Ströme. XXI. Strömung der Elektricität in Platten. XXII. Strömung der Elektricität im Raume. XXIII. Elektrolytische Verschiebungen.

Wn.

H. Poincaré. Relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 1-29.

Diese Eröffnungsrede für den internationalen Physikercongress in Paris 1900 bildet ein Seitenstück zu der Rede des Verf., die auf dem ersten internationalen Mathematikercongresse in Zürich verlesen wurde (F. d. M. **29**, 53, 1898). Mit französischem Witz und in geistreichen Vergleichen führt der Verf. seine Betrachtungen unter den folgenden Gesichtspunkten durch: Rolle des Experimentes und der Verallgemeinerung. Die Einheit der Natur. Rolle der Hypothese. Ursprung der mathematischen Physik. Bedeutung der physikalischen Theorien. Die Physik und der Mechanismus. Gegenwärtiger Zustand der Wissenschaft.

Lp.

J. Larmor. Address as president of the mathematical and physical section of the British Association. Brit. Ass. Rep. 1900, 613-628.

Die Eröffnungsrede ist hauptsächlich der Betrachtung des Zweckes und des Wertes der molecularen Vorstellungen gewidmet, an die sich der Gang der physikalischen Erklärung und Entwickelung jetzt in einer so ausgesprochenen Weise hält. Gbs. (Lp.)

H. A. Rowland. The highest aim of the physicists. Johns Hopkins Univ. Circ. **19**, 17-20.

Vortrag über neuere Probleme der Mechanik und Physik. Br.

M. Maclean. Exercises in natural philosophy, with indications how to answer them. London: Longmans, Green, and Co. X + 266 S.

M. Maclean and E. W. Marchant. Elementary questions in electricity and magnetism. London: Longmans, Green, and Co. VIII + 59 S.

Diese beiden Sammlungen von Aufgaben werden von allen Lehrern der Physik mit Nutzen gebraucht werden. Gbs. (Lp.)

J. R. Benoît. De la précision dans la détermination des longueurs en métrologie. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 30-77.

Ch. Éd. Guillaume. Les unités de mesure. Ibid. 78-100.

In diesen für den internationalen Physikercongress abgefassten Berichten findet man die leitenden Gesichtspunkte für das Messen und die gebräuchlichen Masssysteme. Lp.

P. Volkmann. Zur Theorie der physikalischen Masssysteme und Dimensionen. Poske Z. **13**, 146-152.

Infolge einer Aufforderung des Herausgebers der Zeitschrift legt der Verf. seine Anschauungen über die Bedeutung, welche den Dimensionen physikalischer Begriffe in Verbindung mit den Masssystemen zukommt, an der Hand einer historisch-erkenntniskritischen Studie dar und fasst am Schlusse die Ergebnisse seiner Betrachtungen in sechs Sätze zusammen. Lp.

H. Kuhfahl. Einige Bemerkungen zur Dimensionslehre. Poske Z. **13**, 18-23.

Erwiderungen gegen die bezüglichen Aufsätze von Pietzker aus 1899. Lp.

M. Le Sage. The Le Sage theory of gravitation. [Translation by C. G. Abbot, with introductory note by S. P. Langley]. Smithsonian Rep. for 1898, 139-160.

Die französisch geschriebene Originalabhandlung von Le Sage, in welcher die später so oft besprochene Hypothese von einem Hagelschauer der das Weltall durchschwirrenden Atome zur Erklärung der Gravitation aufgestellt ist, befindet sich in den Nouveaux Mémoires de l'Académie

Royale de Berlin, Année 1782, p. 404-427, und ist 1784 erschienen. Wie Langley in dem Vorworte bemerkt, wird diese Schrift zwar oft angeführt, dürfte aber nur von Wenigen gelesen sein. Die von C. G. Abbot angefertigte englische Uebersetzung ist dazu bestimmt, dem Mangel abzuhelfen. Ref. bekennt, dass auch er den „Newton'schen Lucretius" von Le Sage jetzt zum ersten Male gelesen hat und durch die darin enthaltene Anticipation mancher Vorstellungen aus der kinetischen Gastheorie, auf welche Langley besonders hinweist, überrascht worden ist.

Lp.

H. A. Lorentz. Considerations on gravitation. Amst. Ak. Versl. (Proc.) 2, 559-574.

Im ersten Teile der Abhandlung (holländisch: Beschouwing over de zwaartekracht) wird der Versuch gemacht, die Gravitationskraft aus der Annahme eines Zustandes des Aethers herzuleiten. Der Verf. nimmt an, jedes Teilchen wägbarer Materie bestehe aus zwei Ionen mit gleichen, entgegengesetzten Ladungen, oder enthalte zwei solcher Ionen, und die Gravitation sei das Resultat der an diesen Ionen vom Aether ausgeübten Kräfte. Nimmt man ferner an, dass elektrische Schwingungen von äusserst kleiner Wellenlänge den Aether durchziehen, so erhebt sich die Frage, ob darin die mögliche Ursache der Gravitation zu suchen sei, welche Einwirkung dadurch nämlich auf die Ionen ausgeübt werden würde. Die genauere mathematische Untersuchung führt jedoch zu einem negativen Ergebnisse. „Der Umstand, dass diese Anziehung nur bestehen könnte, wenn in der einen oder der anderen Weise elektromagnetische Energie stetig verschwände, ist eine so ernste Schwierigkeit, dass alles Vorgebrachte nicht als Quelle einer Erklärung für die Gravitation erachtet werden kann. Das ist nicht einmal der einzige zu erhebende Einwand. Wenn der Mechanismus der Gravitation in Schwingungen bestände, die den Aether mit der Lichtgeschwindigkeit durchqueren, so müsste die Gravitation durch die Bewegung der Himmelskörper in einer viel höheren Ausdehnung abgewandelt werden, als man nach astronomischen Beobachtungen zuzulassen berechtigt ist."

Im zweiten Teile zieht der Verf. Folgerungen aus einer Annahme, die er selbst als eine Modification der von Mossotti, Wilhelm Weber und Zöllner verfolgten Gedanken bezeichnet. Aus den Zahlenbeispielen, die für die Störungen der Planeten, insbesondere des Merkurs, berechnet werden, ergiebt sich, dass die vorgeschlagene Modification des Newton'schen Gesetzes die beobachtete Ungleichheit in der Länge des Perihels nicht ergiebt; sonst aber spreche nichts gegen die aufgestellten Formeln. Die Ueberlegungen zeigten also, dass die Schwere solchen Actionen zugeschrieben werden könnte, die mit keiner grösseren Geschwindigkeit als der des Lichtes fortgepflanzt werden. Lp.

J. J. Gilles. Die Gravitation der kleinsten Massenteilchen. Essen: G. D. Baedecker. 42 S. gr. 8°.

Der Verf. verficht die Ansicht, dass die Kraft die letzte und wahre Ursache sei, ein Seiendes, dessen Wesen in seinem Thätigsein bestehe, ein Thätigseiendes. Die Welt ist ein Ganzes mit unendlichem inneren Reichtum, von unendlichem Inhalt, die Einheit einer Unendlichkeit. Die Gravitation ist die Thatsache der Einheit des unendlichen Alls, das Gravitationsgesetz das äussere Gewand ihrer unendlichen Thätigkeit. — Für den Verf. ist also die Gravitation etwas thatsächlich Gegebenes, nicht weiter zu Erklärendes; somit bekennt er sich zu dem extremsten Standpunkte derer, welche die Gravitation als eine qualitas occulta der Atome ansehen. Als seine Aufgabe sieht er es an, alle Erscheinungen der Bewegung, welche in der Natur beobachtet werden, alle Kräfte, die mit anderen Namen belegt sind, auf diese eine Urkraft zurückzuführen. Die bezüglichen Veröffentlichungen des Verf., über welche im Jahrbuche referirt ist, sind drei Artikel aus dem Jahre 1873 in der Zeitschr. für Math. **18**, 123-141, 517-520, 601-609, das Programm des Düsseldorfer Gymnasiums von 1880, des Essener Gymnasiums von 1881, ein Aufsatz in den Blättern für das bayerische Gymnasialschulwesen **18** (1882), endlich einer in der Gaea **22**. Die vorliegende Schrift ist wohl als eine zusammenfassende Darstellung dieser vorangehenden Arbeiten zu betrachten und scheint nur in den Abschnitten IV bis VIII neue Berechnungen zu bringen. Die Titel der Abschnitte sind: I. Die Gravitation ist die Grundthätigkeit des Seienden. II. Die Zurückführung der Cohäsion auf die Gravitation und der innere Bau der festen Körper. III. Die Anziehung einer Molecülreihe. IV. Anziehung einer materiellen Ebene. V. Anziehung einer materiellen Schicht. VI. Die Dichtigkeit der Atome und die chemische Verwandtschaft. VII. Die Auflösung der Kometen und die Entstehung der kleinsten Massengebilde. VIII. Die Schmelz- und Dampfwärme. Lp.

R. A. Fessenden. Inertia and Gravitation. Science (N. S.) **12**, 325-328.

Der Artikel ist ein Auszug aus einer grösseren Arbeit, deren Veröffentlichung in Aussicht gestellt wird. Nach einer Uebersicht über die Ansichten, welche Verf. in seinen Schriften seit 1891 entwickelt hat, fasst er seine neue Theorie in dem folgenden Satze zusammen: „Die Trägheit der Materie rührt von der elektromagnetischen Inducirung der corpuscularen Ladungen her, und die Gravitation rührt von der Dichtigkeitsänderung des die Corpuskeln umgebenden Aethers her, indem diese Dichtigkeitsänderung eine secundäre, aus den elektrostatischen Spannungen der corpuscularen Ladungen entspringende Wirkung ist.“ Lp.

R. A. Fessenden. A determination of the nature and velocity of gravitation. Science (N. S.) **12**, 740-759.

Als Nachtrag zu der Abhandlung „The nature of the electric and

magnetic quantities“ (Phys. Review, Jan. 1900) verfasst, ist der Artikel der Vorläufer einer vom Verf. geplanten ausführlicheren Arbeit über die Theorie der Gravitation. Da die Vollendung dieser Arbeit aber vorläufig auf Jahre hinausgeschoben ist, so entwickelt der gegenwärtige Aufsatz unter fortwährender Verweisung auf frühere Schriften des Verf. aus dem Gebiete der Elektricitätslehre diejenigen Ueberlegungen, welche ihn zum Ziele geführt haben, und in denen er sich der Hülfsmittel der „qualitativen Mathematik“ bedient. Er gelangt zu dem Schlusse: „Hieraus können wir den Wert der „compressionalen oder gravitationalen Welle berechnen und finden ihn angenähert zu 5.10^{36} cm in der Secunde“.... „Wir können unsere Schlüsse wie folgt zusammenfassen: Der Aether selbst ist ein zusammengesetzter Körper mit einer Structur, deren elastische Eigenschaften denen des Gummis analog sind.“ Lp.

W. S. Franklin. The electrical theory of gravitation. Science (N.S.) **12**, 887-890.

Der Verf. begründet die Bedenken, welche für ihn und alle von ihm befragten Physiker gegen die Annahme der von Fessenden in den vorstehenden Schriften entwickelten Anschauungen bestehen. Zunächst bemängelt er die Anwendung der nach Lord Rayleigh's Vorbild (Investigation on capillarity, Phil. Mag. (5) **48**, 1899) benutzten „qualitativen Mathematik“, wobei der Verf. eine als Factor hinzuzufügende unbekannte und nicht erkennbare Function unbeachtet gelassen hätte. Danach werden die jetzigen Anschauungen der Physiker über die Constitution der Materie und die Natur von Trägheit und Gravitation kurz dargestellt, woraus hervorgehe, dass blosse Aether-Compression allein zur Erklärung der Gravitation nicht ausreiche. „Wenigstens muss die Compressionsenergie nicht einfach dem Quadrate der resultirenden Feldintensität proportional sein; denn in diesem Falle würde die Compressionsenergie nicht unterscheidbar sein von der Verdrehungsenergie, die zu der gewöhnlichen elektrischen Anziehung und Abstossung Anlass giebt.“ Lp.

J. H. Poynting. Recent discoveries in gravitation. Nature **62**, 403-408.

Vortrag in der Royal Institution, der einen guten Ueberblick über die Arbeiten zur Bestimmung der Gravitationsconstante und überhaupt über die Theorie der Gravitation giebt. Lp.

J. B. Staub. Die naturgemässe Erklärung der Bewegung durch die Entdeckung oder Erkenntnis der einheitlichen Grundursache derselben. Leipzig: Gustav Schlemminger. 36 S. gr. 8°.

Die Ansichten des „Verfassers von Die thatsächliche Widerlegung der

Newton'schen Hypothese von der allgemeinen Anziehungskraft" (1898) sind schon vor zwanzig Jahren in einer Reihe von Schriften als neue Weltanschauung bekannt gegeben. Die vorliegende Schrift wiederholt diese „eigenartige Naturerklärung", zieht aus ihr Schlüsse für die verschiedensten Processe, bekämpft z. B. auf Grund derselben die Lehre vom Kreislauf des Blutes, „der wie seine Grundlage nur ein Irrtum sein kann", und wirft der ganzen Weltwissenschaft den Fehdehandschuh hin mit der Behauptung, dass das in dieser Schrift dargelegte Erklärungssystem der Natur das einzige naturgemässe Erklärungssystem des Daseins sei. Lp.

J. D. van der Waals Jr. Over het verband tusschen straling en moleculaire attractie. Amst. Versl. **9**, 46-55.

Betrachtungen über die Frage, ob die ponderomotorische Wirkung der Strahlung zur Erklärung der Molecularattraction ausreicht. Lp.

Lord Kelvin. On the motion produced in an infinite elastic solid by the motion through the space occupied by it of a body acting on it only by attraction or repulsion. Phil. Mag. (5) **50**, 181-198.

Es wird die Annahme gemacht, dass in einem isotropen Medium jedes Atom auf die umgebenden Aetherteile ohne anziehende oder abstossende Wirkung ist, auf die in seinem (kugelförmig gedachten) Innern befindlichen Teile dagegen derartig wirkt, dass eine Reihe concentrischer Kugelschalen von stetig sich ändernder Dichte entsteht. Und zwar soll der Radius r einer hierdurch radial verrückten Kugelschale mit dem Radius r' der unverrückten durch die Gleichung verbunden sein:

$$r^3 = r'^3/(1+100\,(1-r')^2),$$

wobei der Radius des Atoms $= 1$ gesetzt ist. Unter dieser Voraussetzung werden graphische Methoden zur Ermittelung der Verschiebungsbahn eines Aetherpunktes gegeben, wenn es in den Bereich eines gleichmässig bewegten Atoms gelangt, und wenn ein Aetherstrom sich durch ein ruhendes Atom bewegt, sowie für die hieraus resultirenden Aenderungen der Brechung. Br.

Lord Kelvin. Sur le mouvement d'un solide élastique traversé par un corps, agissant sur lui par attraction ou par répulsion. Rapports Congr. intern. Phys. **2**, 1-22.

Vergl. das vorangehende Referat.

G. H. Bryan. Energy accelerations, a study in energy partition and irreversibility. Arch. Néerl. (2) **5**, 279-294.

In dem vom Verf. betrachteten Problem wird angenommen, dass

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Coordinaten eines Systems zwischen bezeichneten Grenzen liegen, gegeben ist, und es wird verlangt, hiernach die Verteilung der Geschwindigkeiten zu erforschen, damit der Zustand des Systems ein stationärer sei. Die Methode bei der Anwendung dieses Problems besteht in der Gewinnung von Ausdrücken für die zweiten Differentialquotienten nach der Zeit bei Quadraten und Producten von Geschwindigkeiten, wie diese in den Ausdruck der kinetischen Energie eingehen; für diese zweiten Differentialquotienten wird die Benennung „Energie-Beschleunigungen" in Vorschlag gebracht. Aus den so erhaltenen Ausdrücken werden Gleichungen für das Gleichgewicht der Energie gefunden, ferner Bedingungen für die Stabilität des stationären Zustandes; dieselben besitzen eine so grosse Analogie mit der Temperaturbedingung der Thermodynamik, dass der Verf. meint, in ihnen sei vielleicht der wahre Wegweiser für die Lösung des Problems der Energieverteilung gegeben, während die von diesen Bedingungen geforderten Beschränkungen auf nicht unwahrscheinliche Weise über das Versagen des Maxwell'schen Gesetzes der Energieverteilung bei manchen physikalischen Erscheinungen Aufschluss geben können. Die Methode giebt ferner eine dynamische Basis für die Erscheinung der Irreversibilität, die mit der Annahme, dass jede Bewegung des Systems gleich wahrscheinlich mit der entgegengesetzten sei, nicht unverträglich ist. In dem vorliegenden Aufsatze wird diese Methode nur an einigen ganz einfachen Beispielen erläutert, die allgemeine Lösung aber späterer Forschung vorbehalten.

Lp.

J. Farkas. Allgemeine Principien für die Mechanik des Aethers. Arch. Néerl. (2) **5**, 56-75.

Dieser Artikel ist als Fortsetzung derjenigen Aufsätze anzusehen, in denen der Verf. seine Betrachtungen über das erweiterte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, von ihm das Fourier'sche Princip genannt: $\Sigma P\delta p \gtreqless 0$, niedergelegt hat (F. d. M. **25**, 1356, 1894 und **30**, 616, 1899). Gegenwärtig wird das Princip nach drei Seiten hin erweitert.

a) In der Regel besitzt das erwähnte Ungleichheitsprincip, ebenso wie das Gleichheitsprincip in seiner ursprünglichen Bedeutung nur dann einen annehmbaren Sinn, wenn kein Widerstand des umgebenden Mediums und keine Reibung vorhanden ist. Im Kapitel I wird das Ungleichheitsprincip in der Weise erweitert, dass sich dasselbe auch auf diese beiden Zubehöre des Zwanges erstreckt. b) Die zweite Erweiterung bezieht sich auf die analytische Definition des Zwanges. Gewöhnlich wird angenommen, dass der Zwang sich immer durch ein einziges System von homogenen linearen Relationen (Gleichungen und Ungleichungen) zwischen den Componenten der virtuellen Verschiebungen ausdrücken lässt. Durch diese Annahme erleidet aber der Inhalt der Mechanik eine Einschränkung. Es können sogar ziemlich einfache Fälle bezeichnet werden, in welchen zu der Bestimmung der virtuellen Verschiebungen ein einziges System von homogenen linearen Relationen nicht genügt. c) Während die Aus-

führungen der beiden ersten Paragraphen sich auf die Voraussetzung getrennter Massenpunkte stützen, wird in Kapitel III der Uebergang zur stetigen Raumerfüllung vollzogen. In Verbindung damit steht die dritte Erweiterung, welche die Zusammensetzung der Körper aus Bestandteilen betrifft, die verschiedenen freien Kräften und verschiedenen Zwängen gehorchen. Es wird nämlich die Annahme zugelassen, dass zwischen diesen Bestandteilen im allgemeinen Umwandlungen von statten gehen, wie durch Veränderungen des Aggregatzustandes, durch allotropische Modificationen, durch chemische Processe u. s. w. Hiermit wird eine besondere Art der Veränderlichkeit des Zwanges eingeführt und die sogenannte Continuitätsgleichung verallgemeinert.

Endlich wird in Kapitel IV die Hypothese zugelassen, dass in einem unabhängigen Massensysteme bei gewissen Lagen der Coordinatenaxen gar keine freien Kräfte obwalten, und es werden Anweisungen zur Anwendung auf die Mechanik des Aethers aufgezählt. Lp.

G. Dillner. Sur le mouvement des éléments d'une molécule de la màtière pondérable d'après la loi de Newton. Stockh. Öfv. 57, 1145-1165.

Der durch seine Untersuchungen über das Problem der n Körper bekannte Verf. wendet die Ergebnisse jener Forschungen auf die Frage an, wie das Newton'sche Gesetz die Bewegung der Bestandteile eines Molecüls regelt. Die von ihm entwickelte Theorie macht die in der Physik und in der Chemie beobachteten Erscheinungen von den Vibrationen eines Molecüls um seinen Schwerpunkt abhängig. Diese Vibrationen erregen zugeordnete Vibrationen des Aethers und pflanzen sich mittels derselben unter der Form der Energie zu den Elementen eines anderen Molecüls fort, um in ihnen eine oscillatorische Bewegung und somit in dem Molecül selbst eine Vibrations-Bewegung um seinen Schwerpunkt zu erregen. Die von der Analysis vorgezeichnete Art der Anschauung macht die besagten Erscheinungen dadurch verständlich, dass sie ihre qualitativen Eigenschaften in quantitative verwandelt: Man kann die Möglichkeit eines anderen Gesetzes der Anziehung und Abstossung als des Newton'schen zugeben, nach dem das Problem der n Körper sich integriren lässt; aber die analytischen Eigenschaften des Newton'schen Gesetzes machen es für jede geregelte Bewegung der Elemente eines Molecüls unerlässlich. Als einen gegen die angenommene Moleculartheorie gerichteten Einwand bezeichnet der Verf. die Bemerkung, dass diese Theorie eines bestimmten Anziehungs- und Abstossungsgesetzes ermangele. Zur Erläuterung der Ideen des Verf. diene das Beispiel des Molecüls H_2O. Wenn die drei Elemente H, H, O ein gleichseitiges Dreieck bilden und geradlinige Oscillationen ausführen, so befindet sich ihr Aggregat in dem Zustande der Krystallisation. Nach Zufuhr einer gewissen Energiemenge gehen die geradlinigen Bahnen der Elemente in die Kreisform über: das Molecül ermangelt jeder Vibration, es gehört dem

flüssigen Zustande an. Bei abermaliger Zufuhr von Energie verwandeln die Elemente ihre Bahnen in elliptische, und das Molecül H_2O beginnt Vibrationen auszuführen, deren Amplitude mit der Excentricität jener Bahnen wächst, in welchem Falle das Aggregat H_2O den gasförmigen Zustand darstellt. „Auf diese Weise ist zwischen den drei Aggregatzuständen Continuität vorhanden in dem Masse, wie die Aenderung der Constanten der lebendigen Kräfte und der Flächen $\mathfrak{K}$ und K zwischen gehörigen Grenzen continuirlich ist.“ Lp.

A. Mesnager. La déformation des solides. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 348-362.

Der für den internationalen Physiker-Congress erstattete Bericht beschäftigt sich nur mit den isotropen Körpern und behandelt die elastischen Deformationen sowie die permanente Deformation, soweit sich dies auf so engem Raume unter Bevorzugung französischer Quellenschriften erledigen lässt. Lp.

W. Spring. Propriétés des solides sous pression, diffusion de la matière solide, mouvements internes de la matière solide. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 402-431.

1. Plasticität der festen Körper. 2. Die Elasticität der festen Körper unter Druck. 3. Die allotropische Transformation der festen Körper. 4. Das Schweissen der festen Körper durch den Druck. 5. Die Diffusion der festen Körper. 6. Die chemischen Reactionen in den festen Körpern. — Folgerungen. Lp.

Ch. Éd. Guillaume. Les déformations passagères des solides. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 432-448.

Beschreibung der Erscheinungen; Versuch einer Theorie. Man vergleiche die Referate über die bezüglichen Arbeiten von Duhem, Marchis, Bouasse und Brillouin aus den letzten Jahren. Lp.

H. Petrini. Ueber das Wirkungsgesetz der inneren Kräfte eines Körpers. Ann. der Phys. (4) **3**, 749-752.

Verf. untersucht die Bedingung dafür, dass die Anziehung benachbarter endlicher Teile eines Continuums bei Annahme von Centralkräften, deren Abhängigkeit von der Entfernung r sich durch $\varphi(r)$ bestimmt, nicht unendlich gross werde. Es ergiebt sich, dass $\int_0^r r^2 \varphi(r)\,dr$ endlich sein muss. Br.

E. Riecke. Ueber Wechselwirkung und Gleichgewicht trigonaler Polsysteme. Ann. der Phys. (4) 8, 545-577.

Unter einem trigonalen Polsystem versteht der Verf. ein System von sechs Eckpunkten eines regulären Sechsecks, die abwechselnd elektropositiv und elektronegativ geladen sind. Solche Systeme, die als Elementarbestandteile von Krystallen fingirt werden, üben nicht nur anziehende, sondern auch richtende Wirkungen auf einander aus. Es wird zunächst der Ausdruck für die aus der Gesamtanziehung sich ergebende Potentialfunction aufgestellt. Mit Hülfe dieser werden die Gleichgewichtslagen zweier derartigen Systeme untersucht, dann die eines ebenen Gitters solcher Systeme, deren Mittelpunkte nach dem Princip der lückenlosen Sechseckteilung über die Ebene verteilt sind. Das Mass der Stabilität eines solchen Gitters ergiebt sich aus dem Masse, in dem sich die willkürliche Verdrehung eines Randsystems (gewählt wird ein Ecksystem) ins Innere fortpflanzt. Dann folgt die Discussion der Gleichgewichtslage eines Sondersystems, das in einer wenig von der ersten abstehenden Ebene liegt. Hier ergeben sich zwei ausgezeichnete Lagen. Entweder das neue System liegt genau über einem alten oder mit seinem Mittelpunkt im vierten Eckpunkt des Tetraeders, dessen Grundfläche von den Verbindungslinien der Mittelpunkte dreier aneinander anstossenden Systeme der Hauptebene gebildet wird. Dieselben beiden Lagen ergeben sich, wenn man statt des einen neuen Systems ein neues Ebenengitter nimmt. Es folgt eine kurze Discussion der Abweichungen von der Newton'schen Gravitationstheorie, die diese Theorie zur Folge hat. Br.

W. Voigt. Ueber die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung. Gött. Nachr. 1900, 355-379.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Zurückführung der in der Elasticitätstheorie aeolotroper Medien auftretenden Parameter auf Grössen der Vectoranalysis sowohl allgemein, wie auch in speciellen Fällen. Benutzt werden: Scalare, Vectoren und Tensoren. Die Componenten der Vectoren transformiren sich wie Coordinaten, die Componenten der Tensortripel wie Quadrate, bezw. Producte von Coordinaten. Die Vectoren werden deshalb als gerichtete Grössen erster, die Tensoren als gerichtete Grössen zweiter Ordnung bezeichnet. Auch die entsprechenden Grössen beider Ordnungen mit einseitigem Drehungssinn werden gelegentlich als Rotoren und Torsoren eingeführt. Ebenso werden die entsprechenden Grössen höherer Ordnungen definirt. Allgemein ist ein System von gerichteten Grössen n-ter Ordnung zusammengesetzt aus $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Componenten, die sich transformiren wie die (durch geeignete Zahlenfactoren orthogonal gemachten) Producte der Coordinaten zu je n (deren Anzahl ebenso gross ist). Es wird nun eine Anzahl von Scalarausdrücken für die Parameter aufgestellt, und zwar in Form linearer oder bilinearer Functionen von Vectoren oder Tensoren. Die Ausdrücke

werden auf elementare Tensor- und Vectorsysteme zurückgeführt und jedesmal physikalisch gedeutet. Mit Ausnahme weniger Fälle sind alle auftretenden Parameter zurückführbar auf Combinationen gerichteter Grössen von erster bis vierter Ordnung. Br.

W. Voigt. Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität. Gött. Nachr. 1900, 117-176.

Die Arbeit ist ein Referat, das für den internationalen physikalischen Congress von 1900 in Paris gefertigt ist. Sie giebt eine gute und in Bezug auf alle theoretischen Entwickelungen vollständige Uebersicht dessen, was im Gebiete der Krystallelasticität geleistet ist. Vorausgeschickt ist eine kurze Theorie der vom Verf. in die Elasticitätstheorie eingeführten Tensoren, die von den Vectoren als besondere, gerichtete Grössen getrennt werden, insbesondere der Tensorentripel. Die hierdurch gewonnene analytische Darstellung wird späterhin nur soweit beibehalten, wie es ungezwungen möglich ist. Im einzelnen folgt die Darstellung der üblichen Infinitesimalanalysis. Das eigentliche Referat ist dann in mehrere Kapitel gespalten. Das erste behandelt die Ableitungen der Druckcomponenten in aeolotropen, elastisch deformirten Medien aus den Urhypothesen über die Molecularkräfte, sowie diese selbst, das zweite die Beziehungen zwischen Drucken und Deformationen bis zur Aufstellung der beiden Parametersysteme (Constanten und Moduln), das dritte die Specialisirung der allgemeinen Formeln auf die einzelnen Krystallsysteme unter Zuhülfenahme des elastischen Potentials, das vierte die Discussion derjenigen Punkte, in denen die Theorie durch die Beobachtung kontrollirt werden kann, und das sechste die Discussion der entsprechenden Beobachtungen selbst, auch im Fall isotroper Körper. Am Schlusse jedes Kapitels sind die gewonnenen Resultate, Schlüsse, Urteile und strittigen Punkte in Form kurzer Thesen zusammengefasst. Ein Anhang giebt eine kurze Besprechung der Gesetze der Thermoelasticität. Den Schluss bildet ein umfangreiches Litteratur-Verzeichnis in Gestalt der Anmerkungen zum Text (französische Uebersetzung in: Rapports présentés au Congrès international de Physique **1**, 277-347). Br.

C. Viola. Sulla legge della razionalità degli indici nei cristalli. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{9}_2$, 301-308.

Verf. führt aus, dass das Gesetz der Rationalität des Verhältnisses der Indices für die verschiedenen Axen in der Krystallographie weder notwendig, noch durch die Erfahrung zu prüfen sei. Mathematische Entwickelungen kommen nicht vor. Br.

M. Cantone e G. Contino. Contributo allo studio delle proprietà fisiche del caucciù. Nuovo Cimento (4) **12**, 242-257.

Die Arbeit hat fast nur physikalisches Interesse. Mathematisch

kommt allein der vollständige Ansatz für die Formänderungen in Betracht, die ein aufgehängter Kautschukstab zugleich unter der Einwirkung von Belastungsgewichten und Temperaturänderungen erleidet. Br.

GUGLIELMO. Descrizione d'un apparecchio per la determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido. Rom. Acc. L. Rend. (5) 9_2, 261-269.

Die Formeln dienen nur zur Discussion der mit Hülfe des (aräometrischen) Apparates ausgeführten Bestimmung. Br.

LE CHATELIER. Sur les points anguleux des courbes de solubilité. C. R. **130,** 1606-1608.

An eutektischen Punkten, d. h. bei solchen Temperaturen, bei denen eine gemeinsame Lösung zweier Stoffe grade noch existiren kann, ohne dass einer von beiden ausfällt, treten in den Lösungscurven Knicke auf. Es wird bewiesen, dass die Differentialquotienten der Curven an diesen Knicken sich verhalten wie die specifischen Lösungswärmen der gelösten Massen. Br.

O. TUMLIRZ. Das Compressibilitätsgesetz der Flüssigkeiten. Wien. Ber. **109,** 837-848.

Von der vereinfachten Zustandsgleichung für Gase $p(v-a) = RT$ ausgehend, leitet der Verf. die entsprechenden Gleichungen für die Ermittelung der Compressibilitätseigenschaften ab und findet, dass diese ohne weiteres auf tropfbare Flüssigkeiten übertragbar sind. Zahlenbeispiele werden gegeben. Br.

R. WEGSCHEIDER. Ueber die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. Wien. Ber. **109,** 699-792.

Es wird ein Schema von Reactionsgleichungen für mehrere gleichzeitig verlaufende chemische Reactionen aufgestellt unter der Voraussetzung, dass das Gesamtvolumen der auf einander reagirenden Stoffe constant bleibt. Die in Frage kommenden Grundbegriffe werden mathematisch formulirt, bezw. die Formeln concret gedeutet. Das Letzte gilt insbesondere für die einzelnen Arten von Reactionen einschliesslich der Katalyse. Dann folgen Erörterungen für einzelne Specialfälle. Es werden die Bedingungen untersucht, unter denen das Verhältnis der Geschwindigkeiten zweier neben einander verlaufenden Reactionen von der Zeit unabhängig ist, ferner die Bedingungen, unter denen die Gesamtconcentration eines Stoffes, der während des Processes teils zersetzt, teils neu gebildet wird, während der ganzen Reaction constant bleibt, endlich die Bedingungen dafür, dass das Verhältnis der Concentrationen zweier Stoffe in Bezug auf die Zeit constant bleibt. Ein Schlusskapitel giebt Aus-

führungen darüber, wie die Ansätze zu ändern sind, wenn die Bedingung des constanten Volumens fallen gelassen wird, insbesondere für den Fall, dass Gase bei constantem Druck auf einander reagiren. Br.

W. Sutherland. **The molecular constitution of water.** Phil. Mag. (5) **50,** 460-489.

Verf. stellt die Hypothese auf, dass Wasserdampf $= H_2O$, Wasser eine Mischung von $(H_2O)_2$ mit $(H_2O)_3$ und Eis $= (H_2O)_3$ ist, und untersucht an der Hand dieser Hypothese mit Hülfe der entsprechenden Formeln das Verhalten des Wassers in Bezug auf thermische Ausdehnung, Brechung, Compressibilität (wobei sich $(H_2O)_3$ in $(H_2O)_2$ dissociiren soll), Oberflächenspannung, latente Schmelzwärme, latente Verdampfungswärme, specifische Wärme, Viscosität und dielektrische Capacität.

Br.

F. G. Donnan. **The relative rates of effusion of argon, helium, and some other gases.** Phil. Mag. (5) **49,** 423-446.

Durch Versuche mit verschiedenen Gasen (ausser den im Titel genannten werden noch Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd, Kohlensäure und Cyan untersucht) wird festgestellt, dass die Formeln für die Abhängigkeit der zum Diffundiren einer bestimmten Menge von Gas durch eine kleine Oeffnung erforderlichen Zeit von der Gasdichte mit der Erfahrung nicht übereinstimmen. Die verbleibenden Abweichungen werden durch eine Correction für innere Reibung und eine zweite für den Joule-Thomson-Effect dargestellt. Br.

Holzmüller. **Mechanisch-technische Plaudereien.** Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 1080-1087.

Das Wesen der Wärme. 1. Mechanische Schwingungen elastischer Körper und ihre Uebertragung auf die Luft. 2. Molecularschwingungen bei festen Körpern. 3. Durchgang und Nichtdurchgang der Aetherschwingungen durch verschiedene Körper. A. S.

Weitere Litteratur.

H. Kayser. Lehrbuch der Physik. Für Studirende. 3. Aufl. Stuttgart: F. Encke. X + 584 S. gr. 8°.

G. Hartmann. Die kreisende Energie als Grundgesetz der Natur. Siegen. Eiserfeld an der Sieg: Selbstverlag: 40 S. gr. 8°.

Frz. J. Heilemann-Vollshausen. Die Kraft des Weltalls. Physikalisch-ökonomische Skizze zur Aufklärung der Erscheinungsursachen von

der Gravitation, von Ebbe und Flut, von Magnetismus und Elektricität, vom Wachsen, vom Leben, von Seele und Geist etc. und Schaffung des der Naturwissenschaft und Volkswirtschaft fehlenden Fundaments. Schöneberg-Berlin. (Berlin: J. Schwerin). III + 275 S. gr. 8°.

J. Larmor. Aether and matter. Cambridge: University Press. XXVIII + 365 S. [Nature **62**, 265-266, Anzeige von Fitz Gerald.] Referat in Abschnitt XI, Kapitel 2, B.

B. Elasticitätstheorie.

O. Tedone. Sulle formule che rappresentano lo spostamento di un punto di un corpo elastico in equilibrio. Nuovo Cimento (4) **11**, 161-172.

Es werden die Formeln, die Betti und Somigliana zwecks einer allgemeinen Integration der Elasticitätsgleichungen für die Dilatation, die drei Rotationscomponenten und die Verschiebungen in cartesischen Coordinaten angegeben haben, auf krummlinige Coordinaten transformirt.

Rr.

P. Duhem. Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch. Journ. de Math. (5) **6**, 215-259.

Bekanntlich lässt sich nach Clebsch die Bewegung jedes elastischen Körpers zusammensetzen aus einer Bewegung ohne Rotation und einer solchen ohne Dilatation in der Form

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},$$
$$w=\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

wo Φ ein Integral der Gleichung der Dilatation θ:

$$\varrho\frac{d^2\theta}{dt^2}-(\lambda+2\mu)\Delta\theta=0$$

ist und P, Q, R Integrale der drei Gleichungen für die Rotationscomponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$\varrho\frac{d^2\omega}{dt^2}-\mu\Delta\omega=0$$

sind; Verf. zeigt, dass auch bei allgemeineren Differentialgleichungen als denen elastischer Körper sich eine Gleichung der Dilatation und drei der Rotationscomponenten entwickeln lassen, aus deren Integralen die Verschiebungscomponenten sich wieder wie oben zusammensetzen, solange nur jene Differentialgleichungen linear mit constanten Coefficienten bleiben.

Die adiabatischen Bewegungsgleichungen reibender Flüssigkeiten und die von Helmholtz aufgestellten Gleichungen für die Fortpflanzung

elektrischer Wirkungen in einem homogenen, leitenden und dielektrischen Medium fallen unter die erweiterte Form.

In einem Kapitel zeigt auch Verf., warum man berechtigt ist, die rotationslose Welle eine longitudinale und die dilatationslose eine transversale Welle zu nennen. Rr.

G. LAURICELLA. Sulla convergenza delle serie degli spostamenti e delle velocità dei punti di un solido elastico isotropo vibrante. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania (4) **12,** 9 S. (1899).

In einer früheren Abhandlung („Sugli sviluppi in serie di soluzioni eccezionali dell'elasticità". Torino Atti **34,** 11-24; F. d. M. **30,** 716, 1899) beschäftigt sich der Verf. mit der Reihenentwickelung von Ausnahmelösungen der Anfangsverschiebungen und -geschwindigkeiten der Punkte eines schwingenden isotropen elastischen Körpers. Jetzt beweist er die Convergenz der Reihen, welche die diesen Anfangselementen für jeden Wert von t entsprechenden Verschiebungen und Geschwindigkeiten darstellen. Vi.

J. H. MICHELL. Some elementary distributions of stress in three dimensions. Lond. M. S. Proc. **32,** 23-35.

J. H. MICHELL. Elementary distributions of plane stress. Lond. M. S. Proc. **32,** 35-61.

J. H. MICHELL. The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. Lond. M. S. Proc. **32,** 247-258.

Eine Kraft greife im Innern eines unendlich ausgedehnten Körpers, ferner in einem Punkte der ebenen, unendlich ausgedehnten Grenzfläche eines Körpers, schliesslich an der Spitze eines unendlich langen Kegels an; gesucht ist die Spannungsverteilung in den betreffeuden Körpern.

Die zweite Abhandlung betrachtet einige Fälle ebener Spannungsverteilung in unendlich langen Cylindern und dünnen Platten, während die dritte sich mit unendlich ausgedehnten aeolotropen Körpern mit ebener Grenzfläche beschäftigt, an der entweder Verschiebungen oder Kräfte gegeben sind.

In allen drei Arbeiten wird die Methode der Potentiallösungen von Hertz und Boussinesq benutzt, welche der Verf. durch die Annahme ausdrückt, dass die Spannungen wie die erste oder zweite Potenz der Entfernung vom Belastungspunkt abnehmen sollen. Rr.

J. H. MICHELL. The theory of uniformly loaded beams. Quart. J. **32,** 28-42.

Die de St. Venant'sche Biegungs- und Torsionstheorie ergiebt sich

aus der Annahme, dass die Längsfasern keine normalen Kräfte auf einander ausüben, und gelangt zu dem Ergebnis, dass die äusseren Kräfte nur in den Endquerschnitten angreifen dürfen, und dass die Spannungen sich linear mit der Länge ändern. Die Erweiterung dieser Theorie geht am besten von diesem letzten Ergebnis aus, nimmt eine quadratische Aenderung der Spannungen mit der Länge an und gelangt zu dem Falle constanter Belastung der Längeneinheit. Dann lassen sich die Biegungs- und Torsionsmomente durch die Krümmung und Torsion der Mittelaxe ausdrücken und die Abweichung der Resultate von der Navier-Bernoulli'schen Biegungstheorie mit Hülfe harmonischer Querschnittsfunctionen berechnen.

Verf. bezieht sich auf frühere Arbeiten von Voigt und Pearson.

Rr.

J. H. Michell. The stress in the web of a plate girder. Quart. J. 31, 377-382.

Der gewöhnliche Näherungsweg, die Schubspannungen in dem Stehblech eines Blechträgers zu bestimmen, besteht in der Annahme des horizontalen Flächendruckes P auf ein senkrechtes Flächenelement des Stehblechs, nach der Bernoulli-Navier'schen Biegungstheorie und der Ermittelung der Schubspannung U in diesem Flächenelement aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=0$, wo x die horizontal angenommene Längsaxe des Trägers, y die senkrechte Querschnittsaxe bedeutet.

Die andere Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ ist dann im allgemeinen nicht befriedigt, was aber wegen der Kleinheit des senkrechten Flächendrucks Q auf ein wagerechtes Element gewöhnlich ausser Acht gelassen wird.

Verf. geht für einen Träger von I-Form, der an beiden Enden unterstützt und gleichmässig belastet ist, genauer vor; er integrirt nämlich die beiden obigen Differentialgleichungen mit Hülfe einer algebraischen Function von x und y, die den Grenzbedingungen an den Flanschquerschnitten genügt. Für die Spannungen in den Flanschquerschnitten wird dabei die übliche Biegungstheorie benutzt.

Ausserdem werden noch die folgenden durchaus zulässigen Voraussetzungen gemacht.

a) Die Last greift am Stehblech an, und die Flanschquerschnitte nehmen keine Querkraft auf. b) Die Längsdehnung des Stehblechs am Flansch ist gleich der des Flanschquerschnitts. c) Das Stehblech darf als eine unendlich dünne Platte, beansprucht von Kräften in ihrer Ebene, angesehen werden. d) Der Träger ist lang im Verhältnis zu seiner Höhe, so dass das Princip statisch gleichwertiger Kräfte auf die Enden angewendet werden darf. An diesen Stellen versagt dann natürlich die Lösung.

Rr.

J. H. MICHELL. **The determination of the stress in an isotropic elastic sphere by means of intrinsic equations.** Messenger (2) **30**, 16-25.

Ueber den Zweck der Arbeit spricht sich der Verf. so aus: „Das folgende Verfahren zur Lösung von Aufgaben bezüglich des Gleichgewichts und der Schwingung einer isotropen elastischen Kugel wird als einfacher und directer als die bisherigen in Vorschlag gebracht. Die grundlegenden Gleichungen sind natürliche in dem Sinne, dass sie von äusseren Bezugsaxen unabhängig sind." Zunächst werden die bekannten Gleichungen in die Form der „natürlichen" umgewandelt, indem die Differentialgleichungen als vectorielle aufgefasst und geschrieben werden. Danach werden die folgenden Aufgaben behandelt: 1. Eine feste Kugel unter der Einwirkung gegebener Oberflächenkräfte. 2. Gegeben die normalen Verrückungen; keine tangentiale Beanspruchung. Gegeben die Oberflächenverrückungen. Zum Schlusse wird bemerkt, dass dasselbe Verfahren eine ganz einfache Lösung für die Vibrationen einer Kugel giebt.

Lp.

P. ALIBRANDI. **Sulla elasticità dei solidi complicata da variazioni di temperatura.** Batt. G. **38**, 77-91.

Es werden die thermoelastischen Gleichungen unter Vernachlässigung der durch Deformation erzeugten Temperaturänderung abgeleitet; unter dieser Voraussetzung wird nachgewiesen, dass jedes thermoelastische Problem sich in zwei unabhängige zerlegen lässt, nämlich die Bestimmung der rein thermischen Spannungen ohne Rücksicht auf äussere oder Massenkräfte und die Bestimmung der rein elastischen Spannungen infolge von Oberflächen- und Volumenkräften.

Die thermischen Spannungen haben, wie Duhamel und Neumann gezeigt haben, immer ein Potential, und ihre Divergenz muss im thermischen Gleichgewicht verschwinden, so dass sie dann auch die Laplace'sche Gleichung erfüllen.

Danach behandelt Verf. die folgenden Beispiele.

1. Ein elastisch schwingender Körper erfahre eine Temperaturerhöhung. Es zeigt sich, dass letztere nicht auf die Schwingung, sondern nur auf die mittlere Lage des Körpers Einfluss hat.

2. Ein Körper werde durch Oberflächenkräfte verhindert, seine Form zu ändern, und erfahre eine Temperaturerhöhung. In diesem Fall erhält die Oberfläche nur senkrechten, überall gleichen und das Innere einen davon abhängigen und rein hydrostatischen Druck.

3. Ein cylindrischer Körper erfahre eine Temperaturerhöhung, die nach seiner Länge hin veränderlich sei, und die gekrümmte Oberfläche sei gezwungen, sich nur in der Richtung der Cylindererzeugenden zu bewegen und nicht in der Richtung ihrer Normale.

4. In einer Kugelschale variire die Temperatur mit dem Radius. Bestimmt werden Verschiebungen und Spannungen derselben. Rr.

Lord RAYLEIGH. On the stresses in solid bodies due to unequal heating, and on the double refraction resulting therefrom. Arch. Néerl. (2) **5**, 32-42.

Wenn ein Glasstück, das zuerst im isotropen Zustande sich befindet ungleichmässig erwärmt wird, so zeigt es gewöhnlich Doppelbrechung. Dieses rührt nicht direct von der Erwärmung her, sondern von den in den verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Stellen verschiedenen Spannungen, die durch die ungleichen Erwärmungen der einzelnen Teile verursacht wurden. Die Untersuchung dieser Spannungen wird nach dem Vorgange von Hopkinson (F. d. M. **11**, 719, 1879) mit veränderter Bezeichnung gegeben, und die Ergebnisse werden nachher auf einige besondere Aufgaben (ebene Platte, Cylinder) angewandt, bei denen die optische Methode der Nachprüfung gut anwendbar ist. Lp.

H. BOUASSE. Sur les courbes de déformation des fils. Deuxième partie. Chap. IV, V. Toul. Ann. (2) **2**, 5-65.

In dem vorliegenden Teil einer Reihe von Publicationen über denselben Gegenstand werden zunächst die Deformationscurven für zusammengesetzte Zug- und Torsionsbeanspruchung erläutert. Dieselben werden so erhalten, dass von den vier Grössen: Länge des Drahtes, Verdrehungswinkel, Zugspannkraft und Drehungsmoment je zwei constant gehalten oder mit constanter Geschwindigkeit verändert und die beiden andern beobachtet werden. Betreffs der theoretischen Zusammenfassung wird betont, dass das Problem nicht als homogenes behandelt werden darf, da die Deformationsgeschwindigkeit in verschiedenen Abständen von der Stabaxe verschieden ist, ferner dass die Hypothese von J. Thomson über die Beziehung zwischen Torsionsmoment C und Torsionswinkel α oberhalb der Proportionsgrenze ($C = A - \frac{B}{\alpha^2}$, wo A und B Constanten) vollständig falsch ist.

Auch die Theorie von Duhem über die Härtung (écrouissage) durch Deformation und die bleibende Deformation wird im folgenden Kapitel abfällig besprochen, da sie annehme, dass durch zusammengehörige Werte von Deformationen und Kräften und durch die Richtung eines Processes die Deformationscurve, d. h. die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung, bestimmt sei, während in Wirklichkeit noch die Wirkung der früheren Zustände in ganz deutlicher Weise bei den Deformationscurven, wie in Beispielen gezeigt wird, zu Tage trete, was man mathematisch so auszudrücken habe, dass in der Differentialgleichung zwischen dem Drehungsmoment A und dem Verdrehungswinkel α auch das Zeitdifferential explicite auftreten müsse, d. h. dass die Erscheinungen durch eine Differentialgleichung von der Form $dA = Md\alpha + \imath dt$ dargestellt werden müssten.

Besser passe sich die Theorie von Brillouin den Erscheinungen an. Dieselbe gehe von der Gleichung

$$x = KX + \Phi\left(\int_0^t H dt - A\right) - \Phi A$$

aus, wo x die Deformation, X die zugehörige Kraft, A eine den Anfangszustand bestimmende Constante und Φ eine vom Material abhängige Functionsbezeichnung ist.

Verf. selbst macht sich ein Bild von der elastischen Nachwirkung, indem er sich einen Federmechanismus vorstellt, der durch die Deformation in Gang gesetzt werde und nachher teilweise unabhängig von der augenblicklichen äusseren Kraft weiterlaufe. Rr.

H. Bouasse. Sur les courbes de déformation des fils. Deuxième partie. Toulouse Ann. (2) 2, 431-466.

Das Kapitel VI der Arbeit, welches hier gedruckt vorliegt, enthält zum grössten Teile Berichte über Experimente zur Bestätigung der in den vorangehenden Kapiteln entwickelten Theorie. Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: I. Beschreibung der Torsionsapparate. II. Verteilung der Kräfte in dem senkrechten Querschnitte eines tordirten Drahtes. III. Allgemeine Methode zur experimentellen Bestimmung der Curve der f. IV. Härten, Hysteresis, Reactivirung. Erscheinungen, die von der Zeit abhängen. — Natürlich müssen die zu bestätigenden Formeln öfter umgestaltet werden, um für den Versuch zu passen. Im Abschnitte II ist ein grösserer Raum der Bekämpfung der von Duguet verallgemeinerten J. Thomson'schen Hypothesen gewidmet. Lp.

G. F. C. Searle. On the elasticity of wires. Phil. Mag. (5) 49, 193-199.

Es werden zwei Versuchsanordnungen zur Bestimmung der elastischen Constanten von Drähten beschrieben. Das zu prüfende Drahtstück wird so in zwei gleich geformte und gleich schwere Barren eingespannt, dass es mit diesen ein H bildet. Das so gebildete H wird dann einmal derart aufgehängt, dass Draht und Längsbalken horizontal liegen, und wird durch Zusammenbiegen und Loslassen zweier Enden der Längsbalken in Schwingungen versetzt; das andere Mal wird es vertical an einem Längsbalken eingespannt und durch Abbiegen und Loslassen des einen Endes des anderen Längsbalkens in Schwingungen versetzt. Aus beiden Schwingungen kann man, wie theoretisch unter entsprechenden Vernachlässigungen entwickelt wird, die in Betracht kommenden Constanten ermitteln. Zahlenbeispiele werden am Schluss gegeben. Br.

N. G. Filon. On the resistance to torsion of certain forms of shafting, with special reference to the effect of keyways. Phil. Trans. **193** A, 309-352.

Verf. untersucht mit den gewöhnlichen Methoden die elastischen Verdrehungen von Stäben, deren Querschnitt von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt wird. Durch Einführung elliptischer Coordinaten gelingt die Integration in Form von unendlichen Reihen, deren Glieder aus Producten von Kreisfunctionen und hyperbolischen Functionen je eines der beiden Parameter bestehen. Insbesondere werden zwei Fälle untersucht. Der erste betrifft einen Querschnitt mit schienenartigem Profil, wie er von dem Zwischenraum zwischen den Aesten einer Hyperbel und einer confocalen Ellipse begrenzt wird. Wird die Ellipse klein genommen, so ist die schmalste Stelle, also die Zone der Hyperbelscheitelpunkte, die Stelle grösster Spannung. Wird die Ellipse aber grösser genommen, so treten zwei solche Zonen zu beiden Seiten dieser Stelle auf, während die schmalste Stelle ein Minimum von Spannung aufweist. Entartet die Hyperbel zu zwei aus dem Unendlichen kommenden, bis zu den Brennpunkten reichenden Geraden, so entsteht ein elliptischer Vollcylinder, in den zwei gegenüberstehende Längsnuten eingeschnitten sind. Der zweite Fall betrifft einen Querschnitt, der nur von einem Hyperbelast und auf der andern Seite von der Ellipse begrenzt ist. Beim Ausarten der Hyperbel artet dieser Stab in einen elliptischen Vollcylinder mit einer eingeschnittenen Nut aus. Alle in Betracht kommenden Daten werden für mehrere Einzelbeispiele numerisch verfolgt, insbesondere die Einwirkung der Nuten. Es ergiebt sich, dass diese die Torsionsfestigkeit sehr erheblich herabsetzen, und zwar die beiden Nuten annähernd doppelt so stark wie eine. Das Mass der Verminderung wächst mit der Tiefe der Nut, aber stärker als proportional. Br.

E. Almansi. Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo. Torino Atti **35**, 39-53.

Die de St.-Venant'sche Torsionstheorie wird auf den besonderen Fall von Hohlcylindern mit unendlich kleiner Wanddicke angewandt, und es werden die folgenden Resultate erhalten.

Es sei M das Biegungsmoment, σ die Querschnittsfläche des Hohlraums, ds ein Längenelement des Umfangs, e die Wandstärke an einer bestimmten Stelle, die gegen die übrigen Querschnittsdimensionen klein sein soll, ε die mittlere Wandstärke, definirt durch die Gleichung $\int_s \frac{ds}{e} = \frac{s}{\varepsilon}$, G der Gleitmodul, so erhält man als Schubspannung $\tau = M/2\sigma e$ und für den Torsionswinkel der Längeneinheit $\theta = Ms/4G\sigma^2\varepsilon$. Nennt man den Quotienten aus Torsionsmoment und Torsionswinkel den Torsionswiderstand, so kann man nach den obigen beiden Formeln sagen, dass derselbe proportional der mittleren Dicke, dem Quadrat des ein-

geschlossenen Hohlraumes und umgekehrt proportional dem Querschnittsumfang ist. Rr.

E. Estanave. Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 295-358.

Navier hat die Differentialgleichung der elastischen Platte für den Fall, dass dieselbe rechteckig ist und auf allen vier Seiten aufliegt, integrirt. Die Differentialgleichung lautet bekanntlich:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{15}{16\varepsilon J}p.$$

Hierin bedeutet w die senkrechte Durchbiegung, p die Belastung der Flächeneinheit, $J=\frac{1}{12}\varepsilon^3$ das Trägheitsmoment eines Einheitsstreifens. Die Navier'sche Lösung, die den Grenzbedingungen einfacher Stützung von selbst genügt, lautet:

$$w=\sum_i\sum_\gamma A_{i\gamma}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi x}{b},$$

wo a und b die Seitenlängen der Platte und $A_{i\gamma}$ ein durch die Fourier'sche Methode zu bestimmender Coefficient sind.

M. Lévy hat auch das vollständige Integral für den Fall aufgestellt, dass nur zwei gegenüberliegende Seiten frei aufliegen, wo jede der beiden anderen beliebig gestützt ist, durch die Reihe:

$$w=\sum_i Y_i\sin\frac{i\pi x}{a},$$

die den beiden ersten Grenzbedingungen von selbst genügt, und in der Y_i noch so bestimmt werden muss, dass die Differentialgleichung und die anderen Grenzbedingungen befriedigt werden.

Offenbar erlaubt die Methode von M. Lévy die Behandlung von sechs verschiedenen Fällen von Randstützung, die der Verf. im einzelnen durchführt. Im besonderen werden für $p=$ const. die Durchbiegungen in der Mitte der Platte und der freien Kanten berechnet, wobei sich zeigt, dass schon zwei Glieder der Reihenentwickelung in jedem Fall genügen; die Zahlenergebnisse werden mit Durchbiegungsmessungen an Glasplatten verglichen, wobei sich sehr gute Uebereinstimmung, besonders in den Durchbiegungsverhältnissen zeigt.

Die Identität der Navier'schen und der Lévy'schen Methode für den gemeinsamen Fall wird nachgewiesen, und die Convergenzbetrachtungen werden durch zwei an den Anfang gestellte Theoreme erledigt. Rr.

A. Cornu. Deux méthodes optiques pour l'étude de l'élasticité des corps solides. Arch. Néerl. (2) **5**, 322-338.

Obschon experimentell, ist die Abhandlung auch von vielen theoretischen und mathematischen Betrachtungen durchsetzt. So bestätigen die beiden zur Bestimmung der Deformation der ursprünglich ebenen Platte

angewandten Methoden den Euler'schen Satz über das Aenderungsgesetz der Krümmungen der Oberfläche um den Punkt herum. Man erkennt unmittelbar die beiden rechtwinkligen Hauptschnitte, deren Krümmungen fast immer entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die mikrometrischen Messungen bewahrheiten die Beziehung $\cos^2\omega/R_1 + \sin^2\omega/R_2 = 1/\varrho$, die immer dann sich als nützlich erweist, wenn man die Krümmung $1/\varrho$ eines Normalschnittes zu messen hat, der mit dem Hauptschnitte von der Krümmung $1/R_1$ den Winkel ω bildet. Lp.

P. Appell. Note sur les expériences du Commandant Hartmann. S. M. F. Bull. **28**, 66-68.

Das Streifensystem, das sich bei der Deformation von Metallen nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze unter ganz bestimmten Winkeln ausbildet, und das besonders von dem französischen Artillerieofficier Hartmann untersucht worden ist, wird hier für Deformation durch Druck erklärt als ein nach Ueberwindung der inneren Reibung eintretendes Gleiten, und zwar längs derjenigen Flächen, in denen Flächendruck und zugehöriges Flächenelement den kleinsten Winkel einschliessen. Verf. verhehlt sich jedoch nicht die Schwierigkeiten dieser Erklärung, die z. B. versagt, wenn die Spannungsfläche ein Hyperboloid ist. Rr.

T. Boggio. Sull' equilibrio delle membrane elastiche piane. Nuovo Cimento (4) **12**, 170-190.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Deformation einer isotropen, ebenen, elastischen Membran, die am Umfang von Kräften, die in deren Ebene wirken, beansprucht wird, unter der Voraussetzung, dass für die Punkte des Umfangs die Verschiebungscomponenten gegeben sind. Es handelt sich dabei um die Integration der beiden Differentialgleichungen

$$\Delta^2\xi' = k\frac{\partial\theta'}{\partial x},\quad \Delta^2\eta' = k\frac{\partial\theta'}{\partial y},\quad \left(\theta' = \frac{\partial\xi'}{\partial x} + \frac{\partial\eta'}{\partial y}\right)$$

wo ξ' und η' die Verschiebungscomponenten in Richtung der x- und y-Axe sind.

Erstere können mit Hülfe von bestimmten Integralen dargestellt werden, sobald man in der Lage ist, die Grenzcurve der Membran mit Hülfe von Polynomen auf einen Kreis abzubilden. Rr.

L. Lecornu. Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 501-539.

Verf. giebt zunächst für die drei auf die Grenzen eines Flächenelements wirkenden Spannungen die Differentialgleichungen des Gleich-

gewichts einer dreiaxigen ellipsoidischen Schale, die von beliebigen Oberflächenkräften angegriffen wird, in elliptischen Coordinaten wieder.

Dieselben waren in einer früheren Abhandlung aus dem Jahre 1880 im Journal de l'École polytechnique von ihm abgeleitet worden.

Für den Fall, dass die Oberflächenkräfte nur in einem hydrostatischen Innendruck bestehen, vereinfachen sich diese Gleichungen; es gelingt, sie durch eine Coordinatentransformation zu integriren und die Quadraturen mit Hülfe elliptischer Functionen in geschlossener Form darzustellen.

Dabei treten jedoch willkürliche Functionen additiv auf, zu deren Bestimmung man, streng genommen, die Deformationen der ellipsoidischen Schale berücksichtigen müsste. Es findet sich indessen merkwürdiger Weise, dass die Forderung überall endlich bleibender Spannungen zur Bestimmung dieser willkürlichen Functionen ausreicht, was, wie der Verf. früher nachgewiesen hat, nur bei geschlossenen Flächen, aber nicht mehr bei einer ungeschlossenen Fläche, die in einer starren Grenzcurve festgehalten wird, der Fall ist.

Die isostatischen Linien, d. h. diejenigen, die den Richtungen der Hauptspannungen folgen, fallen nicht mit den Krümmungslinien zusammen, mit Ausnahme der drei Grundellipsen.

Es wird unter anderem noch gezeigt, dass, wenn der reciproke Wert der kleinsten, vertical gedachten Axe gleich der Summe der reciproken Werte der beiden andern ist, die isostatischen Linien durch die Linien grössten Gefälles und die Niveaulinien dargestellt werden.

Auch die Lage der mechanischen Nabelpunkte, d. h. derjenigen, wo die Hauptspannungen gleich werden, wird bestimmt.

Uebrigens treten, besonders bei sehr ungleichen Axen, auch Druckspannungen in der ellipsoidischen Schale auf, die ein Einknicken derselben zur Folge haben würden. Die behandelten Fragen haben einen gewissen Wert für den Bau von länglichen Ballonhüllen. Rr.

J. Fredholm. Solution d'un problème d'équilibre élastique. C. R. **131,** 875-876.

Bezieht sich auf die ausführlichere, in den Acta Math. **23,** 1 erschienene Arbeit (vergl. F. d. M. **30,** 715, 1899) und betrachtet den besondern Fall derselben, dass die Grenzfläche des elastischen Körpers eine Ebene ist. Rr.

O. Tedone. Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee. Torino Atti **35,** 460-480.

Verf. hat in einer früheren Abhandlung (Torino Mem. (2) **47,** 181 bis 258; F. d. M. **28,** 723, 1897) eine Erweiterung der Betti'schen Integrationsmethode für die Bewegungsgleichungen elastischer Körper in cartesischen Coordinaten gegeben. Er transformirt die dort erhaltenen Formeln auf krummlinige Coordinaten. Rr.

A. Davidoglou. Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17,** 359-444.

Die Integration der partiellen Differentialgleichung der Transversalschwingung eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt kommt hauptsächlich hinaus auf die Integration der folgenden totalen Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x) \cdot y,$$

wo $\varphi(x)$ eine wesentlich positive Function und k das Quadrat der Schwingungsfrequenz ist. Für besondere $\varphi(x)$ ist die Aufgabe bekanntlich von Kirchhoff behandelt worden.

Für den allgemeinen Fall wendet der Verf. zunächst die Methode der fortschreitenden Annäherungen von Picard an und bestimmt durch einen convergenten unendlichen Process diejenigen Werte von k, für welche die Reihenentwickelung von Picard einen Sinn hat, d. h. die Frequenzen der Eigenschwingungen.

Für jeden zulässigen Wert von k hat die vorgelegte Gleichung ein particulares Integral, und die willkürliche Function, welche die Anfangslage des Stabes darstellt, muss nach diesen Integralen entwickelt werden; ganz analog der Coefficientenbestimmung der Fourier'schen Reihe gelingt dies auch dem Verf. mit Hülfe der Beziehung

$$\int_a^b \varphi(x)\, y_\alpha y_\beta \, dx = 0 \qquad (\alpha \neq \beta),$$

wo y_α und y_β zwei verschiedene Integrale der vorgelegten Gleichung sind. Die Convergenzbetrachtungen sind sehr sorgfältig durchgeführt.

Die zweite Methode, die sich an eine Arbeit von Horn anlehnt, benutzt eine asymptotische Entwickelung des Integrals, ist aber vom Verf. nicht bis zur Darstellung der ausgezeichneten Werte von k durchgeführt.

Rr.

J. Wilsing. Zur Theorie des Repsold'schen Federpendel-Regulators. Astr. Nachr. **151,** 293-296.

Die von E. Lacoine (Journ. télégr. Bern **3,** 31, 1870) gegebene Theorie dieses Pendels, auf welche Repsold in seinem Artikel: „Einiges über rundschwingende Federpendel-Regulatoren" (Zs. f. Istrmkd. 1899) aufmerksam gemacht hat, berücksichtigt nicht die Wirkung der tangential gerichteten Treibkraft. Aus diesem Grunde behandelt der Verf. „diesen vorzüglichen Regulator" etwas eingehender und kommt, von den Differentialgleichungen der Bewegung ausgehend, zu dem Ergebnisse: Bei Aenderungen der auf das Pendel wirkenden Treibkraft variiren die Amplitude r und der Phasenunterschied $\varphi - t\sqrt{a}$ zunächst in gleichem Sinne, nähern sich aber bald constanten Grenzwerten. Nach Verlauf einer gewissen Anzahl von Schwingungen halten sich daher die Treibkraft und die tangential gerichtete Componente der Biegung das Gleichgewicht,

so dass nur die radial gerichtete Componente der Biegung $-\alpha r$ übrig bleibt, welche dem Pendel die constante Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\alpha}$ erteilt.
Lp.

L. LECORNU. Sur le volant élastique. C. R. **131**, 253-255.

Es wird ein Schwungrad betrachtet, an dem eine Masse M in beliebiger Richtung elastisch zu dem Zwecke geführt ist, um bei Vermehrung der Geschwindigkeit Energie aufzuspeichern, die bei Verminderung wieder ausgegeben wird, und so gegenüber gewöhnlichen Schwungrädern an Gewicht zu sparen.

Für eine kleine Abweichung $\Delta\omega$ von der Winkelgeschwindigkeit ω werden die Abhängigkeit vom Drehmoment $C\sin r\omega t$ und die Bedingungen dafür angegeben, wann die radiale und wann die tangentiale Führung, ferner welches Verhältnis zwischen Elasticität der Führung und Dauer der erzwungenen Schwingung am vorteilhaftesten ist, endlich eine Formel für die Geschwindigkeitschwankung bei einem Stossmoment und die Dauer dieser Schwankung.
Rr.

H. PETER. Tragfähigkeitstabelle für Säulen und Stützen, Träger und Balken. Ersatz für statische Berechnungen. Zum praktischen Gebrauche für Architekten und Bauunternehmer, Baupolizeibeamte, Bauschulen, Eisenhändler u. s. w. (Mit Textfig.) Dresden: G. Kühtmann. 20 S. kl. 8°.

Die technischen Formeln für Biegungs- und Knick- und Druckfestigkeit der üblichen Querschnittsprofile werden graphisch in ähnlicher Weise wie im deutschen Baukalender dargestellt.
Rr.

J. J. GUEST. On the strength of ductile materials under combined stress. Phil. Mag. (5) **50**, 69-132.

In mathematischer Beziehung kommt von dieser Arbeit nur der Beweis in Betracht, dass eine bestimmte neue Messungsanordnung, die beschrieben wird, wirklich, wie beabsichtigt, eine genügend genaue Messung der Torsion gestattet.
Br.

G. GRIOT. Modell und Modellbelastung. Schweiz. Bauz. **36**, 141-142.

Um bei einem geometrisch ähnlichen und aus gleichem Material hergestellten Modell eines auf seine Sicherheit zu prüfenden Originals gleiche Anstrengung (Spannungen etc.) der einzelnen Teile bei Modell und Original zu erzielen, sind die sogenannten zufälligen Lasten (Winddruck etc.) im Modell so zu bemessen, dass die specifische Last (Last pro Flächeneinheit) im Modell dieselbe ist wie im Original. Dann wird nicht nur die Festigkeit auf Druck, Zug, Biegung, sondern auch die

Knickfestigkeit auf Grund des Modells richtig beurteilt. Dagegen ist das Eigengewicht des Modelles, welches mit der dritten Potenz des Verkleinerungsverhältnisses abnimmt, nicht ausreichend, um die gleiche Anstrengung im Modell wie im Original hervorzurufen. Es ist daher nötig, Zusatzlasten anzubringen, welche dem Eigengewicht des Originales proportional sind, und welche im Modell pro Flächeneinheit dieselbe Grösse haben, wie das Eigengewicht pro Flächeneinheit im Original. Bei dieser Regel ist, was ohne merklichen Fehler erlaubt ist, die Beanspruchung des Modells durch sein Eigengewicht überhaupt vernachlässigt. Beispiel eines Modellversuches an einer Festhalle. A. S.

O. Mohr. Welche Umstände bedingen die Elasticitätsgrenze und den Bruch eines Materials? Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 1524-1530, 1572-1577.

Das fundamentale Problem der Festigkeitslehre im engeren Sinne lautet: Man gebe eine Regel an, um die Bruchgrenze bei einer beliebigen zusammengesetzten Beanspruchung zu berechnen, wenn für das gleiche Material die Bruchgrenze bei der einfachen Zug- (ev. auch bei der einfachen Bruch-)Beanspruchung bekannt ist. Die bisher vorgeschlagenen Wege zur Lösung dieses Problems werden in der vorliegenden Arbeit einer übersichtlichen Besprechung unterzogen, und es wird eine neue, sehr originelle Lösung desselben Problems vorgeschlagen, die im zweiten Teile der Arbeit an dem vorliegenden Versuchsmaterial geprüft wird.

Wenn schon die Complicirtheit des Problems und die Mannigfaltigkeit aller in Betracht kommenden Nebenumstände eine einfache allgemein gültige Beantwortung der aufgeworfenen Frage ausschliessen dürften, so drängt doch die praktische Wichtigkeit der Frage gebieterisch zu einer wenn auch nur provisorischen Beantwortung. Die Auffassung, zu der O. Mohr als einer der berufensten Vertreter und langjährigsten Förderer der Festigkeitslehre in der vorliegenden Arbeit gelangt, darf jedenfalls der allgemeinen Beachtung sicher sein, auch wenn sie, wie es schon jetzt festzustehen scheint, nicht allen Erfahrungsthatsachen des noch sehr dunkeln Gebietes, — neueren Beobachtungen von W. Voigt —, gerecht wird.

Mohr beginnt mit einer allgemeinen Darstellung des Spannungszustandes in der Umgebung eines beliebigen Punktes A des beanspruchten Körpers; er leitet hier auf eigentümliche Weise das Vorhandensein der Hauptspannungen $\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$ und den Zusammenhang zwischen Normalspannungen σ und Schubspannungen τ für beliebige Flächenelemente ab. Zur graphischen Veranschaulichung des Spannungszustandes bedient er sich nicht des Spannungsellipsoides, sondern er construirt in einer (σ, τ)-Ebene ein Bild des Spannungszustandes, indem er σ und τ für jedes Flächenelement durch den betrachteten Punkt A als Abscisse und Ordinate eines Bildpunktes wählt. So ergeben sich drei „Hauptkreise“, welche die Bildpunkte derjenigen Flächenelemente enthalten, die

durch je eine der drei Hauptspannungsrichtungen gehen. Die Bildpunkte aller übrigen Flächenelemente gruppiren sich zu Kreisen, welche concentrisch zu den Hauptkreisen liegen und kleiner als diese sind.

Die älteren Festigkeitsansätze werden von Mohr wie folgt klassificirt: Erste Hypothese: Die grösste Normalspannung darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, wenn ein Bruch vermieden werden soll. Zweite Hypothese: Die grösste positive Dehnung darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Dritte Hypothese: Die grösste positive und negative Dehnung darf eine bestimmte positive und negative Grenze nicht überschreiten. Vierte Hypothese: Die grösste Schubspannung darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten.

Die Mohr'sche Auffassung ist dem gegenüber die folgende: Der grösste der drei Hauptkreise, welcher die Bildpunkte aller durch die Richtung der mittleren Hauptspannung σ_y gehenden Flächenelemente enthält, muss in der (σ, τ)-Ebene innerhalb einer gewissen für das Material charakteristischen Hüllcurve liegen; sobald er bei wachsender Beanspruchung diese Hüllcurve tangirt, tritt ein Abgleiten in denjenigen Flächenelementen ein, welche den Berührungspunkten des Hauptkreises mit der Hüllcurve entsprechen. Es giebt immer zwei mögliche Bruchflächen, welche durch die mittlere Hauptspannungsrichtung hindurchgehen und einen charakteristischen Winkel φ mit einander bilden. Im besonderen kann es deren aber auch unendlich viele geben, wenn nämlich zwei Hauptspannungen einander gleich sind.

Die Hüllcurve wird darauf angenähert durch zwei zur σ-Axe symmetrisch gelegene Geraden ersetzt, welche als gemeinsame Tangenten derjenigen beiden Hauptkreise zu construiren sind, die der einfachen Zug- und Druckbeanspruchung im Grenzfalle des Bruches entsprechen. Sind im besonderen Zug- und Druckfestigkeit einander gleich, so würde die Hüllcurve in zwei Parallelen zur σ-Axe übergehen, die Mohr'sche Hypothese geht dann in die oben genannte vierte Hypothese über.

Zwischen dem Winkel φ, den die beiden möglichen Bruchflächen mit einander bilden, der Zugfestigkeit $\varkappa_1$, der Druckfestigkeit $\varkappa_2$, der Torsionsfestigkeit $\varkappa_3$ und der Schubfestigkeit $\varkappa_4$ bestehen nach der Mohr'schen Hypothese die folgenden Beziehungen:

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1}, \quad \varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}, \quad \varkappa_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}.$$

Der zweite Teil der Arbeit ist dem Nachweise gewidmet, dass die Form der Bruchfläche und die Mehrzahl der zuverlässigsten Festigkeitsbestimmungen (von Bauschinger, Bach, Föppl, Grübler, James Guest) den Voraussagungen der Theorie entsprechen. A. S.

J. Kübler. Die richtige Knickungsformel. Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 82-84, 738-742.

L. Prandtl, Kriemler und Kübler. Discussion über die richtige Knickungsformel. Ibid. 1132-1134.

Verf. glaubt, bei der rein axialen Druckbeanspruchung eines Stabes die Grösse der seitlichen Ausbiegung dadurch berechnen zu können, dass er neben der Wirkung des Momentes der Druckkraft auch die directe Compressionswirkung des Druckes berücksichtigt. Dadurch erhält er einen bestimmten Biegungspfeil für den ausknickenden Stab, der bekanntlich bei der gewöhnlichen Behandlung unter Voraussetzung centrisch-axialer Belastung unbestimmt bleibt, und einen bestimmten Grösstwert der auftretenden Spannung. Verlangt man, dass letztere unterhalb einer zulässigen Grenze bleiben soll, so würde sich derjenige Bruchteil der Euler'schen Knicklast berechnen lassen, bei dem für gegebenen Querschnitt die zulässige Spannung im Stabe gerade erreicht wird, oder derjenige Querschnitt, der erforderlich ist, damit bei gegebener Belastung die zulässige Spannung nicht überschritten wird. Die fraglichen Rechnungen werden sowohl für kleine Ausbiegungen (mit Vernachlässigung höherer Potenzen) wie für endliche Ausbiegungen durchgeführt und durch Tabellen und Figuren erläutert. Die „richtige Knickungsformel“ des Verf. giebt zulässige Knicklasten, die durchweg etwas unterhalb der durch die Schwarz-Rankine'sche Formel gegebenen liegen.

Prandtl macht dem gegenüber darauf aufmerksam, dass eine bestimmte Spannung und Ausbiegung nur dann gefunden werden kann, wenn man eine bestimmte Annahme über die Krummheit des Stabes oder über die Excentricität des Kraftangriffes macht.

Bei dem Kübler'schen Ansatz bleibt die Ausbiegung an der Knickgrenze thatsächlich unbestimmt. Prandtl weist auch den Fehler in der Kübler'schen Rechnung nach, nach dessen Beseitigung als einziges Ergebnis die alte Euler'sche Knickungsformel übrig bleibt. Ref. schliesst sich der Kritik von Prandtl und Kriemler an. A. S.

J. Kübler. Beitrag zur Knick-Elasticität und -Festigkeit. Zeitschr. f. Math. **45**, 307-332.

Verf. sucht nachzuweisen, dass bei der Knickung bisher der „eigentliche Druck“ nicht genügend berücksichtigt sei, und zeigt an Zahlenbeispielen den Unterschied seiner Ergebnisse mit denen der Euler'schen Knickformeln. Ueber den Meinungsaustausch, der sich im folgenden Jahre an die vorliegende Arbeit angeschlossen hat, wird noch im Zusammenhang berichtet werden (vergl. das vorstehende Referat). Rr.

G. Huguenin. Untersuchung der Knickfestigkeit von Kolbenstangen. Schweiz. Bauz. **35**, 85-87.

Bei der Berechnung einer Kolbenstange ist die Sicherung gegen Knicken massgebend. Während man aber bei einer Eincylindermaschine direct mit der Euler'schen Formel auskommt, hat man bei einer Zweicylindermaschine zu berücksichtigen, dass 1. die Druckkraft an zwei

Stellen (vorderer und hinterer Cylinder) angreift, und dass 2. die Stange zwischen beiden Kraftangriffen, da wo sie den hinteren Cylinder durchsetzt, axial geführt ist. Indem man die Differentialgleichung der elastischen Linie für die beiden Teile aufstellt, in welche die Stange durch die Führungsstelle zerlegt wird, erhält man die Knicklast P in der Form $P=k\pi^2 EJ/l^2$, wobei sich die Grösse k aus einer transcendenten Gleichung bestimmt. (Bedeutung der Buchstaben wie im gewöhnlichen Falle der Knickung, für den $k=1$ wird). Der Wert von k wird durch eine graphische Tabelle (Curvensystem) gegeben. A. S.

R. Feret. **Étude graphique de la flexion de prismes imparfaitement élastiques.** Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 128-135.

Nachdem der Verf. gezeigt hat, dass in einem sich biegenden, unvollkommen elastischen homogenen Prisma die neutrale Faser nicht notwendig in der Mitte der Höhe liegt, stellt er die Gleichgewichtsbedingungen auf, welche die Lage der neutralen Faser definiren, sowie den einem gegebenen Biegungsmomente entsprechenden Krümmungsradius, wenn man das algebraische Gesetz kennt, das die Spannungen mit den Verlängerungen verknüpft. Indem er sodann dieses Gesetz durch eine Curve definirt annimmt, deren Gleichung unbekannt ist, leitet er daraus graphisch dieselben Unbekannten ab, ferner die Verlängerung und die Spannung einer beliebigen Faser, die Componente der entscheidenden Wirkung in jedem Punkte und die von den belasteten Balken angenommene Gestalt. Endlich macht er einige Bemerkungen, die aus seiner Construction fliessen, und giebt an, dass dieselbe in passender Abänderung auch noch auf heterogene Prismen Anwendung findet. Lp.

K. Hayn. **Die Spannungsverteilung in elastischem Material.** Deutsche Bauz. **34**, 130-131.

Ein elastischer, rechtwinklig-parallelepipedischer Körper wird durch eine Kraft P gedrückt, die über eine Mittellinie der oberen horizontalen Seitenfläche gleichmässig verteilt ist. In irgend einem horizontalen Querschnitt ist die Spannung natürlich nicht gleichförmig, wie die gewöhnliche Rechnungsweise der Techniker annimmt. Verf. fasst den durch den fraglichen Querschnitt abgetrennten oberen Teil des Körpers als einen auf Biegung beanspruchten Balken auf und berechnet daraufhin Durchbiegung und Spannungsverteilung längs des fraglichen Querschnittes. Dies führt auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die sich bequem integriren lässt. Die so erhaltene, praktisch wahrscheinlich recht befriedigende Näherungslösung ist von einer theoretisch strengen Behandlung des eingangs genannten Problemes auf Grund der partiellen Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie natürlich immer noch weit entfernt.

A. S.

K. KAUFMANN. Rechnerische Darstellung der Momente eines einfachen Balkens mit stetiger Belastung. Centralbl. d. Bauverw. **20**, 610-611.

Die auf die einzelnen Stellen eines Balkens wirkende senkrechte Last ist gegeben. y_i sei die zum i-ten Teilintervalle gehörige Ordinate der Belastungsfläche. Man bilde

$$Y_i = \sum_1^i y_k, \qquad H_i = \sum_1^i Y_k,$$

so erhält man das Moment für dasselbe Teilintervall aus der Formel

$$M_i = \tfrac{1}{2}(H_i + H_{i-1}).$$

Das Moment ist also die halbe Summe der $(i-1)$-ten und i-ten Pyramidalzahl aus den Ordinaten der Belastungsfläche. A. S.

A. FRANCKE. Einiges über Stabbiegung. Centralbl. d. Bauverw. **20**, 485-487.

Die Biegung und Knickung eines geraden Stabes werden ohne die für kleine Ausbiegungen übliche Vernachlässigung strenge mit elliptischen Integralen durchgerechnet. Die durch die Biegung hervorgerufene Neigung der Stabaxe am Ende stellt sich durch ein elliptisches Integral erster, die Ausbiegung durch ein solches dritter Gattung dar. Bei der entsprechenden Behandlung der Knickung wird axialer und nicht genau axialer Angriff der Kraft berücksichtigt. A. S.

L. GEUSEN. Die Berechnung der Binder und Ständer einfacher Wandfachwerke. Zeitschr. deutscher Ing. **44**, 625-630 und 708-712.

Der Dachbinder wird zusammen mit den Ständern (Mauern) als ein einfach-statisch-unbestimmtes System aufgefasst. Die statisch unbestimmte Grösse (Einspannungsmoment eines der Ständer) wird nach dem Princip des Minimums der Formänderungsarbeit bestimmt. A. S.

J. KÜBLER. Das einfache Pendel als Ersatz für das Rollenkipplager. Zeitschr. deutscher Ing. **44**, 216-217 und 328.

W. CAUER. Bewegliche Brückenlager mit einer Rolle oder einem Pendel. Ibid. 917-919.

Die Auflager der Brücken werden bekanntlich vielfach beweglich construirt, um durch die Beweglichkeit des Lagers Horizontalschübe im Träger auszuschliessen und die Berechnung auf rein statischem Wege zu ermöglichen. Nach Ansicht des Verf. ist das sogenannte Rollenkipplager zu complicirt, um den genannten Zweck sicher zu erfüllen, da es durch Verschmutzung seine Beweglichkeit verliert. Verf. schlägt daher als Ersatz eine Pendelsäule vor, Säule mit flach-cylindrischer oberer und

unterer Endfläche, die sich gegen den Brückenträger einerseits, gegen das Auflager andererseits gegenlegt und durch geringe Seitenneigungen eine Bewegung des Trägers ermöglicht. Die Beanspruchung der Pendelsäule durch den Auflagerdruck wird auf Grund der von Hertz gegebenen Theorie für die elastischen Vorgänge an der Berührungsstelle zweier Körper berechnet.

Gegenvorschläge macht W. Cauer in der an zweiter Stelle genannten Note. A. S.

M. Grübler. Ringspannungen und Zugfestigkeit. Zeitschr. deutscher Ing. **44**, 1157-1164.

C. Bach. Zur Frage der Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung bei Sandstein. Ibid. 1169-1172.

M. Ensslin. Zur Frage der Spannungsverteilung in einem rotirenden Schleifstein. Ibid. 1577-1580.

Versuche an Schleifsteinen, die durch die Centrifugalwirkung der raschen Umdrehung zerrissen waren (vergl. F. d. M. **30**, 732), ergaben eine Zugfestigkeit, die erheblich höher (zweieinhalbmal so hoch) lag, wie die aus gewöhnlichen Zerreissversuchen gefolgerte Zugfestigkeit. Bei der Berechnung jener Zugfestigkeit war das Proportionalitätsgesetz zwischen Dehnung und Spannung als gültig angenommen. Dies Gesetz gilt aber für das Material der Probesteine (Sandstein) nicht, wie Grübler und Bach feststellen. Vielmehr zeigt der Elasticitätsmodul, der bei vorhandener Proportionalität constant sein soll, und der bei nicht vorhandener Proportionalität aus der Tangente der Spannungs-Dehnungs-Curve definirt werden kann, mit zunehmender Spannung eine Abnahme im Verhältnis 6 : 1, bei einem anderen Probestück sogar im Verhältnis 20 : 1. Grübler wählt zur Darstellung der beobachteten Spannungs-Dehnungs-Curve die Gleichung $\sigma(A+B\varepsilon)=\varepsilon$ ($\sigma =$ Spannung, $\varepsilon =$ Dehnung, A und B Constanten). Die alsdann gültige Differentialgleichung des Problems (Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche als abhängige Variable die Ringdehnung, als unabhängige den Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe enthält) wird aufgestellt, aber nicht weiter verwertet. Vielmehr schlägt Grübler ein Abschätzungsverfahren ein, indem er die Spannungs-Dehnungs-Curve einmal durch einen aus zwei ihrer Tangenten bestehenden umgeschriebenen, das andere Mal durch einen aus zwei ihrer Sehnen bestehenden eingeschriebenen Linienzug ersetzt. Die daraufhin berechneten Spannungsgrössen werden als obere, bez. untere Grenze der thatsächlich vorhandenen Spannungen angesehen. Da beide Grenzen nicht wesentlich von einander und von dem früher unter Annahme der Proportionalität berechneten Werte abweichen, schliesst Grübler, dass der Einfluss der Abweichung vom Proportionalitätsgesetz im vorliegenden Falle nur gering ist.

C. von Bach protestirt gegen die von Grübler für zulässig gehaltene Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit von Schleifsteinen auf Grund der von ihm gefundenen höheren Zugfestigkeit und hält das Ergebnis der Grübler'schen Näherungsrechnung für unwahrscheinlich.

M. Ensslin giebt ein graphisches Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichung des Problems, welches indessen Grübler als völlig willkürlich bezeichnet. Indem er den Ensslin'schen Vorschlag bestimmter fasst, kommt Grübler sogar auf Grund dieses Vorschlages zu seinen früheren Ergebnissen zurück. A. S.

T. J. Baker. The frequency of transverse vibrations of a stretched indiarubber cord. Phil. Mag. (5) **49**, 347-351.

Die Schwingungszahl einer gespannten Kautschuksaite ist dem Ausdruck $\sqrt{(L-l)/L}$ proportional, worin l die natürliche, L die Länge in gespanntem Zustand bedeuten. Br.

A. Francke. Einiges über Fundamente. Einiges über Grundbögen. Schweiz. Bauz. **35**, 145-146; **36**, 71-73.

Eine Last P soll durch Untermauerung auf eine breite Fläche des Untergrundes übertragen werden. Die Untermauerung habe die Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks, Spitze im Angriffspunkte von P, Basis auf dem Untergrunde, Seiten um arc tg μ gegen die Horizontale geneigt. ψ sei der Gegendruck des Untergrundes für die Einheit der Senkung, E das Elasticitätsmass des Untergrundes, $2l$ die Basis, h die Höhe des Dreiecks. Die Senkung y des Untergrundes im Abstande x von dem einen Ende der darauf gelagerten Untermauerung wird durch die Gleichung

$$\xi^3\frac{d^4y}{d\xi^4}+6\xi^2\frac{d^3y}{d\xi^3}+6\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}=-\alpha y\left(\xi=xl,\ \alpha=\frac{12\psi l}{\mu^2E}\right)$$

bestimmt. Lösung derselben durch Reihenentwickelung. Hieraus die zulässige Neigung μ, bei der an den Enden der Untermauerung noch eben Druck auf den Untergrund übertragen wird, näherungsweise

$$\alpha=7,\ \text{also}\ \mu=\sqrt[3]{\frac{12\psi l}{7E}}.$$

A. S.

V. Meyer. Die Berechnung der Evolutfeder (Bufferspirale). Zeitschr. deutscher Ing. **44**, 1791-1793.

Die Evolutfedern, wie sie an den Eisenbahnpuffern verwandt werden, werden bekanntlich bei ihrer Zusammendrückung auf Torsion beansprucht. Da der Querschnitt der einzelnen Windung kein Kreis, sondern ein schmales Rechteck ist, hat man die de St. Venant'sche Theorie der Torsion zu benutzen, um die Zusammendrückung der Feder bei gegebener Belastung zu bestimmen. Die Behandlung wird indessen hierbei dieselbe wie bei der elementaren Theorie der Torsion (d. h. bei kreisförmigem Querschnitt), nur dass ein von de St. Venant berechneter Zahlencoefficient hinzuzufügen ist. Bei den Evolutfedern ist weiter zu berücksichtigen, dass jeder Gang der Feder einen anderen mittleren Abstand $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von der Federaxe hat; die Gesamtausbiegung f berechnet sich daher als Summe der den einzelnen Gängen entsprechenden

Ausbiegungen $f_1, f_2, f_3, \cdots$, wobei $f_1 : f_2 : f_3 \ldots = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 \ldots$ Die umständliche Ausführung der Einzelrechnungen und die Summation der einzelnen Ausbiegungen wird durch Aufstellung einer Tabelle erleichtert, die zu dem Eingange a/r_1 (a = Abstand zweier aufeinander folgenden Windungen, r_1 = Radius der äussersten Windung), das Verhältnis f/f_1 direct zu entnehmen gestattet. A. S.

F. LEITZMANN. Eine Aufgabe aus der Stosselasticität und -Festigkeit. Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 417-420, 514-517.

Aus Zerreissversuchen mit Tiegel- und Martinstahl findet Verf. als Elasticitätsgesetz (σ Spannung, ε Dehnung, E Elasticitätsmodul) für diese Materialien bei nicht zu kleiner Beanspruchung $\sigma^5 = E\varepsilon$. Daraufhin werden die üblichen Formeln für die Durchbiegung und die Biegungsarbeit, die sonst unter Annahme des Proportionalitätsgesetzes abgeleitet werden, umgerechnet und mit den Ergebnissen von Schlagversuchen verglichen. Anwendung derselben auf Lokomotivaxen. A. S.

G. KAISER. Construction der gezogenen Geschützrohre. Zweite umgearbeitete Auflage. Wien: L. W. Seidel & Sohn. 420 S. 8° u. 14 Taf.

Nach den übereinstimmenden Besprechungen in der Revue d'Artillerie **55,** LXX-LXXII, in den Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens **31,** 421-423, und in der Kriegstechnischen Zeitschrift **3,** 249-263, ist dieses Werk gegenwärtig massgebend auf dem Gebiete der Geschütz-Construction. Lp.

Weitere Litteratur.

R. LAUENSTEIN. Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis. Nebst einem Anhange, enthaltend Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte. 6. Aufl. Stuttgart: A. Bergsträsser. VI + 179 S. gr. 8°.

A. E. H. LOVE. The propagation of waves of elastic displacement along a helical wire. Cambr. Trans. **18,** 364-374.

GEO. MEHRTENS. La construction des ponts en Allemagne au XIX[e] siècle. Mémoire publié à l'occasion de l'exposition universelle de Paris en 1900. Berlin: J. Springer. V + 140 S. gr. Fol.

O. DZIOBEK. Die Beanspruchung der Kanonenrohre nach der dynamischen Theorie. Mitt. üb. Art. u. Genie **31,** 33-44.

Vergl. F. d. M. **30,** 732, 1899.

W. REBBER und A. POHLHAUSEN. Berechnung und Construction der Maschinenelemente. 5. Aufl. Bearb. von A. Pohlhausen. Mittweida: Polytechn. Buchh. 145 farb. Bl. u. VII S. Text Imp. 4°.

C. Capillarität.

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Sur les phénomèmes capillaires. Rapports Congr. intern. Phys. 1, 487-511.

Eigenschaften einer isolirten Flüssigkeit. Eigenschaften der Berührungsschicht eines festen Körpers und einer Flüssigkeit. Ueber die charakteristische Eigenschaft der zweien, ihrer gegenseitigen Affinität unterworfenen Flüssigkeiten gemeinsamen Oberfläche. Lp.

G. BAKKER. Théorie de la capillarité. 2e mémoire. Journ. de Phys. (3) 9, 394-404.

Ueber den ersten Teil der Arbeit vergleiche man F. d. M. 30, 735, 1899. Indem der Verf. sich ein homogenes Agens vorstellt, das dieselben äusseren Kräfte erzeugt wie die Flüssigkeit, gelangt er durch Ueberlegungen, die zwar die Wahrscheinlichkeit, aber nicht die zwingende Notwendigkeit des Ergebnisses hervortreten lassen, zu dem Ausdrucke $\varphi(r) = -f \cdot e^{-qr}/r$ für die Kräftefunction, wo f und q Constanten sind, in Uebereinstimmung mit der Function, zu der van der Waals in seiner „Théorie thermodynamique de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de densité" kommt. Mit Hülfe dieser Kräftefunction berechnet der Verf. dann die potentielle Energie für die Volumeneinheit, die Spannungen im äusseren Mittel, den molecularen Druck und die Oberflächenspannung. Zuletzt wird die Voraussetzung rechnerisch verfolgt, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine wirkliche elastische Membran ist mit einer Spannung gleich derjenigen der Oberfläche. Als Ergänzung, zum Teil Wiederholung der vorliegenden Betrachtungen sind die Ausführungen des Verf. in mehreren Aufsätzen der Zeitschrift für physikalische Chemie nachzulesen. Lp.

L. GRUNMACH. Experimentelle Bestimmung von Capillaritätsconstanten condensirter Gase. Berl. Ber. 1900, 829-838.

Die Capillaritätsconstanten einiger condensirter Gase werden nach der Methode der capillaren Wellen bestimmt und aus ihnen die Moleculargewichte der entsprechenden Substanzen berechnet. Sie stimmen bei schwefliger Säure und Ammoniak mit den entsprechenden Werten für die Gase genügend überein, nicht dagegen für Chlor. Br.

H. HULSHOF. De rechtstreeksche afleiding van de waarde der moleculairconstante σ, beschouwd als spanning in het oppervlak. Amst. Ak. Versl. 8, 432-441.

G. VINCENT. Sur l'épaisseur des couches de passage. Ann. de chim. et phys. (7) 19, 421-516; Journ. de Phys. (3) 9, 78-91.

Kapitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

J. H. POYNTING and J. J. THOMSON. A textbook of physics: Sound. Second edition. London: Charles Griffin and Company. XII + 163 S. [Nature 68, 26-27].

Dieses Buch ist der erste Beitrag zu einem vollständigen Lehrbuche der Physik. Dasselbe ist vornehmlich zum Gebrauche von Studenten bestimmt, die das Hauptgewicht auf das Studium der experimentellen Teile der Physik legen, und die noch nicht den Standpunkt erreicht haben, auf welchem das Lesen höherer Werke über besondere Gegenstände wünschenswert ist. Daher ist der Umfang des von Seiten des Lesers beanspruchten mathematischen Wissens nicht gross. Innerhalb der so festgesteckten Grenzen ist die Behandlung mit seltenen Ausnahmen recht befriedigend, und das Buch kann als eine äusserst lehrreiche Einleitung in den Gegenstand durchaus empfohlen werden.. Vielleicht ist es bedauerlich, dass die übliche Beigabe englischer Lehrbücher, ein Vorrat von Uebungsbeispielen, nicht in dem Buche enthalten ist.

Gbs. (Lp.)

O. D'ALENCAR SILVA. De l'action d'une force accélératrice sur la propagation du son. Teixeira J. 14, 17-48, 97-108.

In dieser Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit der Fortpflanzung des Schalles in einem unbegrenzten Mittel unter Berücksichtigung der beschleunigenden Kräfte der Schwere. Er gründet seine Untersuchungen auf die Veröffentlichungen des verstorbenen G. de Souza (Mélanges de calcul intégral. Leipzig, 1882), über deren Inhalt er sorgfältig berichtet.

Vor der Angriffnahme des eigentlichen Gegenstandes giebt Silva einige Andeutungen über das Verfahren zur Lösung der Aufgabe der Fortpflanzung des Schalles, wenn man das Mittel als imponderabel und die Geschwindigkeit der Molekeln als sehr klein voraussetzt. Bei der Aufnahme des zu behandelnden Problems wird dann angenommen, dass die Molekeln des Mittels von Kräften angegriffen werden, die ein Potential haben. Die Lösung wird mit Hülfe bestimmter Integrale gegeben, zuerst in einigen besonderen einfachen Fällen und dann im allgemeinen Falle. Aus den gefundenen Formeln wird ein von G. de Souza ausgesprochenes Theorem gefolgert, nach welchem die Fortpflanzung des Schalles in einem unbegrenzten Mittel weder von den seine Molekeln angreifenden beschleunigenden Kräften, noch von den sie behaftenden Geschwindigkeiten abhängt.

Tx. (Lp.)

Lord Rayleigh. On approximately simple waves. Phil. Mag. (5) **50**, 135-139.

Unter annähernd einfachen Wellen werden solche Wellenzüge verstanden, deren Amplitude, Phase und Schwingungszahl sich mit der Zeit nur langsam ändern, also z. B. Schwebungen. Es werden einige einfache Fälle dieser Art mit periodischen Aenderungen untersucht, und es wird gezeigt, wie in jedem einzelnen Fall die annähernd einfache Welle in wirklich einfache zu zerlegen ist. Br.

P. Duhem. Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues. C. R. **131**, 1171-1173.

Ist V eine in zwei Medien definirte Function, die an sich mit der Zeit variabel ist, aber so, dass sie an der Trennungsfläche mit allen Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung verschwindet, und ist $dn = a dt$ die elementare Veränderung der Normale der Trennungsfläche in der Zeit dt, so ergeben sich für $n=2$ und $n=3$ die Gleichungen:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2$$

und $a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$; weiter allgemein für höhere Werte von n:

$$a^{2(2n+1)}\left[\left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial z}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial^{2n+1} V}{\partial t^{2n+1}}\right)^2$$

und $a^{2n}\Delta_n V = \frac{\partial^{2n} V}{\partial t^{2n}}$. Br.

Vieille. Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation. Journ. de Phys. (3) **9**, 621-644.

Der Verf. will die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Stössen, resp. Unstetigkeiten in einem Gase ableiten, ohne die hydrodynamischen Gleichungen zu benutzen. Indem er sich auf den Fall einer Röhre beschränkt, in der alle Punkte eines Querschnitts die gleiche Bewegung haben, nimmt er an, dass ein Querschnitt existirt, auf dessen einer Seite der Druck p_1 herrscht, die Geschwindigkeit v_1 und die Verdünnung z_1, während diese Grössen auf der anderen Seite die Werte p, v, z haben. Wenn nun dieser Querschnitt in der Zeit dt um dx fortschreitet, so findet der Verf. für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{-\frac{1}{\varrho_0}\frac{p_1-p}{z_1-z_0}},$$

worin ϱ_0 die Dichtigkeit des Gases im Ruhezustand bezeichnet. Es folgt dies aus zwei Gleichungen, deren eine ausdrücken soll, dass die Zunahme der Bewegungsgrösse gleich der Zunahme des Druckes ist, während die

andere die Abhängigkeit zwischen dx und v_1-v darstellen soll. Die beiden vom Verf. benutzten Gleichungen haben aber gar nicht diese Bedeutung, sondern sind ganz willkürliche Aufstellungen. Dem obigen Ausdruck für $\frac{dx}{dt}$ sowie den weiteren Folgerungen daraus fehlt daher jede Begründung. Wn.

H. Lamb. A problem in resonance, illustrative of the theory of selective absorption of light. Lond. M. S. Proc. **32**, 11-20.

In Verallgemeinerung einer 1873 von Lord Rayleigh angestellten Untersuchung (vergl. dessen Lehre vom Schall, Kap. XVII) behandelt der Verf. die Störung, welche ein kugelförmiges Hindernis auf Schallwellen ausübt, für den Fall, dass die Kugel, wenn sie ganz frei ist, verschiedene von einander unabhängige Schwingungen ausführen kann. Hinsichtlich der letzteren wird die Annahme gemacht, dass sie darstellbar seien durch die Gleichung

$$r = a + \alpha_n S_n,$$

worin $r = a$ die mittlere Lage der Kugel darstellt, α_n eine periodische Function der Zeit, S_n eine Kugelflächenfunction n-ter Ordnung bezeichnet; ferner wird angenommen, dass die kinetische (T) und potentielle (V) Energie der schwingenden Kugel nur von der Gestalt und der normalen Bewegung der Oberfläche abhängen und daher die einfache Form haben:

$$T = \tfrac{1}{2} A_n \left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right)^2, \quad V = \tfrac{1}{2} C_n \alpha_n^2.$$

Die Gleichung der Kugel unter dem Einflusse des umgebenden Gases ist dann

$$(7) \qquad A_n \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + C_n \alpha_n = -\iint p S_n do,$$

worin p den Druck des Gases bedeutet, do das Flächenelement der Kugel. Ferner ist das Geschwindigkeitspotential des Gases, auf Polarcoordinaten bezogen, eine Summe von Gliedern der Form

$$e^{ikct}\{B_n \psi(kr) r^n S_n + B'_n f(kr) r^n S_n\}.$$

Der erste Summand stellt hier die einfallende, der zweite die von der Kugel reflectirte Welle dar, ψ_n und f_n sind im wesentlichen Bessel'sche Functionen, deren Index die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Aus dem Geschwindigkeitspotential ergiebt sich in bekannter Weise p, und die Einsetzung in (7) ergiebt eine Gleichung zwischen der Schwingungszahl $\frac{1}{2\pi}(C_n/A_n)^{\frac{1}{2}}$ der freien Kugel, der Schwingungszahl $\frac{1}{2\pi}kc$ der Schallwellen und den Coefficienten B_n, B'_n. Diese Gleichung wird nunmehr eingehend discutirt. Aus ihr ergiebt sich einmal (für $B_n = 0$) die Schwingungszahl der durch die Bewegung der Kugel erregten Schallwelle,

und zwar ist dieselbe für grössere n sehr nahe gleich der Schwingungszahl der Kugel. Ferner folgt aus der in Rede stehenden Gleichung, wenn B_n nicht $= 0$, also k gegeben ist, das Verhältnis $B'_n : B_n$, das im allgemeinen proportional $(ka)^{2n+1}$ ist, also sehr klein, wenn die Wellenlänge gross ist gegen die Dimension der Kugel. Nur wenn kc nahe gleich $(C_n/A_n)^{\frac{1}{2}}$ ist, d. h. wenn die Luftwellen nahezu die gleiche Schwingungsdauer haben wie die freie Bewegung der Kugel, hat $B'_n : B_n$ einen beträchtlichen Wert, dessen Maximum bestimmt wird. Der Fall der fest bleibenden Kugel ergiebt sich aus denselben Formeln, wenn man $A_n = 0$ setzt. Weitere Folgerungen betreffen den Fall, dass die Kugel von ebenen Wellen getroffen wird, ferner eine eingehendere Discussion des Falles $n = 1$ u. s. w. Im ganzen sind die Resultate für die Akustik nicht von erheblicher Wichtigkeit; ihr Hauptinteresse liegt darin, dass sie eine Analogie bilden zur mechanischen Theorie der selectiven Absorption des Lichtes in Gasen. Wn.

H. Lamb. Problems relating to the impact of waves on a spherical obstacle in an elastic medium. Lond. M. S. Proc. **32**, 120-150.

Ganz ähnliche Untersuchungen, wie sie der Verf. betreffs der Störung von Luftwellen durch ein kugelförmiges Hindernis durchgeführt hatte (vergl. das vorhergehende Referat), stellt er hier für Wellen an, die sich in einem incompressiblen elastischen Medium fortpflanzen. Für die drei Componenten der Verrückungen gelten, wenn man ausser den elastischen Kräften noch einen Druck p einführt, die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_2 u + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

wobei

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ und daher } \Delta_2 p = 0$$

ist. Zunächst wird die Bewegung betrachtet, die durch eine äussere Störung hervorgerufen und daher überall im Innern endlich ist. Für eine solche hat, auf Polarcoordinaten bezogen, p die Form:

$$p = -\mu k^2 e^{ikct} \Sigma r^n S_n.$$

Setzt man ferner

$$u = e^{ikct} \Sigma u_n, \quad v = e^{ikct} \Sigma v_n, \quad w = e^{ikct} \Sigma w_n,$$

so enthalten die Ausdrücke für u_n, v_n, w_n neben der in p auftretenden Kugelfunction S_n noch zwei andere Kugelfunctionen T_n, U_n derselben Ordnung, aber mit anderen Constanten, sowie Bessel'sche Functionen erster Art mit dem Argumente kr und dem Index $\frac{1}{2}(2n + 1)$. Für den Fall ebener Wellen wird $S_n = 0$, und die in T_n, U_n enthaltenen, im allgemeinen willkürlichen Constanten sind völlig bestimmt.

Handelt es sich nicht um eine äussere Störung, sondern um Wellen, die sich nach aussen hin verbreiten, so hat p die Form

$$p = -\mu k^2 e^{ikct} \sum \frac{S'_n}{r^{n+1}},$$

und falls man

$$u = e^{ikct} \sum u'_n, \ldots$$

setzt, enthalten u'_n, v'_n, w'_n neben den Kugelfunctionen S'_n, T'_n, W'_n auch Bessel'sche Functionen zweiter Art. (Dass die in Rede stehenden Functionen Bessel'sche Functionen sind, erwähnt Verf. weder in dieser, noch in der vorhergehenden Arbeit.) Uebrigens vereinfachen sich die Ausdrücke für u'_n erheblich für grössere Werte von r, und aus den vereinfachten Formeln ergiebt sich ein einfacher Ausdruck für die von den divergirenden Wellen fortgeführte Energie.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen geht der Verf. zu speciellen Arten der Erzeugung solcher divergirenden Kugelwellen über, und zwar nimmt er zunächst an, dass dieselben durch Reflexion der einfallenden Wellen an der festen Kugel $r = a$ entstehen. Für die Oberfläche der letzteren müssen dann die Gleichungen

$$\sum(u_n + u'_n) = 0, \quad \sum(v_n + v'_n) = 0, \quad \sum(w_n + w'_n) = 0$$

erfüllt sein, und mittels dieser kann man die in der reflectirten Welle auftretenden Kugelfunctionen S'_n, T'_n, U'_n aus den in den einfallenden Wellen enthaltenen S_n, T_n, U_n berechnen. Bemerkenswert ist, dass, wenn die einfallenden Wellen ebene sind, die Amplitude der reflectirten Welle, die dem Gliede $n = 1$ entspricht, viel grösser ist als in dem entsprechenden hydrodynamischen Problem. Nach der Reflexion an einer starren, festen Kugel wird in gleicher Weise die an einer starren, aber beweglichen Kugel behandelt, sowie die an einer starren Kugelschale, deren Inneres irgend einen schwingenden Mechanismus, etwa einen Kreisel enthält. Weiter wird an Stelle der starren Kugel $r = a$ ein kugelförmiger Hohlraum in dem elastischen Medium angenommen und schliesslich eine elastische Kugel von anderer Dichtigkeit und Elasticität als das umgebende Medium. In allen Fällen wird unter gewissen einfachen Annahmen über die einfallende Schwingung das Verhältnis der in letzterer zugeführten und der in den divergirenden (reflectirten) Wellen fortgeführten Energie berechnet.

Zum Schluss wird der Fall näher betrachtet, dass die bewegliche starre Kugel nahezu dieselbe Schwingungsdauer hat wie die einfallende ebene Welle. Hier steht die von der reflectirten Welle fortgeführte Energie zu der in der einfallenden Welle zugeführten in dem Verhältnis

$$J = \frac{2n+1}{2\pi} \lambda^2,$$

wo λ die Wellenlänge bezeichnet, n die Ordnung der Kugelfunction. Dasselbe Resultat hatte sich auch bei dem analogen akustischen Problem (vergl. das vorhergehende Referat) ergeben. Wn.

H. Lamb. On a peculiarity of the wave-sytem due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium. Lond. M. S. Proc. **32**, 208-211.

Bei Aufgaben über Wellen, die in einem Medium dadurch entstehen, dass ein in demselben befindlicher heterogener, der Einfachheit wegen als kugelförmig angenommener Körper sich bewegt, hat die Lösung in weiterem Abstande von jener Kugel die Form

$$(1) \qquad \frac{C}{r} e^{ik(ct-r)} S_n,$$

worin S_n eine Kugelfunction darstellt und k im allgemeinen einen complexen Wert $k = x + im$ hat, so dass die Lösung in reeller Form

$$(3) \qquad \frac{C}{r} e^{-m(ct-r)} \cos x\,(ct - r + \alpha) \cdot S_n$$

lautet. Da für grosse r der Exponent $-m(ct-r)$ grosse positive Werte annehmen kann, so sind Zweifel darüber laut geworden, ob Bewegungen, wie sie durch (3) dargestellt sind, auch wirklich in der Natur vorkommen können. Die Schwierigkeit wird sofort durch die Bemerkung gehoben, dass die in Rede stehenden Bewegungen in irgend einem Punkte des Mediums erst beginnen, wenn $ct = r$ ist, während für $ct < r$ Ruhe vorhanden ist. Der Verf. erläutert dies an einem Problem, bei dem neben der Zeit nur eine Dimension vorkommt, nämlich bei derjenigen Schwingung einer unendlich langen gespannten Saite, die durch eine periodische Bewegung einer in einem Punkte der Saite angebrachten äusseren Masse entsteht. Wn.

G. Jäger. Ueber Longitudinalschwingungen in Stäben. Wien. Ber. **109**, 81-91.

Der tiefste Longitudinalton eines an beiden Enden freien Stabes ist die höhere Octave des tiefsten Longitudinaltones, den derselbe Stab hervorzubringen vermag, wenn ein Ende absolut fest ist. Verschieden von beiden ist der Ton des Stabes, wenn das eine Ende auf eine elastische Unterlage drückt. Um dieses Resultat theoretisch abzuleiten, untersucht der Verf. eine Particularlösung der Gleichung der Longitudinalschwingungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

von der bekannten Form

$$\xi = A \sin(mx + n) \sin(cmt) + G$$

mit der Nebenbedingung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ (freies Ende)}, \quad -Eq\frac{\partial \xi}{\partial x} = l + \varepsilon\xi$$

für $x = l$, d. h. für das Ende, das auf der elastischen Unterlage ruht.

Die Höhe des entstehenden Tones hängt von einer transcendenten Gleichung von der Form

$$\operatorname{tg} y = \frac{a^2}{y}$$

ab. Die Fälle, in denen das Ende $x = l$ fest oder ebenfalls frei ist, ergeben sich leicht als Specialfälle des besprochenen allgemeineren Falles. — Der Fall, dass das Ende $x = 0$ fest statt frei ist, während für $x = l$ die obige Bedingung bleibt, lässt sich ebenso behandeln. Wn.

B. Theoretische Optik.

P. Drude. **Lehrbuch der Optik.** Leipzig: S. Hirzel. XIV + 498 S. gr. 8° m. 110 Abb. [Nature **62**, 595-597].

Drude ist zur Abfassung des vorliegenden Werkes dadurch veranlasst worden, dass ein das ganze Gebiet umfassendes modernes Lehrbuch bisher fehlte. Eigenartig ist dem Buche die Berücksichtigung der neuesten Arbeiten, so in der geometrischen Optik, in der Diffractionstheorie, bei der Erklärung der magneto-optischen Erscheinungen wie bei den optischen Eigenschaften der bewegten Körper, endlich in dem letzten Abschnitt, der die Strahlung behandelt, ein Gebiet, das in keinem der bisherigen Lehrbücher der Optik einen Platz gefunden hat. In allen diesen Punkten geht das neue Buch auch über die Helmholtz'schen Vorlesungen über die elektromagnetische Lichttheorie hinaus. Andererseits hat sich der Verf. bemüht, seine Darstellung so zu gestalten, dass sie dem nur mit den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung vertrauten Leser verständlich ist und geeignet, einen solchen derart in die Optik einzuführen, dass er die Ziele und Resultate der neuesten Forschung verstehen und an der Hand der Originalarbeiten ins Einzelne verfolgen kann.

Der Gang der Entwickelung ist durchweg ein synthetischer, an das Experiment anknüpfender. Vorangestellt ist die geometrische Optik, da zu ihr die einfachsten Experimente führen und dabei die wenigsten Voraussetzungen über die Natur des Lichtes gemacht werden. In der physikalischen Optik werden zunächst (Abschn. I) die allgemeinen Eigenschaften des Lichtes behandelt, die aus dem Begriff der transversalen Schwingungen, ohne specielle Voraussetzungen über die Natur der letzteren, folgen, also Interferenz, Beugung, Polarisation, Huygens'sches Princip. Hervorgehoben sei hier, dass die Sommerfeld'sche strenge Lösung des einfachsten Falles der Beugungserscheinungen aufgenommen ist, ferner die geometrische Darstellung der Fresnel'schen Integrale nach Cornu, sowie die Untersuchungen über die Leistungsgrenze der Mikroskope und Fernrohre. Im zweiten Abschnitt, der den optischen Eigenschaften der Körper gewidmet ist, werden nach einem kurzen Hinweis auf die mechanische Theorie die Grundgleichungen der elektro-magnetischen Lichttheorie abgeleitet und aus ihnen die optischen Eigenschaften der durch-

sichtigen isotropen Körper wie der durchsichtigen Krystalle; weiter werden unter Zugrundelegung der Helmholtz'schen Ionenhypothese die Eigenschaften der absorbirenden Körper behandelt, sowie die Theorie der normalen und der anomalen Dispersion, woran sich die Erörterung der Erscheinungen der natürlich-activen, der magnetisch-activen, endlich die der bewegten Körper anschliesst.

Der dritte Abschnitt, die Strahlung der Körper betitelt, beschäftigt sich mit der Verknüpfung der Optik mit der Thermodynamik und mit der kinetischen Gastheorie. Zunächst wird die energetische Deutung der Strahlung besprochen, dann die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf reine Temperaturstrahlungen, zum Schluss das Leuchten der Gase und Dämpfe.

Das ist der Inhalt des Werkes, das als eine sehr schätzenswerte Bereicherung der wissenschaftlichen Litteratur bezeichnet werden kann.

Wn.

J. Larmor. **Aether and matter. A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena.** Cambridge: University Press. XXVIII + 365 S. 8°.

In dem vorliegenden Werke giebt der Verf. eine zusammenhängende Darstellung seiner Anschauungen über die Constitution der Materie und des Aethers, deren Grundzüge er bereits vor einigen Jahren in mehreren Abhandlungen niedergelegt hatte (vergl. F. d. M. **27**, 737, 1896; **28**, 792, 1897; **29**, 744, 1899). Er beginnt (Abschn. I) mit einer historischen Uebersicht über die Erscheinungen, die eine Folge der Bewegung der Materie durch den Aether sind (Aberration des Lichtes, elektro-optische, magneto-optische und rein elektrische Phänomene) und schliesst daran allgemeine Erörterungen über die Fortpflanzung von Wellen und Strahlen in bewegten Medien. Im zweiten Abschnitt begründet er dann ausführlich seine Annahmen über die Constitution des Aethers und der Materie und leitet daraus die elektrodynamischen Gleichungen des freien Aethers wie die eines materiellen Mediums her. Hinsichtlich der Grundannahmen verweisen wir auf das Referat über die zweite der oben angeführten Arbeiten in F. d. M. **28**, wo dieselben ausführlich dargelegt sind. Im dritten Abschnitt werden die Modificationen besprochen, die an dem Schema der Grundgleichungen anzubringen sind, wenn das materielle System nicht fest ist, sondern sich durch den Aether bewegt. Die Resultate, zu denen der Verf. hier namentlich hinsichtlich der Aberration gelangt, stimmen im wesentlichen mit denen von H. A. Lorentz (vergl. F. d. M. **25**, 1632, 1893-1894) überein; doch ist die Ableitung eine wesentlich andere. Es folgen (Abschn. IV) die magneto-optischen Erscheinungen und der Einfluss der Erdbewegung auf die Drehung der Polarisationsebene, ferner (Abschn. V) die Strahlung materieller Systeme. Dem eigentlichen Texte ist noch eine Anzahl von Zusätzen beigegeben, in denen einzelne

Punkte weiter erörtert werden. Dieselben betreffen u. a. den Zweck mechanischer Erklärungen und den Begriff der Kraft, die Elektrolyse, die mechanischen Modelle zur Erläuterung der Eigenschaften des Aethers, die magnetische Einwirkung auf die Strahlung (Zeeman'sches Phänomen).

Wir müssen uns mit dieser kurzen Inhaltsübersicht begnügen, da ein Eingehen auf Einzelheiten zu weit führen würde, solche zum Teil auch in den Referaten über die früheren Arbeiten des Verf. genügend besprochen sind, und bemerken nur noch, dass das Werk einen wertvollen Beitrag zu der Elektronentheorie bildet, die eine neue Auffassung der Naturerscheinungen anzubahnen scheint. Wn.

G. Sagnac. Théorie nouvelle de la transmission de la lumière dans les milieux en repos ou en mouvement. Journ. de Phys. (3) 9, 177-189.

Der Aufsatz ist eine weitere Ausführung der Mitteilungen, die der Verf. im vorigen Jahre in den C. R. gemacht hatte, und über die F. d. M. **30**, 740, 1899, berichtet ist. Indem Ref. auf diesen Bericht verweist, bemerkt er, dass der Verf. sich auch in dem vorliegenden Aufsatze auf eine Erörterung der Grundlagen seiner Theorie beschränkt. Diese Grundlagen sind nach Ansicht des Ref. zu wenig bestimmt und präcis, um Folgerungen daraus als Erklärung der Erscheinungen ansehen zu können.
Wn.

G. Sagnac. Relations nouvelles entre la réflexion et la réfraction vitreuses de la lumière. Arch. Néerl. (2) **5**, 377-394.

Während in den früheren Theorien der Reflexion die materiellen Medien als continuirlich angenommen wurden, führt der Verf. in die Frage der Reflexion an Glas den Begriff der Discontinuität ein (vergl. den vorstehenden Bericht). Ohne das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit zu behandeln, sucht er so direct wie möglich einige der bekannten Beziehungen der Reflexion und der Brechung an Glas herzuleiten; gleichzeitig stellt er neue Relationen auf, welche er durch die Beobachtung hat nachprüfen können. In einer Anmerkung bespricht er die Punkte, in denen seine Theorie mit der von ihr durchaus verschiedenen Lorentz'schen zusammentrifft. Lp.

D. A. Goldhammer. Ueber den Druck der Lichtstrahlen. Arch. Néerl. (2) **5**, 467-483.

Für die Ableitung des von Bartoli im Jahre 1876 behaupteten, von Boltzmann 1884 berechneten Lichtdrucks giebt es zwei vollkommen von einander unabhängige Wege: den thermodynamischen von Boltzmann und den elektromagnetischen von Maxwell. Der Verf. fügt ein neues Verfahren hinzu, das von den gegen die früheren Methoden bestehenden

Bedenken frei ist, indem er von den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie nach Hertz und v. Helmholtz ausgeht. Im übrigen muss wegen der Einzelheiten der formelreichen Arbeit das Original nachgelesen werden. Lp.

W. SUTHERLAND. Relative motion of the Earth and the ether. Nature **63**, 205.

Gegenüber den Aeusserungen von Larmor, Fitzgerald und Lord Kelvin bezüglich des negativen Ausfalls des Experimentes von Michelson und Morley verweist Verf. auf seinen Artikel hierüber in Phil. Mag. (F. d. M. **29**, 697, 1898). Lp.

E. CARVALLO. Sur la nature de la lumière blanche. C. R. **130**, 79-82, 130-132. Journ. de Phys. (3) **9**, 138-143.

GOUY. Sur la constitution de la lumière blanche. C. R. **130**, 241-244.

E. CARVALLO. Sur la constitution de la lumière blanche. C. R. **130**, 401-403.

GOUY. Sur le mouvement lumineux et les formules de Fourier. C. R. **130**, 560-562.

Carvallo polemisirt gegen ein Resultat, zu dem u. a. Ant. u. Alb. Garbasso (F. d. M. **28**, 743, 1897) betreffs der Natur des weissen Lichtes gelangt waren. Danach sollen, während dem einfarbigen Lichte einfache Sinusschwingungen von der Form $\sin(ht)$ entsprechen, die Schwingungen des weissen Lichtes durch die Function $e^{-kt}\sin(ht)$ dargestellt werden, d. h. gedämpfte Schwingungen sein. Gegen dieses Resultat wendet Carvallo zunächst ein, dass die Ableitung der Garbasso fehlerhaft sei, weil dabei angenommen werde, dass die Schwingungen, welche den verschiedenen Stellen des Spectrums entsprechen, sämtlich gleiche Phase haben. Stelle man ferner die Function $e^{-kt}\sin(ht)$ richtig durch das Fourier'sche Integral dar, so ergebe sich für die Intensität der einzelnen Elemente des Integrals ein Gesetz, das mit den Beobachtungen nicht vereinbar sei. Noch schwerwiegender sei aber folgender Grund: Trifft Licht von der Schwingungsform $e^{-kt}\cos(ht)$ auf ein Gitter, so haben nach dem Durchgang durch das Gitter die Schwingungen in allen Azimuten die Form $\varrho e^{-kt}\cos(ht+\varphi)$, und mit dem Azimut ändert sich nur der Factor ϱ. Stellt also die angenommene Schwingungsform der einfallenden Wellen weisses Licht dar, so müsste auch das durch das Gitter gegangene Licht, dessen Schwingungen ja nach demselben Gesetze erfolgen, weiss sein. Das widerspricht jedoch der Erfahrung.

Carvallo meint weiter, die Zerlegung der dem weissen Lichte entsprechenden Schwingungen in eine Summe einfacher Sinusschwingungen mittels der Fourier'schen Reihe oder des Fourier'schen Integrals sei überhaupt unzulässig, da es sich dabei um ganz unregelmässige Bewegungen mit allen möglichen Discontinuitäten handle. Gegen letztere Bemerkung wendet sich Gouy, indem er hervorhebt, dass es auf die

einzelnen unregelmässigen Bewegungen, aus denen die Lichtschwingungen bestehen, nicht ankomme, da man gar nicht die einzelnen Schwingungen beobachten könne, sondern nur die mittlere Intensität in einem längeren Intervalle, das eine grosse Zahl von Schwingungen umfasse. Auch könne von einer wirklichen Discontinuität gar nicht die Rede sein, da die Beschleunigung nicht unendlich gross sein könne. Endlich aber könne man ja auch Functionen mit einer endlichen Zahl von Discontinuitäten in eine Fourier'sche Reihe entwickeln. Im übrigen verweist Gouy betreffs seiner Anschauungen über das weisse Licht auf eine frühere Arbeit im Journ. de Phys. (2) **5** (1886). Ob dem weissen Lichte einfache gedämpfte Schwingungen entsprechen, lässt Gouy dahingestellt.

Carvallo spricht schliesslich noch die Vermutung aus, dass sich die X-Strahlen von dem Lichte dadurch unterscheiden, dass letzteres einer periodischen Störung des Gleichgewichts entspreche, erstere aber einer nicht periodischen. Wn.

E. Carvallo. Nouvelle interprétation des résultats de M. Michelson pour l'analyse des lumières simples par la méthode des anneaux de Newton. C. R. **130**, 496-499.

Der Verf. betrachtet die Interferenz gedämpfter Schwingungen von der Form $e^{-kt}\sin(ht)$ und findet, dass die Gestalt der Sichtbarkeitscurve der roten Cadmiumlinie seinen Resultaten entspricht; diese sei daher sehr gut aus gedämpften Schwingungen zu erklären, nicht aber die Erscheinungen des weissen Lichtes, weil, wenn das weisse Licht aus einfachen gedämpften Schwingungen bestände, die Interferenzcurven weisse Ringe sein müssten. (Vergl. auch das vorhergehende Referat.) Wn.

Ch. Fabry. Sur la décomposition d'un mouvement lumineux en éléments simples. C. R. **130**, 238-241.

An einem einfachen Beispiele werden die folgenden beiden Sätze erörtert: 1. Die spectrale Zerlegung des Lichtes entspricht genau, worauf zuerst Gouy aufmerksam gemacht hat, der Darstellung der einfallenden Schwingungen mittels eines Fourier'schen Integrals. 2. Die Dauer der Sichtbarkeit des Spectrums hängt nicht von der Dauer der Sichtbarkeit der Lichtquelle ab, sondern vor allem von dem benutzten Spectralapparat.

Das Beispiel ist das einer einfachen Sinusschwingung $F(t)$, die folgenden Bedingungen genügt:

$$F(t)=0 \text{ für } t<0;\quad F(t)=\sin(2\pi t) \text{ für } 0<t<n;$$
$$F(t)=0 \text{ für } t>n.$$

Stellt man $F(t)$ mittels des Fourier'schen Satzes dar:

$$F(t) = \int_0^\infty \varphi(q) \sin 2\pi(qt - \alpha)\, dq,$$

so wird

$$\varphi(q) = A \frac{\sin(2\pi(q-1)n)}{2\pi(q-1)n}.$$

Mithin wird die Intensität $[\varphi(q)]^2$ ein Maximum für $q = 1$. Bei spectraler Zerlegung an einem Gitter erhält man daher einen hellen Streifen, dessen Intensität von $q = 1$ ab nach beiden Seiten schnell abnimmt. Wenn ferner das Gitter sehr viele Oeffnungen besitzt, so gelangen die von den einzelnen Oeffnungen ausgehenden Schwingungen nach einander in das Auge des Beobachters. Die Dauer der Sichtbarkeit hängt also nur von der Zahl der Oeffnungen ab. Wäre diese unendlich gross, so würde das Spectrum nie erlöschen. Wn.

O. Lummer. Complementäre Interferenzerscheinungen im reflectirten Lichte. Berl. Ber. 1900, 504-513.

Die sogenannten Herschel'schen Streifen werden sichtbar, wenn man durch zwei mit ihren ebenen Hypotenusenflächen auf einander gelegte Prismen nach einer ausgedehnten Lichtquelle blickt, auf unendlich accommodirt und die Grenze der totalen Reflexion ins Auge fasst. Bei Beobachtung dieser Interferenzerscheinung unter Anwendung einer intensiven Lichtquelle zeigte sich, dass im reflectirten Lichte zwei zu einander complementare Streifensysteme enthalten sind, von denen das eine im wesentlichen mit dem bekannten identisch ist, das andere, von Lummer neu beobachtete, dem Interferenzsystem des durchgegangenen Lichtes ähnelt. Die Erscheinung erklärt sich aus der Theorie der Farben dünner Blättchen folgendermassen. Setzt man einerseits alle, nach 1-, 2-, 3-, ... maliger Reflexion im Innern des Blättchens austretenden Wellen mit der direct an der Oberfläche reflectirten zusammen, andererseits aber die letztere nur mit der einmal im Innern reflectirten, so erhält man zwei verschiedene Ausdrücke für die resultirende Intensität. Beide Ausdrücke ergeben dieselbe Lage der Maxima und Minima, nur sind die Minima im ersten Falle vollständige, im zweiten unvollständige. Das führt darauf, den Effect der Interferenz aller 2-, 3-, ... mal im Innern reflectirten Wellen für sich zu betrachten. Vergleicht man die aus diesen resultirende Schwingung mit derjenigen, die durch Interferenz der einmal im Innern mit der aussen reflectirten Welle entsteht, so findet man, dass beide Interferenzerscheinungen complementar sind, indem die eine dort ihre Minima hat, wo bei der anderen die Maxima liegen, und umgekehrt. Beobachtet man unter solchen Bedingungen, dass die beiden letztgenannten Strahlengruppen räumlich getrennt sind, so kann man neben der Haupterscheinung auch die complementare beobachten. Wn.

A. Perot et Ch. Fabry. Méthode interférentielle pour la mesure des longueurs d'onde dans le spectre solaire. C. R. **131,** 700-702.

Um die Wellenlänge λ_1 einer schwarzen Spectrallinie genau zu messen, lassen die Verf. das von der Umgebung jener Linie ausgehende Licht, nachdem das übrige Licht durch einen Spalt abgeblendet ist, auf ein dünnes Luftblättchen mit parallelen versilberten Wänden fallen. Im Beobachtungsfernrohr ergeben die verschiedenen Strahlen farbige Ringe, während dem λ_1 ganz dunkle Ringe entsprechen. Ist p_1 die Ordnungszahl des ersten dieser Ringe, i_1 sein scheinbarer Halbmesser, so ist

$$\frac{p_1 \lambda_1}{\cos i_1} = 2e,$$

wenn e die Dicke der Schicht bezeichnet. Durch denselben Apparat werden dann die von der Cadmiumlinie, deren Wellenlänge λ genau bekannt ist, herrührenden Ringe beobachtet; für den ersten derselben ist, wenn p seine Ordnungszahl, i sein scheinbarer Halbmesser ist,

$$\frac{p \lambda}{\cos i} = 2e.$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $2e$ giebt eine Gleichung, aus der man λ_1 berechnen kann, da sich der genaue Wert von p_1 schon aus einem angenäherten Werte für λ_1 ergiebt. Wn.

V. Janko. Beugung des Lichtes, veranlasst durch kreisförmige Oeffnungen, und die Theorie der Talbot'schen Linien. XXVI. Programm des k. k. Staats-Obergymnasiums in Prerau 1899-1900. 12 S. (Böhmisch).

J. M. Pernter. Ein Versuch, der richtigen Theorie des Regenbogens Eingang in die Mittelschulen zu verschaffen. Zweite Auflage mit einem Zusatze. Wien: C. Gerold's Sohn. 28 S. gr. 8.

N. Kasterin. Ueber die Ausbreitung der Wellen in einem nicht homogenen Medium von lamellarer Structur. Arch. Néerl. (2) **5,** 506-515.

„Die Untersuchung der Eigentümlichkeiten der Ausbreitung der Wellen in einem Medium, dessen Homogeneität regelmässig gestört ist, ist an und für sich von hohem Interesse, aber von besonderer Wichtigkeit ist sie für den weiteren genauen Ausbau der Theorie der Dispersion und der Absorption des Lichtes. Doch bietet solche Untersuchung grosse mathematische Schwierigkeiten dar. Man muss also mit den denkbar einfachsten Fällen anfangen. Am geeignetsten zur Einführung in dieses noch wenig bearbeitete Gebiet der Wellenlehre kann die Untersuchung über die Ausbreitung der Wellen in einem nicht homogenen Medium von

lamellarer Structur dienen. Die Lösung dieser Aufgabe bedarf keines grossen mathematischen Apparates, aber zeigt doch allgemeine Besonderheiten der Ausbreitung der Wellen in nicht homogene Media im rechten Lichte.“ Lp.

P. Drude. Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersionsgleichungen. Ann. der Phys. (4) **1**, 437-440.

Voigt hatte (F. d. M. **30**, 757, 1899) die von ihm seinen Untersuchungen zu Grunde gelegten Gleichungen als Erweiterungen der Hertz'schen Gleichungen bezeichnet. Dem gegenüber stellt Drude fest, dass die Form der Erweiterung, welche man dem Formelsystem der elektromagnetischen Lichttheorie geben muss, um zur Erklärung der Dispersion zu gelangen, von ihm herrührt, nicht von Hertz. Wn.

E. Carvallo. Sur la dispersion exceptionnelle du spath d'Islande. Journ. de Phys. (3) **9**, 465-478.

Genaue Messungen im ultravioletten Lichte haben zu folgenden, auch theoretisch wichtigen Resultaten geführt. Die Dispersion des ausserordentlichen Strahles im Kalkspat lässt sich sowohl durch die erweiterte Briot'sche Formel:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{n^2} = c'l^4 + cl^2 + a + bl^{-2} + b'l^{-4} \qquad \left(l = \frac{1}{n}\lambda\right),$$

als auch durch die modificirte Ketteler'sche Formel

$$\text{(II)} \qquad n^2 = C'\lambda^4 + C\lambda^2 + A + \frac{b_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

darstellen. Dagegen genügt keine der beiden Formeln zur Darstellung der Dispersion des ordentlichen Strahles. Für diesen muss man entweder in Formel (I) noch das Glied $b''l^{-6}$ hinzufügen oder in (II) ein Glied $\frac{b_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}$. Dagegen ist die Formel der Ketteler'schen Theorie der anomalen Dispersion, bei der an Stelle des letzten Gliedes von (II) zu setzen ist $\frac{b_1(\lambda^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2 + h_1^2\lambda^2}$, nicht geeignet, die Beobachtungen wiederzugeben. Wn.

J. J. Thomson. On a view of the constitution of a luminous gas suggested by Lorentz's theory of dispersion. Arch. Néerl. (2) **5**, 642-643.

Aus einer Lorentz'schen Formel wird geschlossen, dass in einem leuchtenden Gase die Spectrallinien nicht durch jede einzelne Gasmolekel veranlasst werden, sondern durch eine verhältnismässig nur kleine Anzahl

von Systemen, die in irgend welcher Weise aus den Molekeln gebildet werden. Lp.

E. RIECKE. Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspectrums. Ann. der Phys. (4) **1**, 399-413.

Die beiden Functionen

$$u_1 = \sum_n A_n \sin(n\varphi)\sin(2\pi p t),$$
$$u_2 = \sum_n A_n \sin(n\varphi)\cos(2\pi p t)$$

genügen, wenn die Schwingungszahl p der einzelnen Glieder der Reihe von der Form

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}$$

ist (das ist eine von Kayser und Runge gefundene empirische Formel), je einer Differentialgleichung zehnter Ordnung mit constanten Coefficienten, die ausser $\partial^{10}u/\partial\varphi^8\partial t^2$ nur die geraden Ableitungen von u nach φ, sowie u selbst enthält. Der Verf. sucht die in Rede stehenden Functionen anschaulich zu deuten, indem er sie als zwei zu einander senkrechte Vectoren auffasst, die den einzelnen Punkten eines Kreisrings zugeordnet sind. Weiter wird erörtert, welche Form die vorher erwähnte Differentialgleichung haben muss, damit zwischen p und m die Beziehung

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4} \pm \frac{eR}{4\pi m}$$

besteht, eine Beziehung, die zur Deutung des Zeeman-Phänomens herangezogen wird. Vorläufig ist die Analogie der so abgeleiteten Resultate mit dem im Titel genannten Gegenstand eine rein äusserliche. Wn.

Report of Committee. Wave-length tables of the spectra of the elements and compounds. Brit. Ass. Rep. 1900, 193-297.

W. VOIGT. Ueber eine Dissymmetrie der Zeeman'schen normalen Triplets. Ann. der Phys. (4) **1**, 376-388.

W. VOIGT. Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen. Ann. der Phys. (4) **1**, 389-398.

Beide Aufsätze bilden Fortsetzungen von Untersuchungen des Verf., über die F. d. M. **30**, 754, 1899, berichtet ist. Im ersten wird erörtert, welche Folgerungen die für die normalen Zeeman'schen Triplets abgeleiteten Formeln, bei deren Discussion sich der Verf. früher auf eine erste Annäherung beschränkt hatte, bei weiterer Näherung ergeben. Im zweiten Aufsatz werden die Grundgleichungen, auf Grund deren früher nur die

beiden Hauptfälle der Fortpflanzung ebener Wellen parallel und normal zu den magnetischen Kraftlinien behandelt waren, auf den allgemeineren Fall einer beliebigen Fortpflanzungsrichtung angewandt. Von den Resultaten ist bemerkenswert, dass sich für Geschwindigkeit, Absorption und Elliplicität ganz verschiedene Gesetze ergeben, je nachdem die Differentialgleichungen auf einen Spectralbereich verschwindender Absorption oder auf die unmittelbare Umgebung eines scharfen Absorptionsstreifens angewandt werden. Wn.

F. J. Micheli. Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magneto-optische Phänomen. Ann. der Phys. (4) **1**, 542-565.

Die im wesentlichen experimentelle Arbeit enthält einen theoretischen Abschnitt, in dem der Verf. von den Drude'schen Differentialgleichungen für magneto-optische Erscheinungen (F. d. M. **24**, 1087, 1892) ausgeht und zeigt, wie die Grenzbedingungen im Falle von Oberflächenschichten zu modificiren sind. Hinsichtlich der daraus abgeleiteten Resultate muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Wn.

A. Garbasso. Ueber eine Darstellung der lichtdrehenden Körper. Arch. Néerl. (2) **5**, 524-528.

Die Erscheinungen der Rotationspolarisation sind 1898 von J. C. Bose auf dem Gebiete der elektromagnetischen Strahlung nachgeahmt; dazu bediente er sich eines Stranges von Jutefasern, der um die Strahlenrichtung als Axe tordirt wurde. Den Versuch berechnet der Verf., indem er den Jutefasern die Eigenschaften eines einaxigen Krystalles (also zwei verschiedene Dielektricitätsconstanten ε und e nach der Axenrichtung und normal dazu) beilegt. Lp.

H. M. Macdonald. The energy function of a continuous medium transmitting transverse waves. Lond. M. S. Proc. **32**, 311-315.

Der Aufsatz bildet eine Verallgemeinerung einer Untersuchung von Green (Mathemat. Papers p. 291), der ermittelt hatte, welche Form die Energiefunction φ eines homogenen elastischen Mediums, d. h. das auf die Volumeneinheit bezogene Potential der elastischen Kräfte, haben muss, wenn sich in dem Medium transversale Wellen nach den Fresnel'schen Gesetzen fortpflanzen sollen (vergl. auch eine Arbeit von Kirchhoff, über die F. d. M. **8**, 647, 1876, referirt ist). Während Green seinen Betrachtungen die allgemeinste homogene Function zweiter Ordnung der sechs Componenten der relativen Verschiebungen

$$\left[x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dots\right]$$

zu Grunde legte, geht Macdonald von einer homogenen Function von

neun Veränderlichen aus, indem er zu den erwähnten sechs Verschiebungen noch die doppelten Rotationscomponenten

$$\omega_1 = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \dots$$

hinzunimmt. Die daraus sich ergebenden Bewegungsgleichungen des Mediums werden auf ebene longitudinale Wellen angewandt, und es wird gefragt, unter welchen Bedingungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben unabhängig von der der transversalen Wellen ist. Dazu ist erforderlich, dass φ gleich wird $K(x_x + y_y + z_z)^2$, vermehrt um eine homogene Function zweiter Ordnung der Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ferner um gewisse andere Glieder, die bei der Integration über das Volumen des Mediums sich auf Oberflächenintegrale reduciren. Von einem Medium aber, für das φ diese Form hat, ist bekannt, dass die sich in ihm fortpflanzenden transversalen Wellen den Fresnel'schen Gesetzen folgen.

Wn.

N. N. Schiller. Notiz über die Methodologie der Lehre von der Doppelbrechung. Univ. Nachr. Kiew, 1900; Phys. Rundschau von Silow 1900; auch sep. 8 S. Kiew 1900. (Russisch.)

Es ist die Meinung ziemlich verbreitet, es sei unmöglich, zu der Huygens'schen Construction auf rein experimentellem Wege zu gelangen, ohne sich gewisse Vorstellungen über die Wellenbewegung im voraus zu machen (vergl. Poggendorff, Geschichte der Physik p. 647). Dem gegenüber zeigt der Verf., dass das wirklich nicht der Fall ist.

Ghr.

L. Tr. More. On the coincidence of refracted rays of light in crystalline media. Phil. Mag. (5) **49**, 262-274.

Verf. stellt sich die Aufgabe, für jeden Hauptschnitt der Fresnel'schen Wellenfläche alle diejenigen Einfallswinkel zu ermitteln, in denen der gebrochene ordentliche und ausserordentliche Strahl in Richtung (aber natürlich nicht in Geschwindigkeit) zusammenfallen. Geometrisch gesprochen, heisst dies: Es ist in jedem Hauptschnitt der geometrische Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, für welche die beiden Berührungspunkte der von ihnen an Kreis und Ellipse gezogenen Tangenten mit dem Mittelpunkte in gerader Linie liegen. Die Lösung führt auf eine aus vier Aesten bestehende Curve achter Ordnung. Die Curven werden für jeden Hauptschnitt gezeichnet, und zwar sowohl für optisch einaxige, wie für optisch zweiaxige Medien. Am Schluss werden Zahlenrechnungen für einige Specialfälle gegeben.

Br.

E. J. Rendtorff. Achromatic polarisation with crystalline plates. Nebraska Grad. Bull. **1**, 17-22.

Im Anschluss an eine im vorigen Jahre besprochene Arbeit von

Brace (F. d. M. **30**, 761, 1899) hat der Verf. im Polariskop achromatisch doppeltbrechende Systeme experimentell untersucht, die aus zwei keilförmigen, gegen einander verschiebbaren Krystallplatten bestehen. Neben den allgemeinen Bedingungen für die Achromasie werden die zweckmässigsten Versuchsanordnungen erörtert. Wn.

J. Macé de Lépinay. Détermination des constantes optiques du quartz pour la radiation verte du mercure. — Leur application aux mesures d'épaisseurs par la méthode de Mouton. Journ. de Phys. (3) **9**, 644-652.

Die Arbeit enthält einige kurze analytische Entwickelungen zur Bestimmung der Genauigkeit der im Titel angeführten Messungen. Im übrigen ist der Inhalt rein experimentell. Wn.

C. Geometrische Optik.

R. A. Herman. A treatise on geometrical optics. Cambridge: At the University Press. X + 344 S. [Nature **68**, 202.]

Der bezeichnende Grundzug der in diesem Werke innegehaltenen Behandlung liegt in einer neuen Methode zur Bestimmung der Eigenschaften eines symmetrischen optischen Instrumentes, bei welcher der Divergenzwinkel eines kleinen Lichtbündels mehr die leitende Rolle spielt als jede andere Coordinate seines Ursprungs. Die Methode ist nach der Aussage des Verf. implicite in dem Cotes'schen Satze von dem scheinbaren Abstande enthalten, bedarf aber der Beihülfe des Helmholtz'schen Theorems, um vollständig zu werden. Die so in die Behandlung der Linsensysteme eingeführte Vereinfachung ist sehr bezeichnend; ein hinzutretender Vorteil besteht darin, dass die angenäherte Natur der Ergebnisse stets vor Augen bleibt. Ein weiterer Grundzug besteht in dem geringen Gebrauch der charakteristischen Function. Die schiefe Incidenz dünner Lichtbündel wird geometrisch behandelt, während in manchen allgemeinen Sätzen der reducirte Weg zwischen zwei Punkten mehr die Basis des Werkes bildet als die durch ihre verschiedenen Gleichungen definirte Function. Die Folge der in dem Buche abgehandelten Dinge schliesst alles ein, was in den massgebenden Werken über den Gegenstand gewöhnlich gegeben wird, und die Darstellung ist ungemein klar; diese Durchsichtigkeit ist nicht zum kleinsten Teile auf die durchweg beobachtete Uebereinkunft zurückzuführen, dass alle Längen auf derselben Geraden als algebraische Grössen behandelt werden, und dass, sobald ein Ausgangspunkt des Lichtes als Anfang für die Messung genommen ist, die positive Richtung als diejenige gewählt wird, in der das Licht fortschreitet. Das Werk kann allen Studirenden dringend empfohlen werden.

Gbs. (Lp.)

E. Wallon. **Traité d'optique géométrique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales.** Paris: Gauthier-Villars. 343 S. [Nature **62**, 30.].

E. O. Lovett. **Contact transformations and optics.** Cambr. Trans. **18**, 256-268.

Éd. Collignon. **Problème des tours équidistantes destinées à transmettre des signaux optiques.** Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 59-69.

Die Aufgabe besteht darin, eine gegebene Fläche der Erdkugel so mit gleich hohen Türmen in gleichen Abständen von einander zu besetzen, dass optische Signale zwischen zwei nächstgelegenen Türmen ausgetauscht werden können, und dass die Anlage möglichst billig herzustellen sei.

Lp.

A. Cornu. **Sur la loi de rotation diurne du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat.** C. R. **130**, 537-544; Journ. de Phys. (3) **9**, 249-262.

Bei den Heliostaten und Siderostaten hat das reflectirte Bild eines bestimmten Sternes, auf den der Apparat eingestellt ist, eine feste Lage; das übrige Gesichtsfeld dagegen dreht sich um dieses feste Centrum mit ungleichförmiger Geschwindigkeit. Um das Gesetz dieser Drehung zu bestimmen, untersucht der Verf. die Bewegung des Bildes des Himmelspoles, d. h. desjenigen Punktes P', in dem der vom Pole P ausgehende Lichtstrahl nach seiner Reflexion an dem Spiegel des Apparates eine um den Mittelpunkt des Spiegels mit dem Radius 1 beschriebene Kugel trifft. Durch Anwendung der Sätze der sphärischen Trigonometrie ergiebt sich dann für den Siderostaten, d. h. für den Apparat, bei dem das Bild D' eines bestimmten Sternes D in einem festen Punkte D' des Horizonts nahe dem Südpunkte liegt, dass P' um D' einen Kreis mit dem Radius $PD = \delta$ beschreibt. Für den Winkel Y, den $D'P'$ mit dem festen Kreise PD' bildet, gilt die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} Y = K \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2} 2\pi t), \quad K = \cos \tfrac{1}{2}(\varrho + \delta) : \cos \tfrac{1}{2}(\varrho - \delta).$$

Darin ist ϱ der Abstand PD', und die Einheit für t ist der Sterntag. Die Rotation des Gesichtsfeldes hat daher dieselbe Periode wie die scheinbare tägliche Drehung des Himmels, und sie erfolgt je nach dem Vorzeichen von K in gleichem Sinne wie diese oder in entgegengesetztem Sinne. Die Rotationsgeschwindigkeit $\frac{dY}{dt}$ ist, wie man leicht sieht, nicht constant; ihr Wert folgt sofort aus der vorstehenden Gleichung. In dem besonderen Falle $\varrho + \delta = \pi$, in dem $K = 0$ wird, bewegt sich das Gesichtsfeld nicht; der Spiegel ist dann der Erdaxe parallel. Ein anderer bemerkenswerter Fall ist der, wo D' in den Südpunkt fällt.

Für den Heliostaten, bei dem das Bild D'' des Sternes D, auf den eingestellt ist, im Horizont nahe dem Nordpunkte liegt, gelten ähnliche Sätze. Nur ist hier K stets positiv und grösser als Eins. Die scheinbare Rotation des Bildes P'' des Poles P erfolgt stets im Sinne des Uhrzeigers. Wn.

A. Fowler. Orientation of the field of view of the siderostat and coelostat. Nature **62**, 428-430.

Im Anschluss an die vorstehend besprochenen Mitteilungen von Cornu, betreffend die Rotation des optischen Feldes eines Heliostaten, giebt der Verf. die Theorie der Erscheinung und erörtert die Construction eines „Coelostaten“, der von jener Rotation befreit ist. Der Coelostat von Sir Norman Lockyer an dem „Solar Physics Observatory“ wird zuletzt abgebildet und beschrieben. Lp.

E. Goedseels. Études sur les prismes à réflexions intérieures. Brux. S. sc. **24** B, 13-26.

Delemer. Rapport. Brux. S. sc. **24** A, 91-92.

Der Verf. bestimmt auf einfache Weise die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Prisma das Licht nicht zerstreut und einen Ablenkungswinkel giebt, der unabhängig von dem Neigungswinkel des eintretenden Strahles gegen die Eintrittsfläche ist.

Mn. (Lp.)

C. Viola. Le deviazoni minime della luce mediante prismi di sostanze anisotrope. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{9}_1$, 196-204.

Es wird hier in ziemlich allgemeiner Weise das Problem der Minimumablenkung durch ein Prisma discutirt und auch der Fall betrachtet, dass die Prismasubstanz doppelbrechend ist. Der zunächst behandelte Fall eines isotropen Mediums liefert nur bekannte Resultate. Es ist selbstverständlich, dass, wenn man den einfallenden Strahl unter Festhaltung des Einfallspunktes einen beliebigen Kegelmantel beschreiben lässt, die Gesamtablenkung des Lichtstrahls nach der Brechung dabei im allgemeinen ein relatives Minimum passirt, das zu einem absoluten wird beim symmetrischen Durchgang. Für den Fall anisotroper Medien gelangt der Autor zu folgenden beiden Sätzen:

1. Eine ebene Lichtwelle, die der ersten Winkelhalbirenden des Prismas parallel ist, zeigt das Minimum der Ablenkung, wenn die Welle senkrecht zu einer Symmetrieebene des doppelbrechenden Mediums steht.

2. Wenn eine ebene Welle, die der ersten Winkelhalbirenden parallel ist, im Minimum der Ablenkung das Prisma durchdringt, so ist die Seitenabweichung gleich Null, ebenso wie in dem Falle, dass die Wellenebene der brechenden Kante des Prismas parallel ist.

Unter der „ersten Winkelhalbirenden“ ist hier die Halbirungslinie des brechenden Winkels des Prismas verstanden.

Nach Ansicht des Autors sollen diese beiden Sätze zur Bestimmung der optischen Constanten des Mediums nützliche Dienste leisten, wie er in einer weiteren Arbeit genauer auszuführen gedenkt.

Auffallend ist, dass Viola immer eine ebene Welle voraussetzt, während seine Betrachtungen auch für beliebige andere — natürlich mögliche — Wellenformen gelten, da er sich auf die Durchrechnung einer einzigen Strahlenrichtung beschränkt. Erst wenn er die Dispersionsverhältnisse, die Lage der Polarisationsebenen und der astigmatischen Bildflächen berücksichtigte, würden der Mittelpunktsort der Welle im ersten Medium und die Form der durch die Brechung modificirten Welle in die Betrachtung eingehen. Gln.

R. Sissingh. Propriétés générales des images formées par des rayons centrés traversant une série de surfaces sphériques centrées. Amst. Verh. 7, No. 5, 74 S.

Bei der Arbeit von Sissingh ist das Bestreben sichtbar, die von Bosscha begründete eigenartige Methode zur Bestimmung des Strahlenganges durch ein centrirtes System der sog. Gauss'schen Abbildungslehre als mindestens gleichberechtigt hinzustellen. Wir verkennen nicht die Eleganz dieser neuen Methode und wollen deshalb einen kurzen Abriss derselben geben.

Ein Strahl im Objectraum wird bestimmt durch den Winkel D_1 (Divergenz), den er mit der optischen Axe bildet, und durch die Schnitthöhe A_1 (Amplitude) am Scheitel S der ersten Fläche des Systems. Unter Voraussetzung paraxialen Strahlenganges lässt sich dann leicht nachweisen, dass die Grössen D_r und A_r für einen beliebig oft gebrochenen Strahl lineare Functionen der Grössen D_1 und A_1 sind, so dass man also hat:

$$\text{(I)} \qquad D_r = c\,D_1 + p\,A_1, \quad A_r = r\,D_1 + s\,A_1.$$

Die Grössen c, p, r, s sind Constanten, die von den Linsendecken, Radien und Brechungsexponenten des Systems abhängen. Als wichtige Punkte werden definirt 1. der zu S (Scheitel der ersten Linsenfläche) conjugirte Punkt, welcher zweiter Augenpunkt (deuxième point oculaire) genannt wird, und 2. das im Objectraum gelegene Bild des letzten Linsenscheitels des Systems, welches als erster Augenpunkt bezeichnet wird. Indem man nun in (I) nach einander A_1 und D_1 zu Null werden lässt, gewinnt man für die Constanten c, p, r, s mittels dieser eben definirten Punkte verhältnismässig einfache Definitionen. Insbesondere fällt die Grösse p mit der reciproken hinteren Brennweite zusammen. Sind zwei Systeme mit den Constanten c_1, p_1, r_1, s_1 und c_2, p_2, r_2, s_2 gegeben, so führt eine einfache Ueberlegung sofort zu den Constanten des combinirten Systems c, p, r, s, nämlich:

$$\text{(II)} \begin{cases} c = c_1(c_2 + p_2 d) + r_1 p_2, & p = p_1(c_2 + p_2 d) + s_1 p_2, \\ r = c_1(r_2 + s_2 d) + r_1 s_2, & s = p_1(r_2 + s_2 d) + s_1 s_2, \end{cases}$$

wenn d die Axenentfernung der beiden Systeme ist. Combinirt man auf diese Weise a brechende Einzelflächen, so ergiebt sich die Relation

$$\text{(III)} \qquad cs - pr = n_{a1},$$

wo n_{a1} das Verhältnis der Brechungsexponenten des Bild- und Objectraumes ist.

Hat ferner ein Objectpunkt für ein Coordinatensystem, dessen x-Axe die optische Axe selbst und dessen y-Axe Tangente im Scheitel der ersten brechenden Fläche ist, die Coordinaten x_1 und y_1, so sind die Coordinaten x_2 und y_2 des zugehörigen Bildpunktes:

$$\text{(IV)} \qquad x_2 = -\frac{r + s x_1}{c + p x_1}, \quad y_2 = \frac{n_{a1}}{c + p x_1} y_1,$$

wo die Grössen x_2 und y_2 auf ein Coordinatensystem bezogen sind, dessen Anfangspunkt der Scheitel der letzten brechenden Fläche des Systems ist.

Aus den Gleichungen (IV) folgen nun ohne weiteres Ausdrücke für die Vergrösserung y_2/y_1, für das Convergenzverhältnis u. s. w., ausgedrückt durch die vier Bosscha'schen Constanten. Es ergiebt sich auch leicht der Satz, dass das Product der auf die Brennpunkte bezogenen conjugirten Schnittweiten gleich dem Producte der beiden Systembrennweiten ist. An dieser Stelle wäre es ein Leichtes gewesen, von der Bosscha'schen Darstellung zu der in Deutschland entwickelten, insbesondere der Abbe'schen, überzugehen. Man hätte alsdann in der Arbeit des Verf. die elegante Methode der analytischen Entwickelung anerkennen müssen, die nur auf dem Schluss beruht, dass das Resultat beliebig vieler linearen Substitutionen wiederum eine lineare Beziehung ist. Aber an Stelle dessen formt er die bekannten von Abbe gegebenen Beziehungen über Strahlenbegrenzung, absolute Vergrösserung, Tiefe, Accommodation u. s. w. auf sein „Vier-Constanten-System" um.

So findet er z. B. für die Lateralvergrösserung den Ausdruck $s + p x_2 = n_{a1}/(a + p x_1)$, welcher der bekannten Abbe'schen Formel: $f/x = x'/f'$, entspricht. Für das Convergenzverhältnis γ, das Sissingh durch V_a bezeichnet, ergiebt sich der Wert $c + p x_1$ u. s. w.

Der Versuch, welcher in der vorliegenden Abhandlung gemacht ist, das System von Gauss in der von Abbe erweiterten Form (das Collinearsystem) durch das System von Bosscha zu ersetzen, muss zurückgewiesen werden. Im Collinearsystem sind alle Beziehungen auf die beiden Brennpunkte und die beiden Brennweiten, d. h. auf zwei Positionsbestimmungen und zwei Längenbestimmungen zurückgeführt, wobei das optische System von brechenden Kugelflächen (gewissermassen das materielle Substrat) ganz ausgeschaltet ist. Die allgemeinen Betrachtungen werden dadurch besonders leicht und sicher. Der Uebergang zur Ausrechnung eines vorliegenden praktischen Falles geschieht durch Recursionsformeln in der einfachsten Weise. Bei Bosscha und Sissingh

hat diese Loslösung vom vorgelegten System, ich möchte sagen die Vergeistigung des Problems, nur zum Teil stattgefunden; diese Autoren kleben bei ihren Betrachtungen immer noch fest an den beiden Scheiteln der ersten und letzten Systemfläche, Punkte, die für die Beurteilung der Systemleistung ganz untergeordnete Bedeutung haben. Damit steht in Zusammenhang, dass sie zu dem Fundamentalbegriff der Brennweite nur so zu sagen nebenbei gelangen, während die focalen Schnittweiten in den Vordergrund treten. Auch der Uebergang von der allgemeinen Betrachtung zu dem speciellen Fall ist nicht vereinfacht, indem auch hier schliesslich ein System von Recursionsformeln angewandt werden muss.

Was nun den sachlichen Inhalt der vorliegenden Arbeit betrifft, so ist darin nichts zu finden, was nicht in neueren Specialwerken über geometrische Optik und physiologische Optik genauer dargestellt wäre. Die kleinen Rechnungen über das menschliche Auge, über Accommodation, Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit können nur passiren unter der Annahme, dass der Verf. zeigen wollte, wie einige Formeln in der Nomenclatur von Bosscha sich zeigen. Er geht dabei aus von dem Listing'schen reducirten Auge und einigen Daten aus der physiologischen Optik von Helmholtz. Die Arbeiten von Hermann und Matthiessen über die Schichtungen der Linse des menschlichen Auges und die neueren, vielfach am Menschen- und Tierauge ausgeführten Bestimmungen der Schichtungscoefficienten nach dem Matthiessen'schen Gesetz scheinen dem Verf. entgangen zu sein. Gln.

A. Gleichen. Das astronomische Fernrohr einfachster Art, aus zwei sehr dünnen Linsen bestehend. Poske Z. **13**, 23-25.

Elementare Berechnung aller in Betracht zu ziehenden Grössen nach genauem Verfahren. Lp.

A. Blondel. Sur les propriétés photométriques des lentilles de projection. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 316-325.

Der Verf. kommt auf einen Satz der Photometrie zurück, den er in seiner Schrift „Théorie des projecteurs“ (Paris, 1894) für die Untersuchung der Projectionsapparate gegeben hatte, und giebt eine viel einfachere allgemeine Fassung, welche das Gesetz der Helligkeit eines beliebigen Projectionsapparates liefert. Lp.

A. Broca. Sur la correction de l'astigmatisme. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 283-286.

Die Correction des Astigmatismus durch ein im vorderen Brennpunkte aufgestelltes Glas kann nicht vollkommen sein, wie der Verf. rechnerisch nachweist. Man kann in diesem Falle wohl die Brennpunkte in den beiden Hauptschnitten über einander legen, aber man kann nicht die Hauptebenen gemäss jener Eigenschaft so über einander legen, dass ein

dünnes, im vorderen Brennpunkte eines anderen Systems aufgestelltes System seinen hinteren Brennpunkt verlegt, aber nicht seine Focaldistanz ändert. Lp.

H. R. WRIGHT. Photometry of the diffuse reflexion of light on matt surfaces. Phil. Mag. (5) **49**, 199-216.

Lord RAYLEIGH. On the law of reciprocity in diffuse reflexion. Ibid. 324-325.

Von der rein experimentellen ersten Arbeit interessirt an dieser Stelle nur das Resultat. Danach ist das Lambert'sche Gesetz für die Helligkeit diffus reflectirten Lichtes als proportional dem Cosinus des Winkels zwischen Austrittsrichtung und Flächennormale richtig, nicht aber das entsprechende Cosinus-Gesetz für einfallendes Licht. Lord Rayleigh weist darauf hin, dass dieses Resultat mit dem Reciprocitätsgesetz nicht in Einklang zu bringen ist. Br.

H. BLAKESLEY. On some improved formulae and methods connected with lenses. Phil. Mag. (5) **49**, 447-453.

Verf. hat früher eine Methode zur Bestimmung der optischen Constanten von Linsen entwickelt, die darin besteht, dass man die Linse auf einen Spiegel legt und den Abstand eines Objectes von der Linse bestimmt, das sich mit seinem Spiegelbild deckt. Die vorliegende Arbeit giebt die Ausdehnung der Theorie auf ein System mehrerer Linsen.
Br.

S. P. THOMPSON. On obliquely-crossed cylindrical lenses. Phil. Mag. (5) **49**, 316-324.

Augenärzte verschreiben bisweilen Linsen, deren Vorder- und Rückseite cylindrischen Schliff haben, aber so, dass die Richtungen der Cylinderaxen schräg gekreuzt sind. Verf. giebt ein Verfahren an, wonach man zu einer jeden derartigen Combination eine optisch äquivalente, aber praktisch leichter herzustellende finden kann, bei der die eine Seite sphärisch, die andere cylindrisch geschliffen ist, und Methoden zur Berechnung der entsprechenden Krümmungen. Br.

E. W. MARCHANT. The echelon spectroscope. Phil. Mag. (5) **49**, 384-403.

Discussion des Einflusses von Instrumentalfehlern auf die Messung.
Br.

A. GLEICHEN. Grundzüge einer Dioptrik der Atmosphäre. Verh. Deutsche Phys. Ges. **2**, 24-36.

Unter Voraussetzung eines concentrisch geschichteten brechenden Mediums, dessen Brechungsindices nur eine Function der Entfernung des

betrachteten Punktes vom Mittelpunkt der Erde sind, wird der Verlauf eines unendlich dünnen Strahlenbündels geschildert, der in einem solchen Medium von Punkt zu Punkt nach dem Gesetz von Snellius gebrochen wird. Es wird gezeigt, dass sowohl im Sagittal- wie im Meridionalschnitt ganz ähnliche Abbildungsbeziehungen bestehen wie bei Durchgang durch ein centrirtes Linsensystem, und dass diese Beziehungen wesentlich durch zwei Constanten ϑ und γ bestimmt sind. Denkt man sich nämlich einen Lichtstrahl, der in die Atmosphäre von der einen Seite eindringt und auf der andern Seite austritt, so bildet der Strahlenweg innerhalb der Atmosphäre eine symmetrische Curve, die im Symmetriepunkt ihren höchsten Punkt erreicht. Die Tangente im Symmetriepunkt bildet mit der Richtung des einfallenden Strahls einen Winkel ϑ, welcher die erste das Bündel charakterisirende Constante ist. Wie schon Euler gezeigt hat, gilt ferner für jeden Punkt der Lichtcurve die Beziehung: $\mu r \sin i = \gamma$, wo γ ebenfalls constant für die ganze Curve ist. Hier bedeutet μ den Brechungsindex, r die Entfernung vom Mittelpunkt der Erde und i den Winkel der Curventangente in dem betrachteten Punkte mit der Richtung von r (und zwar letztere Richtung vom Mittelpunkte der Erde fort gerechnet). Es wird dann gezeigt, wie sich die Constanten ϑ und γ für einen gegebenen einfallenden Bündel auf Grund der Ivory'schen Refractionstheorie berechnen lassen.

Es werden ferner die Helligkeitsverhältnisse im Erdschatten mit Rücksicht auf die Beleuchtung des verfinsterten Mondes einer genauen Discussion unterworfen. Das von der Sonne kommende, die Erdatmosphäre durchdringende Licht erzeugt zwei diakaustische Räume, von denen der eine, durch die Meridionalstrahlen erzeugte, virtuell ist. Der andere ist reell und von der Gestalt eines Kegels, dessen Oeffnung gleich dem scheinbaren Sonnendurchmesser (von der Erde aus gesehen) ist, und dessen Axe mit der Centrale von Sonne und Erde zusammenfällt. Der Spitzenteil dieser Fläche hat von der Erde ungefähr 40 Erdradien Entfernung; an der Mondbahn ist sein Querschnitt etwa gleich dem des Vollmondes. Es scheint keinem Zweifel zu unterliegen, dass die auffallende Helligkeit des verfinsterten Mondes von seiner Passage durch den Sonnenbrennraum herrührt. Es wird alsdann darauf hingewiesen, dass die den reellen Brennraum an der Stelle des Monddurchganges erzeugenden Strahlen bei ihrem Durchgang durch die Atmosphäre sich der Erdoberfläche bis auf Entfernungen nähern, die unterhalb einer halben Meile sind. Hierdurch ist einerseits die rötliche Färbung des verfinsterten Mondes, andererseits die Abhängigkeit des Phänomens von meteorologischen Einflüssen unseres Planeten erklärt. Der graue Schatten, in den der Brennraum peripherisch übergeht, rührt von den die Atmosphäre in höheren Schichten durchsetzenden Strahlenbündeln her, welche divergent austreten, etwa wie Lichtbündel, welche eine Negativlinse durchdrungen haben. Dieser Refractionsschatten muss eine Vergrösserung des sogenannten geometrischen Erdschattens erzeugen, wie sie thatsächlich beobachtet wird. Auf die letztere Erscheinung hat schon Plehn (Prometheus **10**, 1 ff. 1898) hingewiesen. Gln.

A. Gleichen. Erweiterung der Laplace'schen Extinctionstheorie des Sternenlichtes. Verh. Deutsche Phys. Ges. **2**, 222-234.

Wenn man zum Zwecke photometrischer Messungen einen Stern unter der Zenithdistanz z beobachtet und auf Grund der jetzt allgemein angewendeten Extinctionstheorie von Laplace für die Helligkeit den Wert J_z findet, so wird bewiesen, dass dieser Wert von J_z nicht streng richtig ist, sondern mit einem Correctionsfaktor q/q_z multiplicirt werden muss, für den man hat:

$$\frac{q}{q_z} = \frac{\mu_0^2 \sin z}{\sin(z+\vartheta)(1+d\vartheta/dz)}.$$

Hier ist q_z die Oeffnung des zur Beobachtung benutzten Photometers oder Fernrohrs und q der senkrechte Querschnitt desjenigen Strahlenbündels im leeren Raum (also vor dem Eintritt in die Atmosphäre der Erde), welcher nach der Brechung durch die Atmosphäre gerade die Oeffnung q des Fernrohrs füllt. Ferner bedeuten ϑ die Refraction unter der Zenithdistanz z, $d\vartheta$ und dz die Differentiale von ϑ und z.

Die numerische Rechnung ergiebt für den reciproken Wert des obigen Correctionsfactors für verschiedene Zenithdistanzen unter Zugrundelegung der Bessel'schen-Refractionstafeln Zahlen, die von 1,20695 bis 0,99910 abnehmen, wenn z von 90° bis 0° abnimmt, und die vom Verf. in einer kleinen Tabelle zusammengestellt sind. Bemerkenswert ist dabei, dass es eine Zone am Himmel giebt (zwischen 50° und 60°), in der die Laplace'sche Extinctionstheorie streng richtig ist, indem der Correctionsfactor dort den Wert 1 annimmt. Gln.

E. Carvallo. Sur les théories et formules de dispersion. Rapports Congr. intern. Phys. **2**, 175-199.

I. Definitionen und erste theoretische Begriffe. II. Allgemeine Züge der experimentellen Gesetze der Dispersion. III. Ueberblick über die hauptsächlichen Theorien der Dispersion. Lp.

O. Lummer and S. P. Thompson. Contributions to photographic optics. By Dr. Otto Lummer. Translated and augmented by Prof. Silvanus P. Thompson. London: Macmillan and Co. XI + 135 S. 8°. [Nature **68**, 227-229.]

K. Beucke. Ueber die optischen Täuschungen. Pr. (59) Königst. Gymn. Berlin. 31 S. 4°. 7 Fig. Gln.

K. Strehl. Theorie der allgemeinen mikroskopischen Abbildung. Erlangen: Th. Blaesing. 38 S. gr. 8°.

J. R. Rydberg. La distribution des raies spectrales. Rapports Congr. intern. Phys. **2,** 200-224.

Kapitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

C. Somigliana. Sulle unità elettriche e magnetiche. Lomb. Ist. Rend. (2) **33,** 119-132.

Verf. stellt Beziehungen zwischen den Proportionalitätsfactoren der Fundamentalgesetze auf und vergleicht daraufhin die verschiedenen Einheitssysteme. Gt.

A. K. Bucherer. Zur Theorie der Thermoelektricität der Elektrolyte. Ann. der Phys. (4) **3,** 204-209.

Unter Zugrundelegung der van't Hoff'schen Formel für den osmotischen Druck wird zunächst ein Ausdruck für die elektrische Arbeit aufgestellt, die gewonnen wird, wenn ein ganzes elektrochemisches Aequivalent durch den Strom von der Temperatur T_1 auf T_2 gebracht wird; es wird sodann, den Thatsachen entsprechend, die Ueberführungszahl berücksichtigt, und die elektromotorische Kraft E, welche im Temperaturgefälle wirkt, ausgedrückt. Die Fälle, in denen $E = 0$ ist, werden untersucht. Den Schluss bildet ein allgemeiner Weg zur Bestimmung der Thermokräfte. Gt.

C. Liebenow. Zur Thermodynamik der Thermoketten, Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. W. Voigt. Ann. der Phys. (4) **2,** 636-648.

W. Voigt. Nochmals die Liebenow'sche thermodynamische Theorie der Thermoelektricität. Ann. der Phys. (4) **3,** 155-158.

Liebenow verteidigt seine Theorie (Wiedemann Ann. **68,** 316-324; F. d. M. **30,** 787, 1899) gegen die Einwände von Voigt (Wiedemann Ann. **69,** 706-717; vergl. F. d. M. ebenda); Voigt erläutert die Ansicht, dass hierdurch die Einwände nicht entkräftet werden. Gt.

O. Wiedeburg. Energetische Theorie der Thermoelektricität und Wärmeleitung von Metallen. Ann. der Phys. (4) **1,** 758-789.

Der Verf. giebt als Inhalt der Abhandlung an: Es wurde die früher gegebene Darstellung nicht umkehrbarer Vorgänge verallgemeinert, derart, dass sie auf einen physikalisch inhomogenen Körper Anwendung finden kann, z. B. auf ein Metall, das in Folge örtlicher Temperatur- und Potentialunterschiede von Wärme und Elektricität durchströmt wird.

Zugleich wird die Theorie principiell erweitert, so dass sie bei solchen Strömungen neben der eigentlichen Leitung die „Mitführung" berücksichtigt. Hinsichtlich dieser Mitführung wird eine quantitativ bestimmte Reciprocität formulirt in einer Gleichheit der beiden Mitführungsvermögen.

Auf diesen Grundlagen ergiebt sich der elektrische Widerstand und der Coefficient des Thomsoneffects proportional zur absoluten Temperatur, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Für den Zusammenhang zwischen Thomson-Effect, Peltier-Effect und thermoelektromotorischer Kraft ergeben sich die bekannten Relationen unter der Annahme, dass die Potentialsprünge an den beiden Lötstellen von gleicher Grösse sind.

Der Vorgang der sogenannten blossen Wärmeleitung ist nicht als rein thermischer anzusehen und zu formuliren, insofern mit Aenderungen des thermischen auch solche des Cohäsionszustandes untrennbar verbunden sind. Rn.

E. Haschek. Druck und Temperatur im elektrischen Funken. Wien. Ber. **109**, 866-877; Ann. der Phys. (4) **3**, 672-682.

Die zweite Abhandlung ist ein unveränderter Abdruck der ersten. Bei der Entladung zwischen den Elektroden von der Potentialdifferenz φ werden Gas- oder Elektrodenteilchen von der Masse m und der Anfangsgeschwindigkeit u_0 von den Elektroden abgerissen. Es ergiebt sich unter bestimmten Annahmen $u_0^2 = k_1 \varphi^2 - k_2$, wo k_1 und k_2 von dem Material abhängige Constanten bedeuten. Auf dem Wege erfahren die Teilchen durch den Widerstand R, den sie finden, eine Verzögerung; unter der Voraussetzung $R = - A u^2$, wo u die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t und A eine Constante ist, wird durch Integration

$$\frac{1}{u} = \frac{A}{m} t + \frac{1}{u_0}$$

erhalten und hieraus für den Weg:

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{u_0}{u}\right).$$

Infolge der Verzögerung steigert sich der Druck und mithin die Temperatur; für beide werden unter Zugrundelegung der Gleichungen für den adiabatischen Process Ausdrücke abgeleitet. Gt.

F. Kohlrausch. Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters. Ann. der Phys. (4) **1**, 132-158.

Weitere Ausführung der in den Berl. Ber. 1899, 711-718 enthaltenen Abhandlung (F. d. M. **30**, 774, 1899). Gt.

H. Diesselhorst. Ueber das Problem eines elektrisch erwärmten Leiters. Ann. der Phys. (4) 1, 312-325.

Die Arbeit stellt eine Fortsetzung der vorstehend angezeigten Abhandlung von F. Kohlrausch dar. Die beiden in dem vorjährigen Referate angeführten Differentialgleichungen, welche den stationären Zustand definiren, werden so combinirt, dass durch Einführung einer neuen Variable

$$\theta = \tfrac{1}{2}v^2 + \int_c^u \frac{\lambda}{x}\, du,$$

wo c eine Constante bedeutet, die Gleichung

$$\sum_{x,y,z} \frac{\partial x \dfrac{\partial \theta}{\partial x}}{\partial x} = 0$$

entsteht, welche mit der zweiten jener Differentialgleichungen der Form nach übereinstimmt. Unter Benutzung von Lord Kelvin's Erweiterung des Green'schen Satzes wird dann gezeigt, dass θ eine lineare Function von v ist, und mit Hülfe der Laplace'schen Gleichung, dass nur ein einziger Zustand möglich ist. — Hiermit ist zugleich ein Weg gefunden, das Problem auf die Integration der Laplace'schen Gleichung zurückzuführen. Unter der Annahme $\frac{\lambda}{x} = p^2 u$ (p constant) wird bei geeigneter Wahl der Einheiten u. s. w. die Temperatur gleich dem Cosinus und das Potential gleich dem Sinus des Abstandes von der Stelle des Temperaturmaximums. — Für den Thomson-Effect tritt in der ersten Differentialgleichung noch das Glied $\sigma x \sum_{x,y,z} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$, in dem σ eine Function der Temperatur ist, auf; durch eine analoge Behandlung und die Substitution $\theta = \tfrac{1}{2}v^2 + \int \frac{\lambda}{x} du + \int dv \int \sigma du$ wird das Integral

$$\int \frac{\lambda}{x} du = -\tfrac{1}{2}v^2 + Av + B - \int dv \int \sigma du$$

aufgestellt, das dem Kohlrausch'schen Integral entspricht. Während Voigt die Integration für einen bestimmten Fall ausgeführt hat, untersucht der Verf., in Uebereinstimmung mit den Hypothesen von Lorenz und Tait, den Fall $\sigma x/\lambda = \tau =$ const. und entwickelt das Integral nach Potenzen von τ. Den Schluss bilden Untersuchungen über die Grösse und Lage des Temperaturmaximums und eine Methode zur Bestimmung des Thomson-Effects. Gt.

Quir. Majorana. Sull' effetto Volta, e su di un nuovo metodo per misurarlo. Rom. Acc. L. Rend. (5) 9_2, 132-139.

Die Versuchsanordnung besteht darin, dass zwischen zwei Kugeln

aus Gold, bezw. Zink ein versilberter Quarzfaden herabhängt, der eine Ladung von $\pm$ 250 Volt erhält. In der Theorie werden diese Kugeln durch zwei Punkte A und B mit den elektrischen Massen $+a$ und $-a$ ersetzt, zwischen welchen sich eine elektrische Masse $+q$ befindet. Der Abstand AB sei $=2r$, ferner x der Abstand der Masse $+q$ von $-a$. Alsdann ist

$$F = Kx = \frac{aq}{(r+x)^2} + \frac{aq}{(r-x)^2}.$$

Daher

$$\frac{K}{aq} = y = \frac{1}{x(r+x)^2} + \frac{1}{x(r-x)^2}.$$

Die Discussion dieser Curve ergiebt, dass für die Masse $+q$ vier Gleichgewichtslagen existiren, nämlich zwei stabile und zwei instabile. Es wird gezeigt, dass eine „kritische Ablenkung“ vorhanden ist. Wächst q über diesen Wert hinaus, so ist kein Gleichgewicht möglich, und q kommt mit der anziehenden Kugel zur Berührung. Hae.

A. A. PÉTROVSKY. Sur la distribution du potentiel dans un milieu hétérogène. C. R. **180,** 112-115.

A. A. PÉTROVSKY. Sur la mesure de la capacité dans un milieu hétérogène. C. R. **180,** 164-166.

a) Capacität eines ebenen Condensators, der aus zwei Metallplatten besteht, zwischen denen sich mehrere ebene Schichten verschiedener Dielektrica befinden:

$$C_p = \frac{S}{4\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{K_i}},$$

wo S die Fläche einer Schicht, d_i deren Dicke und K_i ihre Dielektricitätsconstante bezeichnet.

b) Capacität eines kugelförmigen Condensators aus einer Hohlkugel, umgeben von kugelförmigen Schichten der Dielektrica:

$$C_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}\left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i}\right)};$$

r_i ist der Kugelradius, der die i-te Schicht von der $(i+1)$-ten trennt.

Ist die Kugel vom Radius r_0 von einer dielektrischen Kugel vom Radius r_1 umgeben, so ist die Capacität der Kugel r_0

$$c = \frac{1}{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{r_1}}.$$

Hieran knüpft sich folgendes Problem:

Eine leitende Kugel vom Radius r_0 befinde sich innerhalb einer andern Kugel vom Radius r_1, die aus einem unvollkommenen Isolator besteht; ein metallischer Leiter verbinde die erstere mit einer Elektricitätsquelle vom Potential V. Es sei $V = F(t)$ zu einer beliebigen Zeit t und für $r = r_0$, und $V = F(r)$ für $t = 0$. Dann ergiebt sich für das Potential der Ausdruck V_i, bezw. V_a, bezogen auf einen Punkt im Innern oder ausserhalb der Kugel vom Radius r_1:

$$V_i = F(t) \cdot c \left\{ \frac{1}{K} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{r_1} \right\} + M e^{-at}$$

$$+ \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}}{K r_1} a c^2 \cdot e^{-\frac{act}{r_1}} \int_0^t e^{-\frac{act}{r_1}} F(t)\, dt;$$

$$V_a = \frac{1}{R} \left\{ c F(t) + N e^{-\beta t} + \frac{ac(r_1 - c)}{r_1^2} e^{-\frac{act}{r_1}} \int_0^t e^{\frac{act}{r_1}} F(t)\, dt \right\},$$

wo $a = \frac{4\pi k}{K}$, c der obige Wert ist. Hae.

A. Petrowsky. **Ueber die Potentialverteilung in einem heterogenen Medium.** Journ. russ. phys. Chem. Ges. **32**, 21-36. (Russisch.)

Die Arbeit bezieht sich auf die Theorie von Condensatoren, deren Dielektricum aus einer Reihe von Schichten mit verschiedenen Dielektricitätsconstanten besteht; es werden Capacitäten solcher Condensatoren einfachster Form berechnet. Ghr.

F. Kohlrausch. **Ueber das elektrische Leitvermögen von Lösungen der Alkali-Jodate und eine Formel zur Berechnung von Leitvermögen.** Berl. Ber. 1900, 1002-1008.

Die Formel lautet

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda^p} = c \cdot m^{\frac{1}{3}},$$

wo (andeutungsweise) m die Concentration, Λ das Aequivalentleitvermögen, Λ_0 dasselbe in unendlicher Verdünnung, c und p Constanten der Beobachtung sind. Gt.

H. J. S. Sand. **Sur la concentration aux électrodes dans une solution, avec rapport spécial à la libération d'hydrogène par l'électrolyse d'un mélange de sulfate de cuivre et d'acide sulfurique.** C. R. **131**, 992-995.

Die partielle Differentialgleichung für die Concentration wird integrirt. Gt.

E. RIECKE. Ueber das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektricität. Ann. der Phys. (4) **2**, 835-842.

Verf. zeigt, dass die von Drude (Ann. der Phys. **1**, 566) für das Verhältnis der Leitfähigkeiten für Wärme und Elektricität aufgestellte Gleichung als Vereinfachung der von ihm selbst (Wiedemann Ann. **66**, 353, 1898) mitgeteilten angesehen werden kann; man hat hierzu die Annahme zu machen, dass die lebendigen Kräfte der Ionen oder Elektronen bei ihrer molecularen Bewegung gleich der absoluten Temperatur, multiplicirt mit einer universellen Constante, seien, die durch das Gasgesetz bestimmt wird; er weist zugleich auf die Abweichungen hin.

Gt.

J. S. TOWNSEND. The conductivity produced in gases by the motion of negatively loaded ions. Nature **62**, 340-341.

Da nach den neueren Versuchen Gase dadurch zu Leitern der Elektricität gemacht werden, dass sich negativ geladene Ionen mit hoher Geschwindigkeit hindurch bewegen, so stellt der Verf. hierüber theoretische Betrachtungen an und gelangt zu einer Formel, die er experimentell bewahrheitet.

Lp.

P. DRUDE. Zur Elektronentheorie der Metalle. Ann. der Phys. (4) **1**, 566-613; **3**, 369-402.

Die Elektricitätsleitung der Metalle ist von derjenigen der Elektrolyte wenig verschieden. Ob ein elektrisches Teilchen (Elektron) eine sehr kleine ponderable Masse mit sich führt, bleibt unentschieden; denn auch ohne diese kann man demselben eine gewisse kinetische Energie seiner Bewegung zuschreiben, sowie eine Trägheit für Bewegungsänderungen, weil jedes Elektron einen elektrischen Strom repräsentirt. Weiter wird angenommen, dass die Elektronen teils frei, teils solche sind, welche gewisse Gleichgewichtslagen im Körper haben, also an seine materiellen Atome oder Molecüle gebunden sind. Von diesen Elektronen werden beliebig viele Gattungen mit verschiedenen Ladungen angenommen, welche jedoch ganzzahlige Multipla des Elementarquantums e sein sollen. Ferner wird für diese frei beweglichen Kerne die Vorstellung der kinetischen Gastheorie acceptirt und nach einem Theorem von Boltzmann $\frac{1}{2} mu^2 = \alpha T$ gesetzt, wo T die absolute Temperatur, m die scheinbare Masse, u die Geschwindigkeit des Kernes und α eine universelle Constante ist, welche, mit Hülfe der Loschmidt'schen Angaben berechnet, im absoluten C. G. S.-Mass $5,6.10^{-17}$ beträgt. Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, werden die Vorgänge der Stromleitung, der Wärmeleitung, des Thomson-Effects, der Berührungs- und Thermoelektricität einer eingehenden mathematischen Betrachtung unterzogen.

Der zweite Teil behandelt vom gleichen Gesichtspunkte aus die galvano- und thermomagnetischen Effecte. Eine rechtwinklige Metallplatte befinde sich in einem homogenen Magnetfelde senkrecht zu den

Kraftlinien; diesen parallel liege die z-Axe, die x- und die y-Axe liegen parallel zu den Seiten der Metallplatte. Wenn ein elektrischer Strom parallel zur x-Axe in die Metallplatte eingeleitet und von den Querseiten derselben kein Strom abgenommen wird, so laden die positiven Elektronen den unteren Rand der Platte zu positivem Potential bis zu der Stärke, dass dessen Einfluss die ablenkende Kraft des Magnetfeldes gerade compensirt. Durch dieses positive Potential des unteren Plattenrandes entsteht im Innern der Metallplatte eine positive elektrische Transversalkraft. Durch das anfängliche Abdrängen der positiven Kerne des in die Metallplatte parallel zur Axe eingeleiteten Stromes nach unten wird ein Concentrationsgefälle der Kerne in der Querrichtung veranlasst, wodurch ein Diffusionsstrom entsteht. Da ferner die Kernzahl im Metall eine Function der Temperatur ist, so bedingt das Concentrationsgefälle der Kerne nach irgend einer Richtung ein Temperaturgefälle. Aus diesen Grundlagen werden die Ausgangsgleichungen gewonnen. Dieselben werden zunächst specialisirt für den Fall eines elektrischen Stromes in der Platte, ohne dass in gleicher Richtung ein Temperaturgefälle besteht, d. h. für den galvanometrischen Transversaleffect. Die erhaltene Gleichung für den Hall-Effect stimmt mit der experimentell gefundenen Formel überein, und der transversale Temperatureffect hat bei allen Metallen, wie es die von Ettinghausen gefundene Regel fordert, dasselbe Zeichen. Den thermomagnetischen Transversaleffect erhalten wir, wenn ein Temperaturgefälle nach der x-Axe in der Metallplatte aufrecht erhalten wird, ohne dass man einen elektrischen Strom hindurchsendet. Dieser Effect kann nach der erhaltenen Gleichung sowohl positiv wie negativ sein. Der Longitudinaleffect ist proportional dem Quadrate der Feldstärke. Eine numerische Verwertung der Beobachtungen und weitere Prüfung der Theorie an der Hand derjenigen von Moreau bilden den Schluss der Abhandlung. Rn.

P. Drude. Théorie de la dispersion dans les métaux fondée sur la considération des électrons. Rapports Congr. intern. Phys. **3**, 34-46.

Der Verf. dieses Berichtes giebt in ihm die Richtung an, nach welcher, wie er meint, eine fruchtbare Theorie der Metalle entwickelt werden kann, und nach welcher er sie zu entwickeln strebt. Lp.

M. Reinganum. Theoretische Bestimmung des Verhältnisses von Wärme und Elektricitätsleitung der Metalle aus der Drude'schen Elektronentheorie. Ann. der Phys. (4) **2**, 398-403.

Bedeuten k und σ die Leitfähigkeiten des Metalles für Wärme und Elektricität, so leitet der Verf. aus den in der Drude'schen Abhandlung gegebenen Daten für k/σ den Wert ab $0{,}7099.10^{-10}$, woraus sich eine überraschende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ergiebt.

Eine weitere Prüfung der Drude'schen Theorie führt zu dem Resultat: die Anschauung ist als bewiesen zu betrachten, dass auch in den Metallen die Elektricität in discreten Mengen von der Grösse elektrolytischer Ionenladungen sich bewegt, und dass für die mit den Ladungen bewegten Massen die Principien der Gastheorie anzuwenden sind. Rn.

O. Dörge. Eine Studie über Seifenblasen. Ann. der Phys. (4) **1**, 1-16.

Ein dem Carnot'schen Kreisprocess ähnlicher Process lässt sich auf elektrischem Gebiete herstellen. An Stelle der Wärme höherer und niederer Temperatur tritt hier elektrische Energie höherer und niederer Spannung. Der durchlaufene Weg besteht aus Curven, die mit den Isothermen und Adiabaten in ihrem Wesen eine grosse Aehnlichkeit besitzen. Eine Seifenblase, welcher eine gewisse elektrische Ladung mitgeteilt wird, unterwirft Verf. einem näher beschriebenen Kreisprocess, und es ergiebt sich unter anderen Resultaten ein bestimmter Ausdruck für die hierbei gewonnene Arbeit und für die Energiemenge, welche den Quellen entzogen waren. Rn.

G. Jaumann. Zur Theorie der Lösungen. Wien. Ber. **109**, 512-553; Ann. der Phys. (4) **3**, 578-617.

Das Ziel dieser Abhandlung ist: die Theorie der Lösungen von der Arrhenius'schen Ionenhypothese unabhängig zu machen und sie an die Faraday-Maxwell'sche Theorie anzuschliessen. Rn.

S. R. Milner. Note on the theory of solution pressure. Phil. Mag. (5) **49**, 417-423.

Für die Potentialdifferenz zwischen einer Metallelektrode und einem Elektrolyten, der das Metall als Ion bildet, hat Nernst die Formel aufgestellt: $\Phi = (RT/n\varepsilon) \lg (p_1/P)$, worin $n\varepsilon$ die bei Niederschlagung eines Gramm-Ions verbrauchte Arbeit, p_1 den osmotischen Druck und P eine Constante bezeichnen. Diese Formel wird neu abgeleitet durch Betrachtung eines idealen Kreisprocesses, der von dem Zersetzungsvorgang in zwei elektrolytischen Zellen ausgeht, die beide denselben Elektrolyten, aber in verschiedener Concentration enthalten, in deren jede eine Elektrode des Metalls eintaucht, und die durch eine nicht für das Metall, aber für das andere Ion permeable Membran getrennt sind. Br.

M. Couette. Sur la théorie osmotique des piles. Journ. de Phys. (3) **9**, 200-208, 269-279.

Nach einer kurzen Einleitung über die osmotische Theorie der elektromotorischen Kräfte, wie diese durch Nernst aufgestellt ist, entwickelt

der Verf. im zweiten Abschnitt die thermodynamische Theorie der galvanischen Kette, im dritten die Nernst'sche Theorie und vergleicht im vierten Teile die Ergebnisse mit den französischen experimentellen Arbeiten, besonders von Pellat. Zuletzt zieht er den Schluss: „Die Nernst'sche Theorie führt zu Ergebnissen, die mit denen des Experimentes übereinstimmen, nur in den Fällen, in welchen seine Folgerungen mit denen der thermodynamischen Theorie zusammenkommen, die je nach Bedürfnis durch das experimentelle Gesetz von Pellat zu particularisiren sind.“ Lp.

H. Pellat et F. Beaulard. **De l'énergie absorbée par les condensateurs soumis à une différence de potentiel sinusoïdale.** C. R. **130,** 1457-1460.

Aus früheren Arbeiten der Verf. folgt, wenn dm die Variation der Ladung der wirksamen Condensatorflächen während der Zeit dt und $dw = Vdm$ die während dieser Zeit dem Condensator gelieferte Energie ist:

$$dm = \frac{KS}{4\pi c} dV + Sdj, \quad dw = \frac{KS}{4\pi c} VdV + SVdj.$$

Wenn die Potentialdifferenz V periodisch ist, so ist die während einer Periode T absorbirte Energie

$$w = S\int_0^T Vdj = -Sc\int_0^T j\,d\varphi,$$

wo φ die Intensität des elektrischen Feldes ist. Für die Energie w_1, welche durch die Volumeneinheit des Dielektricums absorbirt wird, findet sich

$$w_1 = \frac{w}{Sc} = -\int_0^T j\,d\varphi.$$

Ist die Potentialdifferenz

$$V = V_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und die Intensität der wirklichen Polarisation

$$j = B \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right),$$

so folgt aus

$$d\varphi = \frac{1}{c} dV = \frac{V_0}{c}\frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}:$$

$$w_1 = -\frac{V_0 B\pi \sin\delta}{c},$$

oder indem man für B und $\sin\delta$ die in einer früheren Arbeit berechneten Werte

$$B = \frac{V_0 b h T}{c\sqrt{4\pi^2 + b^2 T^2}}, \qquad \sin\delta = \frac{-2\pi}{\sqrt{4\pi^2 + b^2 T^2}}$$

einsetzt:

$$w_1 = \frac{2\pi^2 b h V_0^2 n}{c^2(4\pi^2 n^2 + b^2)},$$

wo $n = 1/T$ die Frequenz bezeichnet.

Diese Formel stellt die absorbirte Energie dar. Sie gilt unter der Voraussetzung, dass das Feld schwach genug bleibt, um h als Constante zu betrachten. Rn.

H. Pellat. Des diélectriques et de leur polarisation réelle. Journ. de Phys. (3) **9**, 313-325.

„Ein Dielektricum, das plötzlich in ein constantes elektrisches Feld gebracht wird, nimmt eine Polarisation an, die nicht augenblicklich eintritt, sondern die mit der Zeit wächst und asymptotisch ein Maximum erreicht. Wenn das Feld zu wirken aufhört, so nimmt die Polarisation ab und wird nach Ablauf einer theoretisch unendlichen Zeit wieder Null." Der Verf. zeigt, dass diese so gefasste Idee nicht eine Hypothese, sondern ein Gesetz ist (das Gesetz der wirklichen Polarisation), das sich experimentell direct ergiebt. Aus demselben leitet er die wichtigsten Folgerungen unter dem qualitativen und quantitativen Gesichtspunkte ab. Lp.

P. Sacerdote. Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes. Ann. de Chim. et Phys. (7) **20**, 289-377.

Ueber den Auszug aus dieser Abhandlung, der im Journal de Physique erschienen ist, wurde in F. d. M. **30**, 773, 1899, referirt. Wir begnügen uns mit der Angabe der vom Verf. in der Einleitung bezeichneten Aufgaben, die er behandelt hat: 1. Auf sichere Weise die Formeln für die elektrischen Deformationen der Dielektrica der Condensatoren aufzustellen unter alleiniger Zugrundelegung der fundamentalen Principe der Erhaltung der Energie und der Elektricität; aus ihnen die Gesetze und die Ursachen dieser Erscheinungen herzuleiten. 2. Nach Vorführung der früher gemachten Versuche zu einer Theorie die Irrtümer anzugeben, denen die Abweichungen, die ihre Resultate sowohl unter einander als von denen der gegenwärtigen Theorie zeigen, zuzuschreiben sind. 3. Die Kritik der experimentellen Arbeiten hat zu zeigen, warum dieselben nicht immer die von der Theorie vorgesehenen Resultate ergeben. Lp.

P. Duhem. Sur la déformation des diélectriques polarisés. Journ. de Phys. (3) **9**, 28-29.

Berichtigungen einiger Versehen in früheren Arbeiten des Verf. Lp.

Gouy. Sur les propriétés électrocapillaires des mélanges et la viscosité électrocapillaire. C. R. **131**, 835-837.

Die von dem Verf. als elektrocapillare Viscosität bezeichnete Erscheinung wird hervorgerufen durch das Vorhandensein von geringen Mengen activer Körper in einer wässrigen Lösung. Es wird dadurch eine Herabminderung der Oberflächenspannung bewirkt, welche erst nach einiger Zeit einen constanten Wert annimmt und bei starker negativer Polarisation unmerklich ist. Rn.

Gouy. Sur la théorie des phénomènes électrocapillaires. C. R. **131**, 939-942.

Allgemeine Ueberlegungen über die Gruppirung von Ionen einer elektrolytischen Lösung in einer elektrischen Capillarzelle, wenn man ausser den elektrischen Kräften noch rein mechanische zwischen Elektrode und gelöstem Elektrolyten annimmt. Mathematische Entwickelungen kommen nicht vor. Br.

W. J. Smith. On the nature of electrocapillary phenomena. I: Their relation to the potential differences between solutions. Phil. Trans. (A) **193**, 47-87.

Die Arbeit ist eine zusammenfassende kritische Darstellung der zur Erklärung der capillarelektrischen Erscheinungen aufgestellten Theorien, insbesondere der Lippmann-Helmholtz'schen, und derjenigen Versuchsanordnungen, die zu ihrer Prüfung dienen können. Insbesondere werden zwei in der Lippmann-Helmholtz'schen Theorie enthaltene Grundhypothesen discutirt. Nach der ersten soll die Potentialdifferenz an der Capillarelektrode sich ebenso ändern wie die am Elektrometer, nach der zweiten soll die Oberflächenspannung nur von der Potentialdifferenz und der Capacität abhängig sein. Die Versuche sprechen für die erste und gegen die zweite Annahme. Br.

G. di Ciommo. Sulla polarizzazione elettrolitica di speciali elettrodi. Nuovo Cimento (4) **12**, 258-279.

Beim Stromdurchgang durch Elektroden, die aus dem Metall des Elektrolyten bestehen, entsteht, wie Rault 1864 nachgewiesen hat, ebenfalls Polarisation. Hier gelten dieselben Gesetze wie für unangreifbare Elektroden, nämlich die elektromotorische Kraft der Polarisation ist eine Function der polarisirenden Elektricitätsmenge; sie ist gleich der Summe der Einzelpolarisationen an den beiden Elektroden, und diese sind unter

sich gleich, wenn die Elektroden gleiche Oberfläche besitzen. Ferner ist für dieselbe polarisirende Elektricitätsmenge und für dieselbe Temperatur die elektromotorische Kraft der Polarisation umgekehrt proportional der Oberfläche der Elektroden. Hae.

M. Cantone e F. Sozzani. Nuove ricerche intorno alla deformazione dei condensatori. Lomb. Ist. Rend. (2) **33,** 1059-1088; Nuovo Cimento (4) **12,** 155-164.

Sacerdote hat 1899 auf Grund der Lorberg'schen Elasticitätstheorie Formeln für die durch elektrische Kräfte hervorgebrachten Deformationen, gemessen an cylindrischen Glascondensatoren, aufgestellt. Die Untersuchungen der Verf. ergeben, in Uebereinstimmung mit der Theorie, eine Proportionalität der Deformation mit dem Quadrat des Potentials. Auf alle Fälle übt eine Beanspruchung, die senkrecht zu den Kraftlinien wirkt, einen grösseren Einfluss auf die Dielektricitätsconstante des Glases aus als eine solche parallel zu denselben. Hae.

O. M. Corbino. Sulle conseguenze del principio della conservazione dell'elettricità. Nuovo Cimento (4) **11,** 136-140.

Eine von Lippmann 1881 gemachte Anwendung des Princips der Erhaltung der Elektricität auf die Verlängerung cylindrischer Condensatoren ist mit einem Fehler behaftet. Dagegen ist die von Sacerdote aufgestellte Formel richtig, wenn auch das Gesetz, dass die Verlängerung dem Quadrat des Potentials proportional ist, nur unter einschränkenden Bedingungen gilt. Hae.

W. Kaufmann. Elektrodynamische Eigentümlichkeiten leitender Gase. Ann. der Phys. (4) **2,** 158-178.

Ein geschlossener Stromkreis, bestehend aus einer Elektricitätsquelle E_0, einem Widerstande W und einer leitenden Gasstrecke, habe die Selbstinduction L. Dann lässt sich die Beziehung zwischen der stationären Stromstärke J und der Spannung E an den Enden der Gasstrecke ausdrücken durch eine empirische Curve $E = f(J)$. Als Bedingung für den stabilen Gleichgewichtszustand folgt

$$W + \frac{\partial E}{\partial J} > 0;$$

ist dieser Wert < 0, so herrscht labiles Gleichgewicht. Diese Resultate werden an Beispielen erläutert, welchen eine graphische Darstellung der Vorgänge bei der Gasentladung beigegeben ist. Rn.

J. Stark. Methode der Querströme und die Leitfähigkeit in durchströmten Gasen. Ann. der Phys. (4) **3**, 492-512.

Um für den Fall, dass die Leitfähigkeit räumlich variabel ist, Leitfähigkeiten an verschiedenen Stellen eines durchströmten flüssigen oder flächenhaften, festen Leiters zu vergleichen, bedient man sich der Methode der Querströme. Der Verf. erörtert Zweck und Wesen derselben, betrachtet die Querströme in durchströmten Gasen, die Leitfähigkeit der letzteren und kommt zu folgenden Resultaten.

1. Die Stärke eines Querstromes ist unabhängig von dem Gefälle des Längsstromes; aus ihr lässt sich die Leitfähigkeit an dem Ort der Querelektroden angenähert bestimmen. 2. Die Leitfähigkeit in durchströmten Gasen ist im allgemeinen räumlich variabel. 3. Die räumliche Variation der Leitfähigkeit erfolgt zum Teil nicht nach Massgabe der räumlichen Variation des Gefälles. 4. Gemäss der ionisirenden Wirkung der elektrisch wandernden Teilchen nimmt in einem Gas die Leitfähigkeit mit der Stromdichte zu. 5. Bei räumlicher Variation der Stärke des positiven und des negativen Stromes veranlasst die elektrische Strömung eine Aenderung der Concentration der Ionen und damit der Leitfähigkeit.

Rn.

H. Benndorf. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität VI. Ueber die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen. Wien. Ber. **109**, 923-940.

Bei luftelektrischen Messungen an der Erdoberfläche hat man häufig zu entscheiden, in welchem Verhältnis das Potentialgefälle in der Ebene zu dem auf einem Plateau steht; oder welches Verhältnis von Höhe zum Durchmesser das Plateau haben muss, um annehmen zu können, dass das Gefälle in der Mitte des Plateaus sich nicht um mehr als einen bestimmten Procentsatz von dem in der Ebene unterscheidet. Der Verf. legt seinen Untersuchungen die Methode zu Grunde, welche Maxwell bei der Theorie des Probescheibchens benutzt hat.

Er beantwortet die oben angeführten Fragen 1. für das einseitig unendlich ausgedehnte Plateau, 2. für einen unendlich langen gerade gestreckten Höhenzug, 3. für ein kreisförmiges Plateau, 4. für ein gerades langes Thal in einer Hochebene. Rn.

E. Warburg. Ueber die Bildung des Ozons bei der Spitzenentladung in Sauerstoff. Berl. Ber. 1900, 712-721.

„Bei dem maximalen Ozongehalt, welchen die elektrische Spitzenentladung in einem abgeschlossenen Sauerstoffvolumen hervorbringt, halten sich die ozonbildende und ozonzerstörende Wirkung des Stromes das Gleichgewicht. Beide Wirkungen lassen sich aus der Geschwindigkeit der Ozonisirung und dem maximalen Ozongehalt gesondert bestimmen. Mit wachsender Temperatur nimmt der maximale Ozongehalt ab, weil die

ozonzerstörende Wirkung der Entladung wächst, während die ozonbildende Wirkung sich nur wenig ändert. Das Maximum des Ozongehalts ist bei der negativen Spitzenentladung grösser als bei der positiven, weil die ozonbildende Wirkung der negativen Entladung grösser ist als die der positiven, während die ozonzerstörende Wirkung beider Entladungsarten ungefähr die gleiche ist. Rn.

E. Marx. Ueber den Potentialfall und die Dissociation in Flammengasen. Gött. Nachr. 1900, 34-67; Ann. der Phys. (4) **2**, 768-797.

Enthält u. a. eine Theorie des Potentialverlaufs in Flammengasen in seiner Abhängigkeit von der Temperatur der Anode; es werden scheinbare und wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze unterschieden. Gt.

W. Kaufmann. Versuch einer Erklärung des dunklen Kathodenraumes. Verh. Deutsche Phys. Ges. **2**, 137-141.

Das negative Glimmlicht und damit auch der dunkle Kathodenraum werden in Zusammenhang gebracht mit der Thatsache, dass die Kathodenstrahlen ein von ihnen durchsetztes Gas leitend machen. Es wird angenommen, dass die Ionen, in welche die Gasmolecüle gespalten werden, sich nach Aufhören der Entladung von selbst wieder vereinigen. Es gelte für die Geschwindigkeit der Wiedervereinigung das chemische Massenwirkungsgesetz $R = a\, n_1\, n_2$, wenn a eine Constante proportional der relativen Geschwindigkeit der Ionen, n_1, n_2 die Concentration der positiven, bez. negativen Ionen bedeuten. Die Frage nach der räumlichen Verteilung des Glimmlichts fällt dann zusammen mit der Frage nach dem Werte der Grösse R. Dieselbe wird berechnet und eingehend discutirt. Rn.

H. Starke. Ueber die Reflexion der Kathodenstrahlen. Ann. der Phys. (4) **3**, 75-100.

Da es bei der directen Methode nicht möglich ist, den Reflexionscoefficienten eines Metalles so zu bestimmen, dass sich die durch das Gas bewirkte Zerstreuung eliminiren lässt, so wurde die hier gegebene Anordnung dahin abgeändert, dass der Reflector senkrecht zu seiner Fläche in zu messender Weise verschiebbar war, wodurch erreicht wurde, dass die Diffusion gleichzeitig mit der Reflexion am festen Körper zahlenmässig bestimmbar ist. Bezeichnet Q_0 die durch das Diaphragma pro Secunde von Kathodenstrahlen transportirte Elektricitätsmenge, a den Abstand des Reflectors vom Diaphragma, b den Zerstreuungscoefficienten und r das Reflexionsvermögen des Metalles, so ist der zu messende Cylinderstrom

$$C = Q_0 r (1 - b a) + Q_0 b a.$$

Misst man diese Grösse für zwei Entfernungen a_1 und a_2, so erhält man

$$r = \frac{\frac{C_1}{Q_0} a_2 - \frac{C_2}{Q_0} a_1}{a_2 - a_1}, \qquad b = \frac{\frac{C_2}{Q_0} - \frac{C_1}{Q_0}}{(a_2 - a_1)(1 - r)}.$$

Bezeichnen W_c und W_R die Rheostatenwiderstände, so ist $C/Q_0 = W_R/(W_R + W_c)$. Dieser Quotient bedarf jedoch noch einiger Correctionen. Für den Verlust reflectirter Strahlen durch das Eintrittsdiaphragma muss man den gemessenen Quotienten W_R/W_c multipliciren mit $\sqrt{a^2 + \varrho^2}/a$, wo ϱ der Radius des Diaphragmas vom inneren Cylinder ist. Berücksichtigt man zweimalige Reflexion, so ist der Multiplicationsfactor

$$k = \frac{1}{1 - r'\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + P^2}}\right)}.$$

Berücksichtigt man schliesslich noch den Umstand, dass ein Teil der zerstreuten Strahlen an den Reflector gelangt, so hat man mit den für zwei Entfernungen gewonnenen Quotienten C_1/Q_0 und C_2/Q_0 die Grösse r zu berechnen aus

$$r = \frac{C_1}{Q_0} - \frac{C_2 - C_1}{Q_0} n,$$

wo

$$n = \frac{a_1 - P + \sqrt{P^2 + a_2^2}}{a_2 - a_1 + \sqrt{P^2 + a_2^2} - \sqrt{P^2 + a_1^2}}.$$

Den Schluss der Arbeit bilden die Beschreibung und die Discussion der Versuche. Rn.

A. Batschinsky. **Zur dynamischen Theorie der Elektricität.** Ges. der Freunde der Naturw., Anthropol. und Ethnogr. Moskau. **10,** 15 S. (Russisch.)

Den Maxwell'schen Ausdruck für die kinetische Energie eines Systems von Strömen vergleicht der Verf. mit dem gewöhnlichen Ausdruck für die kinetische Energie eines Systems von Massen (ponderabel oder nicht). Solches Vergleichen führt zu den Differentialgleichungen, welchen man mit den einfachsten Werten der unbekannten Functionen zu genügen sucht. Sind $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ die Parameter des Stromsystems, $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die cartesischen Coordinaten einer imponderablen Masse m, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gewisse sehr kleine Zahlen, so leitet der Verf. ab z. B. $\xi = f(y_1, y_2, \ldots, \varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots)$. Im weiteren werden die Bedingungen untersucht, die erfüllt sein müssen, damit die von Maxwell gesuchte „pondero-elektrokinetische Energie“ der Beobachtung am leichtesten zugänglich sei. Ghr.

C. Raveau. Sur la loi élémentaire de l'électrodynamique. Journ. de Phys. (3) **9**, 150-153.

Die Ableitung des elektrodynamischen Elementargesetzes aus der Beobachtung der Erscheinungen an geschlossenen Stromkreisen ist nicht zwingend, wie der Verf. durch Erörterung der Schlussweise von Biot, Savart, Savary und Ampère zeigt. „So lange es sich nur darum handelt, die resultirende Einwirkung eines geschlossenen Stromkreises auf einen Pol zu bestimmen, bleibt das Elementargesetz in einem gewissen Masse willkürlich, und je nach der Form, die man annimmt, kann man immer einen Teil des Stromes, welchen man gerade will, als denjenigen betrachten, der das einflussreichste Glied liefert.“ Lp.

P. Duhem. Les théories électriques de J. Clerk Maxwell. Étude historique et critique. Introduction. Brux. S. sc. **24**B, 239-270.

Diese wichtige Abhandlung wird nach ihrem vollständigen Erscheinen genauer besprochen werden. Mn. (Lp).

A. Sandowsky. Ueber die Grenzbedingungen bei den ponderomotorischen Wirkungen der elektromagnetischen und der Lichtwellen auf Krystalle. Acta et Com. Imp. Univ. Jurivensis, olim Dorpatensis No. 2, 1900. Auch Sep. p. 1-8; Juriew. (Russisch.)

Die Abhandlung erschien als ein Zusatz zu der grossen Arbeit des Verf. über die ponderomotorischen Wirkungen der Wellen auf Krystalle, worüber in F. d. M. **30**, 794, 1899, referirt worden ist. Jetzt sucht der Verf. zu beweisen, dass die Einführung der Grenzbedingungen seine früheren Resultate im wesentlichen nicht ändere. Ghr.

V. Crémieu. Recherches sur l'effet inverse du champ magnétique que devrait produire le mouvement d'un corps électrisé. C. R. **131**, 578-581.

Die Arbeit ist vorwiegend experimenteller Natur; sie nimmt unter anderem Bezug auf Arbeiten desselben Autors (C. R. **130**, 1900) und von G. Lippmann (C. R. **89**, 1889). Gt.

Dörge. Die magnetische Energie eines Systems elektrischer Ströme. Zeitschr. f. Math. **45**, 339-340.

Die magnetische Energie eines Stromes ist entstanden, während der Strom, der im Moment t die Stärke j hatte, zum Endwert i anstieg. Bringt man unter Benutzung der Spannungsgleichung und Berücksichtigung der Selbstinduction L von der Arbeit, welche die elektromotorische Kraft leistet, die Joule'sche Wärme in Abzug, so ist:

$$L\int_0^\infty \frac{dj}{dt} j dt = \tfrac{1}{2} L i^2$$

die Energie des entstandenen magnetischen Feldes. Dies wird auf ein System beliebig vieler Leiter ausgedehnt. Gt.

H. DU BOIS und A. P. WILLS. Ueber magnetische Schirmwirkung. Fünfter Teil. Ann. der Phys. (4) **2**, 78-83.

Frühere Untersuchungen von du Bois (Ann. der Phys. (3) **63** und **65**) werden auf dreischalige Cylinder- und Kugelpanzer ausgedehnt; in Bezug auf die mathematischen Entwickelungen wird auf eine Abhandlung von Wills, Phys. Rev. **9**, 193, 1899, verwiesen. Gt.

R. LANG. Ueber die magnetische Kraft der Atome. Ann. der Phys. (4) **2**, 483-494.

Richarz hat die Zulässigkeit der Erklärung des Molecularmagnetismus durch Rotationen der Valenzladungen nachgewiesen. Der Verf. beabsichtigt zu zeigen, 1. dass dieser Nachweis auch geführt werden kann unter Benutzung von Grössen, die ihrer Ordnung nach wesentlich von den Richarz'schen abweichen; 2. dass dadurch möglicherweise ein Zusammenhang zwischen dem minimalen Atomvolumen und dem Magnetismus aufgedeckt wird; 3. dass in Bezug auf den Atommagnetismus die ungesättigten Valenzen eine wichtige Rolle zu spielen scheinen; 4. dass die neue Hypothese eine Anzahl bisher wenig verstandener Erscheinungen einheitlich zu erklären gestattet, wie z. B., dass Sauerstoff paramagnetisch ist, und andere. Rn.

LIZZIE R. LAIRD. Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben. Ann. der Phys. (4) **1**, 207-213.

Nach der von Martens (Berl. Dissert. 1896) angegebenen Methode wird das Anwachsen des magnetischen Momentes mit der Zeit zu verfolgen gesucht. Experimentell wird gezeigt, dass für die benutzte Scheibe

$$\frac{J_0}{J_\infty} = \delta = 0{,}872,$$

wenn J_0 und J_∞ Anfangs- und Endwert der Magnetisirung bedeuten. Aus der Berechnung folgt, wenn $F(t)$ das von der Nachwirkung herrührende Moment, J das Trägheitsmoment des Systems, $F(t)/J = f(t)$ ist,

$$f(\infty) = 39{,}6,$$

$$\frac{J_t}{J_\infty} = \delta + (1-\delta)\frac{f(t)}{f(\infty)}$$

und für die J_t und J_∞ entsprechenden Susceptibilitäten:

$$\frac{k_t}{k_\infty} = \frac{\frac{F_t}{F_\infty}}{\left(1 - \frac{J_t}{J_\infty}\right) \cdot N k_\infty + 1}.$$

Da Versuche für Scheiben von verschiedener Dicke und Natur fehlen, so erscheint eine empirische Formel für F_t und k_t wertlos. Rn.

G. Quincke. Ueber Volumenveränderungen durch magnetische Kräfte. Berl. Ber. 1900, 391-397.

In Uebereinstimmung mit seinen früheren Untersuchungen beweist der Verf. jetzt die im Innern magnetischer Flüssigkeiten durch ein gleichmässig magnetisches Feld hervorgerufenen Druckkräfte, indem er die scheinbaren Volumenänderungen misst, die eine Eisenchloridlösung durch magnetische Kräfte erfährt. Rn.

A. Dina. Sull' isteresi magnetica in un corpo o in un campo rotante I, II. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 382-397, 430-445.

Ziel der Arbeit ist ein Vergleich zwischen der statischen Hysteresis, die auftritt, wenn eine Eisenmasse einer cyklisch veränderlichen magnetisirenden Kraft von constanter Richtung unterworfen wird, und der rotirenden Hysteresis, welche die Rotation einer solchen Masse in einem Magnetfeld von constanter Richtung begleitet. Nach einer ausführlichen Litteraturübersicht entwickelt der Verf. die Theorie seines Verfahrens, das er dann experimentell durchführt, und dessen Resultate auch mit der molecularen Theorie des Magnetismus in gutem Einklang stehen. Hae.

G. Bongiovanni. Determinazioni didattiche di magnetismo terrestre e di suscettività magnetica, per mezzo dell' azione magnetizzante della terra. Nuovo Cimento (4) **11**, 15-32.

Ein weicher Eisenstab werde normal und symmetrisch in ziemlicher Entfernung von einer kurzen Magnetnadel in einer horizontalen Ebene angeordnet und dann durch Drehen um das eine seiner Enden in der horizontalen Ebene aus dieser Lage entfernt, so wird die Ablenkung, die er der Nadel durch den in dem Stabe durch den Erdmagnetismus inducirten Magnetismus erteilt, durch die Formel bestimmt:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \varkappa s (\cos\omega \cos\theta + \mathrm{tg}\,i \sin\theta) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{r + l\cos\theta\sin\omega}{(r^2 + l^2 + 2rl\cos\theta\sin\omega)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Dabei ist $\varkappa$ die magnetische Susceptibilität des Eisenstabes, l seine Länge und s der Inhalt seines Querschnitts; r ist die Entfernung zwischen der

Mitte des Stabes und der der Magnetnadel; i ist die magnetische Inclination; ω ist der Winkel, den die Ebene des magnetischen Meridians mit der den Stab enthaltenden Verticalebene bildet, und endlich θ der Winkel, den der Eisenstab mit dem Horizont macht. Hae.

W. Voigt. Ueber die Influenz ferromagnetischer Krystalle, insbesondere über die P. Weiss'schen Beobachtungen am Magnetit. Gött. Nachr. 1900, 331-344.

Sind a, b, c die Componenten des influenzirten magnetischen Momentes in der Volumeneinheit, A, B, C die Componenten der gesamten magnetischen Feldstärke H, so werden für centrisch-symmetrische Krystalle die a, b, c in Potenzreihen entwickelt, die nach ungeraden Potenzen der Componenten A, B, C fortschreiten. Hiervon wird Anwendung gemacht auf ein Rotationsellipsoid, das im Grenzfall in eine dünne Kreisscheibe übergeht, indem man sich vornimmt, Präparate von dieser Form der Beobachtung zu unterwerfen. Die P. Weiss'schen Untersuchungen mit Magnetitscheiben zeigen im allgemeinen den Charakter der Resultate, welche die Theorie, die der Verf. entwickelt, hier giebt. Hae.

K. R. Johnson. Ueber den Extrastrom beim Unterbrechen eines elektrischen Stromkreises. Ann. der Phys. (4) **2**, 179-185.

K. R. Johnson. Ueber den Oeffnungsstrom in einem verzweigten Stromkreise. Ann. der Phys. (4) **2**, 495-504.

K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten. Ann. der Phys. (4) **3**, 438-460, 744-748.

K. R. Johnson. Constanz oder Inconstanz des Funkenpotentiales. Ann. der Phys. (4) **3**, 461-470.

Verf. spricht in der ersten Abhandlung die Ansicht aus, dass die Darstellung des Oeffnungsstromes von L. Arons (Wiedemann Ann. **63**) der Wirklichkeit nicht genügend entspricht. Er betrachtet einen Stromkreis von dem Widerstande W und dem Selbstpotential L, der aus einer Inductionsrolle, einer Batterie von der elektromotorischen Kraft E_0 und einem Condensator von der Capacität C besteht. Aus den Gesetzen der oscillatorischen Ladung des Condensators leitet er für das Maximum der Potentialdifferenz des Oeffnungsstroms den Ausdruck

$$E_m = \frac{E_0}{W}\sqrt{\frac{L}{C}}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}}$$

ab, in dem α und β Constanten bedeuten, die ebenfalls von W, L und C abhängig sind. Massgebend für das Zustandekommen des Funkens ist vor allem der Factor $\frac{E_0}{W}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Es schliessen sich Betrachtungen über

den Fall an, dass der Condensator fortgelassen ist, sowie über die Höhe der Potentialdifferenz am Ende der Funkenentladung.

In der zweiten Abhandlung wird ausser Batterie und Condensator eine Stromverzweigung vorausgesetzt. Zunächst werden Ausdrücke für die Extraströme aufgestellt, die in den beiden Zweigen beim Schliessen auftreten. Sodann werden die Gleichungen für den Oeffnungsstrom auf Grund der Gleichungen aus der Theorie der oscillatorischen Ladung und Entladung eines Condensators entwickelt. Für die Potentialdifferenz wird eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit constanten Coefficienten integrirt. Es werden sodann der Fall $W_1 : L_1 = W_2 : L_2$ (wobei sich die Indices auf die beiden Zweige beziehen), sowie der Edlund'sche Fall, in dem L_2 nahezu gleich Null ist, behandelt.

Die dritte Abhandlung untersucht die Vorgänge in einem Inductorium. Die bekannten Differentialgleichungen hierfür geben nur dann unmittelbar ein den wirklichen Vorgängen entsprechendes Integral, wenn die Funkenentladung unterdrückt ist. Für den Fall, dass diese stattfindet, und zwar bei einer minimalen Länge der Funkenstrecke des secundären Kreises, wird von dem Verf. unter der Annahme, dass dann die Potentialdifferenz im secundären Stromkreis zunächst durch Null zu ersetzen ist, eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit constanten Coefficienten abgeleitet und integrirt, die zugleich die Stromstärken in beiden Kreisen liefert. Hieran knüpfen sich Untersuchungen über die Primärspannung, über die Funkenentladung in der secundären Funkenstrecke und über elektrolytische Erscheinungen im secundären Kreise.

Die vierte Arbeit ist bestimmt, einige Einwände zu widerlegen, welche gegen G. Jaumann's Arbeit (Wiedemann Ann. **55**, 1895) erhoben worden sind, in der die Inconstanz des Funkenpotentials behauptet wird. Es wird die Funkenentladung in einer Holtz'schen Maschine untersucht; für die Potentiale der Mikrometerkugel und der Leidener Flasche wird auf Grund der Bewegungsgleichungen unter bestimmten Annahmen eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten integrirt; Jaumann's Schlussfolgerung, dass die Capacität der Leidener Flasche das Funkenpotential erhöht, bestätigt sich nicht. Gt.

F. Oliveri. Sulla polarizzazione colle correnti alternate. Nuovo Cimento (4) **12**, 141-155.

Der von Malagoli aufgestellte Satz wird bewiesen: Damit Elektrolyse mit einem Wechselstrom möglich sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Elektricitätsmenge, die während einer Halbperiode des Stromes in das Voltameter tritt, grösser ist als das Doppelte derjenigen Elektricitätsmenge, durch die das Voltameter das Maximum der Polarisation annimmt. Hieraus wird dann der Schluss gezogen, dass für die Maximalintensität J, für die Periode T des Wechselstroms und für die zur Er-

zeugung des Polarisationsmaximums erforderliche Elektricitätsmenge Q die Beziehung gelten muss:

$$\frac{JT}{\pi} > 2\,Q.$$

Der experimentelle Teil der Arbeit beweist für die Phasendifferenz zwischen Stromintensität und elektromotorischer Kraft im Falle der Elektrolyse die Gleichung:

$$t = \frac{T}{2\pi} \arccos \left(\frac{2\pi Q}{JT} + 1\right).$$

Hae.

E. Wiechert. Elektrodynamische Elementargesetze. Arch. Néerl. (2) **5**, 549-573.

„H. A. Lorentz war der erste, der den Unterschied zwischen Aether und Materie in der Maxwell'schen Theorie mit Erfolg verwertete, und er machte dabei von vorne herein auf die Annäherung an die älteren Theorien aufmerksam, welche sich dann einstellt. In der Ueberzeugung, dass hierauf im Interesse unserer Wissenschaft nicht genug Gewicht gelegt werden kann, weiss ich heute, wo es sich um eine Ehrung dieses Physikers handelt, kein passenderes Thema zu wählen als eines, welches für den Zusammenschluss der alten und neuen Theorien einen weiteren Baustein zu bringen sucht. In den Bezeichnungen schliesse ich mich an meinen Beitrag zur Festschrift für die Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals zu Göttingen 1899 an; auf diesen verweise ich auch für nähere Ausführungen“ (vergl. F. d. M. **30**, 769, 1899).

Lp.

G. Bakker. Théorie de l'induction électrique. Arch. Néerl. (2) **5**, 312-321.

In dem ersten Teile des Aufsatzes werden die Ausdrücke für die Componenten der elektromotorischen Inductionskraft eines Stromkreises, der sich in einem elektromagnetischen Felde bewegt, durch ein vollständiges und directes Verfahren hergeleitet, indem der Verf. sowohl die Maxwell'sche Methode als auch die sonst übliche Schlussweise für unvollständig hält. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den ponderomotorischen Kräften und gelangt zu dem Schlusse, dass die ponderomotorische Kraft als die Resultante von vier näher bezeichneten Kräften angesehen werden kann.

Lp.

E. Cohn. Ueber die Gleichungen der Elektrodynamik in bewegten Körpern. Arch. Néerl. (2) **5**, 516-523.

Zunächst werden die Erfahrungsthatsachen aufgezählt, von denen die letzte lautet: „Interferenzerscheinungen werden durch die Bewegung nicht beeinflusst“ (Michelson und Morley).

„Die Lorentz'sche Theorie ergiebt alle angeführten Thatsachen, aber alle nur als Näherungen erster Ordnung; sie widerspricht daher der letzten Forderung. Offenbar genügt man allen Forderungen, wenn man in den Gliedern erster Ordnung mit Lorentz in Uebereinstimmung bleibt, zugleich aber zum Ausdruck bringt, dass die optische Länge eines in beliebiger geschlossener Curve verlaufenden Strahles durch die Bewegung nicht geändert wird. Die gesuchten Gleichungen unterscheiden sich also von den Lorentz'schen derart, dass nicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit, sondern ihr reciproker Wert die nach der Ausbreitungsrichtung genommene Componente der Körpergeschwindigkeit linear enthält." Lp.

W. H. Julius. Bemerkungen über einige Grundsätze der Elektricitätslehre. Arch. Néerl. (2) **5**, 497-505.

„Will man die Entdeckung Faraday's, dass die Grösse der zwischen Leitern mit constanten Ladungen wirkenden Kraft je nach dem Zwischenmittel verschieden ist, gleich Anfangs in die Theorie mit aufnehmen, so müssen einige bekannte Sätze, welche in den meisten Hand- und Lehrbüchern der Lehre der centralen Kräfte in unveränderter Gestalt entnommen sind, eine Modification erleiden. ... Ich will nur zeigen, dass, wenn man schon beim ersten Ansatz den Einfluss des Mediums auf die Kräfte berücksichtigt, gewisse Widersprüche, auf welche die übliche Behandlungsweise geführt hat, verschwinden." Lp.

V. A. Julius. Sur l'action subie par un conducteur chargé dans un champ d'intensité constante. Arch. Néerl. (2) **5**, 17-31.

Mit Hülfe von Betrachtungen, die der Potentialtheorie angehören, und mit Benutzung der Lorentz'schen Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, kommt der Verf. zu dem Ergebnis, dass die in einem Felde von constanter Intensität auf einen geladenen Leiter ausgeübte Wirkung auf eine Kraft zurückkommt, die in der Richtung des Feldes nach einer Geraden wirkt, welche durch den Mittelpunkt der Ladung geht (in Analogie mit dem Massenmittelpunkt). Lp.

P. Duhem. Sur la théorie électrodynamique et la théorie électromagnétique de la lumière. Arch. Néerl. (2) **5**, 227-236.

In einer Vorlesung des Studienjahres 1899-1900 zu Bordeaux hat der Verf. gezeigt, dass die an einer Stelle vervollständigte elektrodynamische Theorie von Helmholtz eine durchaus befriedigende elektromagnetische Lichttheorie giebt. In dem vorliegenden Aufsatze werden die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse kurz zusammengestellt; die Beweise nebst den zugehörigen Rechnungen sollen in einer ausführlicheren Abhandlung erscheinen. Lp.

M. J. Pupin. **Wave propagation over non-uniform conductors.** American M. S. Trans. **1,** 259-286.

Ein der Elektrotechnik des Wechselstroms entnommenes Problem führt auf die Aufgabe: Das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$L\frac{d^2y}{dt^2}+R\frac{dy}{dt}=\frac{1}{C}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

so zu bestimmen, dass es $(k+2)$ Grenzbedingungen genügt. Setzt man

$$\sigma=\frac{h}{\mu}\sin\left(\frac{\mu l}{k+1}\right)-4\sin^2\left(\frac{\mu l}{2(k+1)}\right),\ \zeta=l-s,$$

$$\sigma+2=2\cos 2\psi,$$

so ist

$$X_m=-\frac{D\cdot\sin\left(\frac{\mu l}{k+1}\right)\cdot\cos\left[2(k-m+2)\psi\right]}{2\mu\cdot\sin 2\psi\cdot\sin 2(k+1)\psi},$$

$$Y_m=-\frac{D\left[\cos 2(k-m+2)\psi\cdot\sin\mu\left(\frac{l}{k+1}-\zeta\right)+\cos 2(k-m+1)\psi\cdot\sin\mu\ldots\right.}{2\mu\cdot\sin 2\psi\cdot\sin 2(k+1)\psi}$$

wo $C(-p^2L+ipR)=-\mu^2=-(\alpha+i\beta)^2$, daher

$$\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}pC\{\sqrt{p^2L^2+R^2}+pL\}},$$

$$\beta=\sqrt{\tfrac{1}{2}pC\{\sqrt{p^2L^2+R^2}-pL\}},\qquad \mu=\alpha+i\beta.$$

Hae.

A. G. Rossi. **Studio teorico di una coppia di circuiti induttivi in parallelo su corrente alternativa a potenziale costante.** Nuovo Cimento (4) **11,** 321-350, 393-436.

Verf. giebt die analytische und die graphische Lösung des vorgelegten, sich an den Gramme'schen Ring anschliessenden Problems; einen Auszug in Kürze zu geben ist nicht möglich. Hae.

G. Moreau. **Sur le phénomène de Hall et les courants thermomagnétiques.** C. R. **130,** 122-124.

G. Moreau. **Sur l'interprétation de l'effet thermomagnétique dans la théorie de Voigt.** C. R. **130,** 562-565.

Verf. glaubt zeigen zu können, dass man aus der Formel für die elektromotorische Kraft des Hall-Effects mit Hülfe der für den Thomson-Effect geltenden Beziehung direct die Formel für den thermomagnetischen Effect derjenigen Erscheinungen herleiten kann, die Nernst und Ettings-

hausen 1886 entdeckt haben. Ganz besonders macht er darauf aufmerksam, dass seine Formel sich den Nernst'schen Beobachtungsreihen besser anschmiegt, als die von Voigt gegebene. Hae.

G. Moreau. Sur les phénomènes thermomagnétiques. Journ. de Phys. (3) **9**, 497-506.

Der Verf. zeigt, dass die elektromotorische thermomagnetische Kraft oder der Nernst-Effect ein Hall-Effect besonderer Art ist. Die Beobachtungen von Nernst und Ettingshausen haben es ihm ermöglicht, diese Beziehung approximativ aufzustellen, und seine Versuche über die magnetischen Metalle definitiv. Lp.

E. Marx. Ueber das Hall'sche Phänomen in Flammengasen. Ann. der Phys. (4) **2**, 798-834.

Es wird der Rotationscoefficient nach der von F. G. Donnan (Phil. Mag. (5) **46**, 465, 1898) gegebenen Art und Weise abgeleitet. Hae.

E. van Everdingen. Ueber eine Erklärung der Widerstandszunahme im Magnetfelde und verwandter Erscheinungen in Wismut. Arch. Néerl. (2) **5**, 453-466.

Untersuchungen über die galvanometrischen und thermomagnetischen Erscheinungen im Wismut haben den Verf. veranlasst, eine Hypothese zur Erklärung heranzuziehen, die zuerst in seiner Dissertation (Metingen over het verschijnsel van Hall en de toename van den weerstand in het magnetisch veld. Leiden, 1897) aufgestellt wurde. Nach ihr soll im Magnetfelde die Anzahl frei beweglicher geladener Teilchen kleiner sein als ausserhalb des Feldes. Diese Abnahme wurde der Wirkung der elektromagnetischen Kraft zugeschrieben, der ein bewegtes geladenes Teilchen im Magnetfelde unterworfen ist. Der gegenwärtige Aufsatz soll eine klare Vorstellung vom Mechanismus dieser Erscheinung geben. Wegen der dabei sich einstellenden grossen Schwierigkeiten beschränkt sich der Verf. jedoch auf die Andeutung einer möglichen Lösung. Lp.

E. van Everdingen. Over het verschijnsel van Hall en den weerstand in en buiten het magneetveld bij bismuth kristallen. Amst. Versl. **9**, 448-462.

Hauptsächlich experimentell. Die Ergebnisse der Versuche werden zuletzt durch eine Formel dargestellt und geometrisch veranschaulicht. Lp.

Ch. Eug. Guye. Sur la répartition des courants et des tensions en régime périodique établi le long d'une ligne polyphasée symétrique présentant de la capacité. C. R. **130,** 1382-1383.

Es wird gezeigt, wie das mehrphasige Problem auf ein solches mit einer einphasigen Leitung zurückgeführt werden kann. Hae.

G. Mie. Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. Ann. der Phys. (4) **2,** 201-249.

Sommerfeld hat den Fall discutirt, wo alle Leiter so weit von dem Draht entfernt sind, dass die Rückleitung ganz im Isolator erfolgt. Diese Untersuchungen hat der Verf. dadurch ergänzt, dass er für eine aus zwei parallelen, gleichlangen Drähten bestehende Leitung erstens den Fall genau durchgerechnet hat, wo die Verschiebungsströme im Isolator parallel zur Leitung unmerklich sind, und ebenso zweitens die Zwischenfälle für die experimentell möglichen Anordnungen.

Die Maxwell'schen Gleichungen werden in Bipolarcoordinaten transformirt und die so erhaltenen Gleichungen unter der Voraussetzung integrirt, dass an den Grenzflächen die ihnen parallelen Componenten der elektrischen und magnetischen Feldintensität keinen Sprung erleiden und der Energiestrom im Unendlichen Null ist. Die Rechnung wird hierauf für den oben angegebenen Fall durchgeführt. Als Gleichung für die Wellenlänge und Dämpfung ergiebt sich unter der angegebenen Bezeichnung:

$$c^2 = \frac{ka^2}{\ln \eta}\left(\ln \xi - \frac{x_0}{y_0} + \sum_1^\infty m\, \xi^{2m}\, \varphi_m(0)\right),$$

woraus folgt, dass Ableitung und Capacität bei jeder noch so hohen Schwingungszahl dieselben sind wie bei Gleichstrom.

Ebenso werden Selbstinduction und Widerstand als Functionen der Schwingungszahl berechnet sowohl für sehr schnelle wie für langsame Schwingungen. Für diese folgt: Die schädliche Abschirmung von Wechselstrom im Drahtinnern, welche bei Kraftübertragung mit dicken Kabeln eintritt, kann sich bei Annäherung von Hin- und Rückleitung in ganz beträchtlichem Masse vergrössern. Werden die Drähte weiter von einander entfernt, so wird ein Nebenschluss zur Drahtleitung in Form der parallelen Verschiebungsströme entstehen, wodurch bewirkt wird, dass Capacität und Ableitung etwas vergrössert werden, dass dagegen die äussere Selbstinduction in demselben Verhältnis verkleinert wird. Ausserdem werden untersucht die Stromverteilung im Draht und der „Querstrom", das ist die zur Drahtaxe senkrechte Componente des Wechselstromes, welche die abwechselnd positive und negative Ladung der Oberfläche bewirkt. Rn.

M. Abraham. Elektrische Schwingungen in einem frei endigenden Draht. Ann. der Phys. (4) 2, 32-61.

Der Verf. sieht sich gezwungen, das Problem von vorn herein derart zu idealisiren, dass er dem Draht die Form eines sehr gestreckten Rotationsparaboloids giebt. Das Feld, welches diesen Leiter umgiebt, soll sich periodisch verändern derart, dass die elektrischen Kraftlinien stets senkrecht auf dem Leiter endigen und in Meridianebenen verlaufen, während die magnetischen Kraftlinien in Kreisen den Leiter umschlingen. Die elektrischen und magnetischen Kräfte eines solchen Feldes lassen sich aus einer einzigen Function ableiten, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügt. Indem der Verf. die Lage eines Punktes in der Meridianebene durch zwei Scharen confocaler Parabeln bestimmt, gelangt er zu einer particularen Lösung des Problems für ein Feld, das begrenzt wird durch eine Parabel, die den Meridianschnitt der Drahtoberfläche bildet, für welche also die tangentielle Componente verschwindet, zweitens durch eine auf dem Draht senkrecht endigende Parabel und drittens durch eine beliebige Parabel, durch welche hindurch sich die Wellen nur nach aussen hin fortpflanzen sollen, wodurch dem Feld fortgesetzt Energie entzogen wird. Unter genauer Erörterung über die Erfüllung der Grenzbedingungen wird in erster Annäherung die Verteilung von Strom und Ladung längs des Leiters bestimmt. Aus der Gleichung für den Strom folgt, dass zur Zeit $t = 0$ die Stromphasen am Orte der Maxima und Minima um etwa Viertelschwingungsdauer verschieden sind. Die Berechnung der zweiten Annäherung lässt die Grösse der Verschiebung der Maxima und Minima des Stromes nach dem freien Ende hin bestimmen. Je mehr man sich vom freien Ende entfernt, desto grösser wird die Verschiebung der Maxima und Minima. Der Abstand zweier aufeinander folgenden Knoten oder Bäuche dagegen nähert sich mit wachsender Ordnungszahl seinem normalen Werte. Ebenso nimmt die relative Zunahme des Knotenabstandes vom freien Ende mit wachsender Ordnungszahl beständig ab. Die von de la Rive und Sarasin bei zwei parallelen Drähten beobachteten Knotenverschiebungen sind erheblich grösser als die berechneten, sie können also nicht den hier berücksichtigten Einflüssen zugeschrieben werden. Die Erörterung der Energieströmungen führt zu dem Resultat, dass man nicht sagen kann, es gehe ein bestimmter Bruchteil der Energie der einfallenden Welle bei der Reflexion am freien Ende verloren; vielmehr wird die elektromagnetische Energie von der unmittelbaren Umgebung des Leiters aus fortgesetzt in seitlicher Richtung ausgestrahlt. Rn.

C. H. Wind. Ueber das Feld langsam bewegter Elektronen. Arch. Néerl. (2) 5, 609-635.

„In der vorliegenden Arbeit bildet die Herleitung der elektromagnetischen und der elektrodynamischen Elementargesetze einen Teil einer zusammenfassenden Discussion der Eigenschaften des Feldes eines

oder mehrerer, im allgemeinen bewegter Elektronen. Da ich mich bei dieser Discussion auf einem schon vielfach bearbeiteten Gebiete bewege (ich nenne nur J. J. Thomson, der schon 1881, und O. Heaviside, der 1888 Aehnliches unternommen hat), werden die Resultate, zu denen ich komme, rechnerisch wenig Neues enthalten. Die fundamentale Bedeutung aber, welche das eben genannte Wirkungsfeld durch die neueren Anschauungen gewonnen hat, dürfte zu Gunsten einer etwas detaillirten Behandlung desselben sprechen.“ Lp.

G. A. Lorentz. Théorie des phénomènes magnéto-optiques récemment découverts. Rapports Congr. intern. Phys. 3, 1-33.

Der berühmte holländische Theoretiker setzt hauptsächlich seine eigene Theorie des Zeeman'schen Phänomens und die Voigt'sche Theorie auseinander unter sachlicher Hervorhebung der Leistungen und der Mängel beider Theorien. Die Titel der einzelnen Teile sind: Die elementare Theorie des Zeeman'schen Phänomens. Verwickeltere Aenderungen der spectralen Streifen; allgemeine Sätze. Unendlich kleine Vibrationen eines Systems mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsstufen. Vibrationen sphärischer Systeme. Secundäre Vibrationen. Die Anschauungen von Larmor und Preston. Rotationen im magnetischen Felde. Gegenseitiger Einfluss der Molekeln; Arbeiten von Voigt; Gleichungen der Bewegung für einen in ein magnetisches Feld gebrachten absorbirenden Körper. Fortpflanzung in der Richtung der Kraftlinien. Formeln bezüglich der Fortpflanzung in einer Richtung senkrecht zum Felde. Fall, dass kein magnetisches Feld vorhanden ist. Fortpflanzung in dem Sinne der Kraftlinien eines magnetischen Feldes; Zeeman's Doppellinie. Fortpflanzung in einer Richtung senkrecht zum Felde. Modificationen des polarisirten Lichtes beim Durchgange durch eine in ein magnetisches Feld gebrachte Flamme. Absorption in einem magnetischen Felde; Versuche von Egorow und Georgiewsky. Dissymmetrie des Zeeman'schen Triplets. Erweiterung der Voigt'schen Theorie; Quadrupel von Cornu. Schluss. Lp.

H. Poincaré. La théorie de Lorentz et le principe de réaction. Arch. Néerl. (2) 5, 252-278.

Der Verf. setzt hier von neuem seine Bedenken gegen die Lorentz'sche Theorie auseinander, wonach in derselben das Gesetz von der Gleichheit der Action und der Reaction nicht mehr gilt, wenn man es nämlich auf die Materie allein anwenden will. Ebenso darf das Princip der relativen Bewegung nicht auf die Materie allein angewendet werden. Wie am Schlusse bemerkt wird, ist das Fizeau'sche Experiment über die Fortpflanzung des Lichtes im bewegten Medium schon nicht mehr mit dem Principe von der Reaction vereinbar. Lp.

W. Voigt. Ueber das elektrische Analogon des Zeeman-Effectes. Arch. Néerl. (2) **5**, 366-376.

In dieser Abhandlung wird nachgewiesen, dass die Lorentz'sche elementare Theorie des directen Zeeman-Effectes in einer nahezu selbstverständlichen Ausgestaltung bezüglich des directenelektro-optischen Effectes zu genau denselben Resultaten führt, welche die vom Verf. benutzte Behandlungsweise des inversen Phänomens bei Anwendung des Kirchhoff'schen Satzes liefert. Neben dieser Bestätigung der Fruchtbarkeit der von Lorentz vertretenen Theorie nach einer neuen Richtung hin wird eine Schätzung der Grössenordnung der durch die Theorie signalisirten Veränderungen der Spectral-, resp. Absorptionslinien mitgeteilt.

Lp.

W. Voigt. Ueber eine Dissymmetrie der Zeeman'schen normalen Triplets. Ann. der Phys. (4) **1**, 376-388.

Die Formeln für die normalen Zeeman'schen Triplets, die der Verf. aus den Hertz-Drude'schen Gleichungen der anomalen Dispersion gewonnen hatte, sind recht complicirt, weshalb sich Verf. bei der Discussion bisher auf eine erste Annäherung beschränkt hatte. Indem er jetzt die Annäherung weiter treibt, liest er aus den Formeln ab, dass gewisse neue Absorptionslinien nicht genau symmetrisch zu den ursprünglichen liegen, deshalb auch nicht gleiche Intensität besitzen können. Dieses von der Theorie vorausgesagte Resultat bestätigt Zeeman, nachdem er brieflich gebeten worden war, seine photographischen Negative in dieser Hinsicht einer Untersuchung zu unterziehen (s. S. 794 dieses Bandes).

Hae.

A. Righi. Sul fenomeno di Zeeman nel caso generale d'un raggio luminoso comunque inclinato sulla direzione della forza magnetica. Bologna Mem. (5) **8**, 263-291; Nuovo Cimento (4) **11**, 177-206.

Die theoretischen Untersuchungen führen zu folgendem Resultat: Während bei dem Fehlen eines Magnetfeldes in jeder Richtung natürliches Licht von der Schwingungszahl N und der Intensität J ausgesandt wird, pflanzen sich im Magnetfelde in einer Richtung, die mit den Kraftlinien einen beliebigen Winkel ε einschliesst, drei Strahlen fort; der eine geradlinig-polarisirt mit den Schwingungen in der Meridianebene und mit einer Schwingungszahl N, gleich der ursprünglichen (Componente X_r); die Intensität ist $J_r = \frac{1}{2}J\sin^2\varepsilon$. Die beiden anderen Strahlen sind rechts-, bezw. links-elliptisch-polarisirt; die Schwingungszahlen sind $N+n$, bezw. $N-n$. Die Intensität ist $J_d = J_s = \frac{1}{4}J(1+\cos^2\varepsilon)$; das Axenverhältnis ist bei beiden $=\cos\varepsilon$; die kleine Axe liegt in der Meridianebene.

Für die Schwingungscomponenten erhält man nämlich folgende Ausdrücke, wo $\theta = 2\pi Nt$ und $w = 2\pi nt$ ist:

$$X_r = \sin\varepsilon\,[a\sin\varepsilon\sin(\theta-\alpha)+c\cos\varepsilon\sin(\theta-\gamma)],$$

$$\left\{\begin{aligned} X_d &= \cos\varepsilon\left[\frac{a}{2}\cos\varepsilon\sin(\theta+w-\alpha)-\frac{b}{2}\cos(\theta+w-\beta)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{c}{2}\sin\varepsilon\sin(\theta+w-\gamma)\right],\\ Y_d &= \frac{a}{2}\cos\varepsilon\cos(\theta+w-\alpha)+\frac{b}{2}\sin(\theta+w-\beta)\\ &\qquad -\frac{c}{2}\sin\varepsilon\cos(\theta+w-\gamma);\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} X_s &= \cos\varepsilon\left[\frac{a}{2}\cos\varepsilon\sin(\theta-w-\alpha)+\frac{b}{2}\sin(\theta-w-\beta)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{c}{2}\sin\varepsilon\sin(\theta-w-\gamma)\right],\\ Y_s &= -\frac{a}{2}\cos\varepsilon\cos(\theta-w-\alpha)+\frac{b}{2}\sin(\theta-w-\beta)\\ &\qquad +\frac{c}{2}\sin\varepsilon\cos(\theta-w-\gamma).\end{aligned}\right.$$

Man kann daher das Zeeman'sche Phänomen auch in folgender Weise beschreiben: An Stelle der transversalen Componenten der Schwingung des Teilchens setze man folgende drei äquivalente: 1. eine geradlinige in der Meridianebene, 2. zwei entgegengesetzte elliptische, für welche die kleine Axe der Ellipse in der Meridianebene liegt. Man erhält die Componenten der im Magnetfeld ausgesandten Schwingung, wenn man bei derjenigen elliptischen Schwingung, deren Drehungssinn mit demjenigen des magnetisirenden Stroms übereinstimmt, die Schwingungszahl N durch $N+n$, bei der anderen N durch $N-n$ ersetzt. Hae.

A. Righi. Sur les ondes électromagnétiques d'un ion vibrant. Arch. Néerl. (2) **5**, 348-355.

Die Lösungen der Hertz'schen Gleichungen für die elektrischen Schwingungen hängen von drei Functionen von x, y, z, t ab. Der Verf. giebt diese Functionen, wenn es sich darum handelt, die Kräfte zu finden, welche im Raume zu einem beliebigen Zeitpunkte durch eine mit einer Pendelbewegung von sehr kleiner Amplitude behaftete elektrische Ladung erzeugt werden, und macht einige Anwendungen von seinen Formeln. Lp.

M. Planck. Ueber die von einem elliptisch schwingenden Ion emittirte und absorbirte Energie. Arch. Néerl. (2) **5**, 164-174.

„Die Fähigkeit eines schwingenden Ions, Energie zu emittiren und

auffallende Strahlung zu absorbiren, ist ihrem Wesen nach nicht notwendig an das Vorhandensein benachbarter Ionen, sondern vielmehr an die Schwingungsvorgänge des Ions selbst gebunden. Und wenn man auch aus der Emission und Absorption eines einzelnen Ions noch keineswegs unmittelbar auf die entsprechenden Grössen in einem System von dicht an einander gelagerten Ionen schliessen kann, so dürfte es doch als Vorarbeit für die Behandlung zusammengesetzter Fälle nützlich sein, die quantitative Berechnung der von einem einzelnen schwingenden Ion emittirten und absorbirten Energie auszuführen."

Die im Laufe der Rechnung gewonnene Gleichung stellt die Bewegung eines nahezu elliptisch schwingenden Ions vor, welches seine Energie durch Strahlung emittirt und zugleich aus auffallender Strahlung Energie absorbirt. Sie ist eine Verallgemeinerung einer früher vom Verf. auf anderem Wege für eine geradlinige Schwingung abgeleiteten Gleichung (Berl. Ber. 1896; F. d. M. **27**, 734). Lp.

O. Blumenthal. Die Bewegung der Ionen beim Zeeman'schen Phänomen. Zeitschr. f. Math. **45**, 119-136.

Für ein homogenes Magnetfeld und unter der Annahme, dass die Kraft in der Richtung der x- und y-Axe verschieden ist, bestimmt sich die Bahncurve der Ionen durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma v - \beta w - hx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha w - \gamma u - ky, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \beta u - \alpha v.$$

Hierdurch wird eine doppelelliptische Bewegung von besonderer Art definirt. Wir erhalten die gesuchte Bahncurve, indem wir auf der Ellipse E_2, bei P_2 beginnend, mit der constanten Sectorengeschwindigkeit v_2 einen Punkt wandern lassen, während gleichzeitig der Mittelpunkt der E_2 auf E_1, bei P_1 beginnend, mit der constanten Sectorengeschwindigkeit v_1 gleitet. — Die entstehenden Curven werden in einigen Fällen anschaulich dargestellt. Hae.

W. Kaufmann. Ueber die Schwingungsamplitude der Elektronen. Arch. Néerl. (2) **5**, 148-151.

Als oberer Grenzwert für die Schwingungsamplitude der Elektronen wird berechnet 10^{-8} cm, also kleiner als der Radius der Wirkungssphäre einer Gasmolekel. Lp.

Ed. Riecke. Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspectrums. Ann. der Phys. (4) **1**, 399-413.

Versuch, ein anschauliches Bild für den Mechanismus der Serienschwingungen zu geben, indem von zwei Functionen u_1 und u_2 ausgegangen wird, die von einem Parameter φ und der Zeit t abhängen, und für welche die Ansätze gelten:

$$u_1 = \sum_n A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t;$$

$$u_2 = \sum_n A_n \sin n\varphi \cos 2\pi p t,$$

$$\left(p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}\right)$$

(Kayser-Runge'sche Gleichung). — Es zeigt sich, dass u_1 und u_2 partielle Lösungen derselben Gleichung 10. Ordnung sind:

$$\frac{\partial^{10} u}{\partial\varphi^8 \partial t^2} + 4\pi^2 a^2 \frac{\partial^8 u}{\partial\varphi^8} + 4\pi^2 b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4} + 4\pi^2 c^2 u + 8\pi^2 ab \frac{\partial^6 u}{\partial\varphi^6} - 8\pi^2 ac \frac{\partial^4 \varphi}{\partial\varphi^4} - 8\pi^2 bc \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

(Vgl. S. 794 dieses Bandes.) Hae.

Gilb. T. Walker. Aberration and the electromagnetic field. Cambridge: University Press. XIX + 96 S. 8⁰.

Der Abhandlung wurde 1899 der Adams-Preis von der Universität Cambridge zuerkannt. Sie schliesst sich an die beiden Arbeiten von H. A. Lorentz (Leiden 1892 und 1895) an, stellt aber die Gleichungen im ersten Teile in verallgemeinerter Form auf, da Lorentz nur solche Fälle betrachtet hat, in denen der Aether in stationärer Bewegung, also die Geschwindigkeit der Materie in Beziehung auf den Aether constant ist. Der Verf. unterscheidet zwischen einer molecularen Polarisation der materiellen Media und einer „continuirlichen"; die erstere nimmt er im zweiten Teile, die andere im vierten Teile des Buches an, um die Phänomene der Aberration zu erörtern. Der dritte Teil der Arbeit ist der Berechnung der Kräfte in einem elektromagnetischen Felde gewidmet.

Hae.

P. Drude. Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersionsgleichungen. Ann. der Phys. (4) **1,** 437-440.

W. Voigt und E. Wiechert geben gelegentlich an, dass die von Drude aufgestellten Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie „unter Benutzung eines Hertz'schen Gedankens" zur Erklärung von Dispersion und Absorption passend gemacht worden sind. Indem Drude einen Brief von Hertz publicirt, kann er unbestritten darthun, dass gerade das, worauf es ankommt, sein geistiges Eigentum ist (s. S. 793 dieses Bandes). Hae.

F. J. Micheli. Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magneto-optische Phänomen. Ann. der Phys. (4) **1,** 542-565.

Verf. geht aus von den Drude'schen Differentialgleichungen für

magneto-optische Erscheinungen, die er auf den Fall äquatorialer Magnetisirung anwendet. Hatte Drude nun die Grenzbedingungen für einen solchen angegeben, falls keine Oberflächenschichten vorhanden sind, so modificirt Verf. diese Bedingungen, wenn man eine Oberflächenschicht annehmen muss. Die Rechnung wird auf den Fall beschränkt, dass das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist; betreffs der ausführlichen Herleitung der Resultate wird mehrfach auf die Leipziger Dissertation des Verf. verwiesen (s. S. 795 dieses Bandes). Hae.

W. Voigt. Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen. Ann. der Phys. (4) **1,** 389-398.

Das vom Verf. aufgestellte Gleichungssystem der magneto-optischen Erscheinungen hatte derselbe bisher nur auf die beiden Hauptfälle der Fortpflanzung ebener Wellen, nämlich parallel und normal zu den magnetischen Kraftlinien, angewendet. Da die Resultate sich in Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwiesen haben, behandelt Verf. jetzt den allgemeinen Fall einer beliebigen Fortpflanzungsrichtung (s. S. 794 dieses Bandes). Hae.

Th. Des Coudres. Zur Theorie des Kraftfeldes elektrischer Ladungen, die sich mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegen. Arch. Néerl. (2) **5,** 652-664.

In Bezug auf den im Titel angegebenen Gegenstand hat Heaviside seit 1889 wiederholt Ergebnisse seiner theoretischen Untersuchungen veröffentlicht; die mathematische Ableitung der bekannt gegebenen Resultate ist aber erst 1900 im Electrician mitgeteilt worden. „Bequem landläufiger Weg ist seine Mathematik hier nicht.“ „Unter diesen Umständen möchte es am Platze sein, darauf hinzuweisen, dass wir H. A. Lorentz ein analytisches Theorem verdanken, welches das Gebiet der Kathodenstrahlen-Elektrodynamik in überraschendem Umfange zu beherrschen gestattet, und das auch im Falle des Heaviside'schen Problems der Convection mit Ueberlichtgeschwindigkeit überraschend leicht zum Ziele führt.“ Lp.

A. Perot. Sur l'accouplement des alternateurs au point de vue des harmoniques et effet des moteurs synchrones sur ceux-ci. C. R. **131,** 377-380.

G. Claude. Sur l'élimination des harmoniques des courants alternatifs industriels par l'emploi des condensateurs et sur l'intérêt de cette élimination au point de vue de la sécurité pour la vie humaine. C. R. **131,** 613-615.

Das mathematische Interesse an diesen Arbeiten beruht auf der Darstellung der elektromotorischen Kraft eines Wechselstromes durch eine Fourier'sche Reihe, aus der die Glieder, welche auf das erste Glied

folgen, „die harmonischen Obertöne“, durch besondere Versuchsanordnungen fortzuschaffen oder bedeutend zu schwächen sind. Lp.

G. Grassi. Sul calcolo delle dimensioni dell' indotto nelle dinamo. Napoli Rend. (3) **6**, 81-88.

Nachtrag zu der Abhandlung, über welche in F. d. M. **29**, 734, 1898, berichtet ist, zu dem Zwecke, andere Elemente in Betracht zu ziehen und die Lösung des Problems zu modificiren, indem ein einfacheres und directeres Verfahren bei der Berechnung angewandt wird. Lp.

A. Cornu. Action du champ magnétique terrestre sur la marche d'un chronomètre aimanté. C. R. **131**, 859-865.

Zur Berücksichtigung des Einflusses des Erdmagnetismus auf den Gang eines sog. Halbchronometers, der in der Nähe eines Elektromagneten magnetisch geworden war, wird unter anderem eine Formel entwickelt, welche mit einer von Phillips herrührenden Formel zur Beseitigung des Einflusses der Schwere bei einer vertical hängenden Uhr mit nicht genügend äquilibrirter Unruhe übereinkommt. Lp.

A. Turpain. Sur la propagation des oscillations électriques dans les milieux diélectriques. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 274-283.

Zur Entscheidung zwischen den Theorien von Maxwell und von Helmholtz, die kurz charakterisirt werden, hat der Verf. Versuche über die Fortpflanzung elektrischer Wellen in Petroleum und in Wasser angestellt. Nach seiner Ansicht sprechen die Ergebnisse zu Gunsten der Helmholtz'schen Theorie. Lp.

Juppont. Démonstration élémentaire de la relation électro-optique de Maxwell. Toulouse Bull. et Mém. 1899/1900, 44-48.

Elementare Herleitung des Satzes, dass das Quadrat des Brechungsindex dem specifischen Inductionsvermögen gleich ist. Lp.

Juppont. Sur diverses relations mécaniques et électro-optiques. Toulouse Bull. et Mém. 1899/1900, 48-55.

Der Verf. versucht zu zeigen, dass alle physikalischen Erscheinungen directe Beziehungen zu den elektrischen Grössen haben, unter Aufstellung der jene Beziehungen enthaltenden Formeln. Lp.

E. LECHER. Ueber unipolare Induction und den Pohl'schen Versuch. Ann. der Phys. (4) **3**, 513-521.

W. KÖNIG. Zwei Erwiderungen. Ann. der Phys. (4) **2**, 854-860.
Betrifft den Pohl'schen Versuch.

H. LORBERG. Einige Bemerkungen zu zwei Aufsätzen von Lecher und W. König. Ann. der Phys. (4) **3**, 522-529.

F. BEAULARD. Sur les formules de Mossotti-Clausius et de Betti relatives à la polarisation des diélectriques. Grenoble Ann. **12**, 91-94.

W. BECK. Die Elektricität und ihre Technik. Eine gemeinverständliche Darstellung der physikalischen Grundbegriffe und der praktischen Anwendungen der Elektricität. Nebst einem Anhange: Das Wesen der Elektricität und des Magnetismus. Von J. G. Vogt. 4. Aufl. Leipzig: E. Wiest Nachf. 928, 134 u. XV S. gr. 8°.

L. DONATI. Relazione generale fra le correnti in una rete di fili conduttori. Bologna Rend. **4**, 29-33.

L. DONATI. Teorema generale relativo alla distribuzione del potenziale in una rete di fili conduttori, con alcune applicazioni. Bologna Rend. **4**, 65-68.

E. W. HOBSON. On Green's function for a circular disc, with applications to electrostatic problems. Cambr. Trans. **18**, 277-291.

H. C. JONES. The theory of electrolytic dissociation. New York: The Macmillan Company; London: Macmillan and Co. XII + 289 S. [Nature **62**, 121-122.]

H. LAMB. An electromagnetic illustration of the theory of selective absorption of light by a gas. Camb. Trans. **18**, 348-363.

J. LARMOR. On the dynamics of a system of electrons or ions; and on the influence of a magnetic field on optical phenomena. Cambr. Trans. **18**, 380-407.

CH. H. LEES. On the electrical resistance between opposite sides of a quadrilateral one diagonal of which bisects the other at right angles. Manchester Mem. **44**, No. 1, 3 S.

H. M. MACDONALD. Demonstration of Green's formula for electric density near the vertex of a right cone. Cambr. Trans. **18**, 292-297.

CH. P. STEINMETZ. Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. 2. Hälfte. Berlin: Reuther & Reichard. XVII + XVIII + S. 185-512. gr. 8°.

L. POINCARÉ. Quelques remarques sur les théories de la pile voltaïque. Rapports Congr. intern. Phys. **2**, 403-421.

E. WARBURG. L'hystérésis. Suivi d'un appendice sur les transformations du fer carburé, par J. H. van't Hoff. Rapports Congr. intern. Phys. **2**, 509-535.

H. Nagaoka. La magnétostriction. Rapports Congr. intern. Phys. 2, 536-556.

Hurmuzescu. Les modifications physiques dues à l'aimantation. Rapports Congr. intern. Phys. 2, 557-567.

A. Blondel. Sur la simplification des unités électriques. Assoc. Franç. Boulogne (1899) 28, 304-310.

A. Blondel. Nouvelle méthode pour la mesure des faibles coefficients de self-induction. Assoc. Franç. Boulogne (1899) 28, 311-316.

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmelehre.

E. Mach. Die Principien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. Mit 105 Figuren und 6 Porträts. 2. Auflage. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. XII u. 484 S. gr. 8°.

Nach denselben Grundsätzen bearbeitet wie des Verf. „Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt", hat das gegenwärtige Buch einen solchen Beifall gefunden, dass die zweite Auflage der ersten nach Verlauf von vier Jahren gefolgt ist. Da der Titel nur die Principien der Wärmelehre verspricht, wird niemand, der Detailforschungen über besondere Fragen vornehmen will, sich darüber in dieser Schrift Auskunft holen wollen. Wem es aber darum zu thun ist, mehr als eine Sammlung von Thatsachen zu erhalten, nämlich eine einheitliche philosophische Auffassung der Erscheinungswelt, wie der menschliche Geist sich eine solche allmählich durch denkende Betrachtung aller Vorgänge im Laufe der Zeiten gebildet hat, der wird von der ruhig abwägenden und in die Tiefe eindringenden Darstellung gefesselt und zu erneutem selbständigen Nachsinnen angeregt werden. Mehr noch als in der Mechanik tritt hier diese philosophische Durchdringung des Stoffes an der Hand der historischen Entwickelung in den Vordergrund. Das letzte Viertel des Werkes ist überhaupt ausschliesslich der Erörterung allgemeiner erkenntnistheoretischer Fragen vorbehalten. Hier erhält der Leser die reifsten Früchte des gedankenreichen Forschers unter den Titeln: Gegensatz zwischen der mechanischen und phänomenologischen Physik, die Entwickelung der Wissenschaft, der Sinn für das Wunderbare, Umbildung und Anpassung im naturwissenschaftlichen Denken, die Oekonomie der Wissenschaft, die Vergleichung als wissenschaftliches Princip, die Sprache, der Begriff, der Substanzbegriff, Causalität und Erklärung, Correctur wissenschaftlicher Ansichten durch zufällige Umstände, die Wege der Forschung, das Ziel der Forschung. Als Anhang folgt der „berühmte Versuch Gay-Lussac's betreffend die Wärmeerscheinungen bei Volumenänderungen der Gase."

nämlich der Abdruck der sehr seltenen Schrift: „Premier essai pour déterminer les variations de température qu'éprouvent les gaz en changeant de densité, et considérations sur leur capacité pour le calorique". Ein alphabetisches Namen- und Sachregister beschliesst den Band.

Ein Forscher, der sich durch seine Arbeiten so früh zur Klarheit der Anschauungen erhoben hat, dass er auf seine vor dreissig Jahren erschienenen Schriften verweisen kann, um die Quelle seiner Denkweise zu bezeichnen, ist der Bewunderung seiner Zeitgenossen sicher, die sich nicht in gleicher Weise auf die Höhen des reinen Denkens begeben haben, von ihm aber einen Einblick in dieses Gefilde erhalten. Wer die Berücksichtigung mancher Thatsachen vermisst, die in dem letzten Jahrzehnt von den rührigsten Arbeitern auf dem Gebiete der Wärmetheorie nach manchen aufregenden und anstrengenden Versuchen, begleitet vom Beifall und vom Widerspruch streitbarer Fachgenossen, festgestellt worden sind, der möge bedenken, dass Mach in diesem Werke etwa die Summe seines Lebens zieht, und dass die Folgen der jüngsten Forschungsergebnisse für die allgemeinen Vorstellungen nicht so schnell zu übersehen und dem vom Verf. vertretenen Ideenkreise einzuordnen sind.

Lp.

J. Rose-Innes. Theory of the constant-volume gas-thermometer. Phil. Mag. (5) **50**, 251-260.

Die Bedingung dafür, dass das Gasthermometer mit constantem Volumen correcte Angaben der thermodynamischen Scala giebt, dass also die absolute Temperatur bei constantem Volumen eine lineare Function des Druckes ist, ergiebt sich in der Form, dass der Ausdruck: $J \cdot K \cdot \frac{\partial t}{\partial p} + \left(\frac{\partial (pv)}{\partial p}\right)_t$ der Temperatur t umgekehrt proportional sein muss (die übrigen Buchstaben haben die gewöhnliche Bedeutung). Es wird discutirt, inwieweit Wasserstoff von dieser Bedingung abweicht, und wie die Abweichungen exact bestimmt werden können. Annähernd ist das Gesetz jedenfalls als erfüllt zu erachten. Aus der Voraussetzung seiner Richtigkeit wird dann die weitere Gleichung abgeleitet: $p = Rt/(v - B) - \lambda/v^2$, wo R, B und λ Constanten sind. Soll, entsprechend der Mayer'schen Annahme, der durch Compression eines Gases erzeugte Wärmegewinn der Arbeit direct entsprechen, so muss der obige Ausdruck: $JK \cdot \frac{\partial t}{\partial p} + \left(\frac{\partial (pv)}{\partial p}\right)_t = 0$ sein. Br.

P. Chappuis. Notes on gas-thermometry. Phil. Mag. (5) **50**, 433-442.

Enthält eine Bestimmung der Ausdehnung von Stickstoff, die durch eine quadratische Function der Temperatur gegeben ist. Br.

H. Pellat. Réflexions au sujet de l'univers et des lois naturelles. Arch. Néerl. (2) **5**, 43-45.

Statt den Zustand des Weltalls in die Zukunft zu verfolgen, wo nach Lord Kelvin und Helmholtz die ganze Energie sich als Wärme aller Körper von gleicher Temperatur vorfinden soll, geht der Verf. rückwärts in die Vergangenheit mit seinen Gedanken und glaubt, auf ein Minimum der Entropie zu einem Zeitpunkte schliessen zu dürfen, der in endlichem Zeitabstande von uns liegt; dies sei nur begreifbar durch einen Schöpfungsact zu jenem Zeitpunkte. Lp.

M. Planck. Bemerkungen zu einer Abhandlung über Thermodynamik des Hrn. K. Wesendonck. Ann. der Phys. (4) **1**, 621-624.

Der Verf. hebt Wesendonck gegenüber (s. F. d. M. **30**, 802, 1899) seine abweichende Auffassung betreffs des Beweises des zweiten Hauptsatzes und der Möglichkeit isentropischer Aenderungen hervor. Sbt.

K. v. Wesendonck. Weiteres zur Thermodynamik. Ann. der Phys. (4) **2**, 746-756.

I. Die Frage, ob in der Clausius'schen Ungleichung $\int \frac{dQ}{T} \gtreqless 0$ die absolute Temperatur T als die von Wärmereservoiren oder von Teilen der den Kreisprocess durchmachenden Körper anzusehen sei, ist noch nicht in einer allgemein angenommenen Weise entschieden. Eine Kritik des Poincaré'schen „Wahrscheinlichkeitsbeweises" schliesst der Verf. mit der Bemerkung, dass T Temperaturen zu entsprechen scheine, die dem arbeitenden System zukommen, welches auch die Temperaturen der Wärmespeicher sind.

II. Bezugnehmend auf Arbeiten von Wiedeburg und Carvallo, erörtert der Verfasser die Frage, ob bei einer ausgedehnten Klasse von adiabatischen Veränderungen die Entropie wächst, und schliesst damit: Wenn man die Zunahme der im Sinne von Clausius definirten Entropie nicht anerkennen wolle, so wäre es wünschenswert, nachzuweisen, wo in den voraufgehenden Schlüssen der Fehler liege. „Es wäre ja wohl auch möglich, dass eine der Clausius'schen Entropie verwandte Grösse bei allen adiabatischen Processen constant bleibt, und dass ferner eine solche Grösse zur Darstellung thermischer Vorgänge sich als nützlich erweist. Aber eine klare Scheidung wäre in solchen Fällen dringend geboten.

III. Gegenüber Planck bemerkt der Verf., es wäre bei dem heutigen Stande der Dinge immer noch vorzuziehen, den zweiten Wärmesatz nicht allein auf die Entropielehre zu gründen. Sbt.

Jouguet. Le théorème du tourbillon en thermodynamique. C. R. 131, 1190-1191.

Das Fundamentalproblem der Theorie der Wirbelbewegungen lässt sich für die reibungslosen Flüssigkeiten beweisen, wenn man folgende Hypothesen macht: 1. Die Kräfte, die auf die Flüssigkeit wirken, sowohl die inneren wie die äusseren, haben ein Potential. 2. Der Druck in einem Punkte ist eine Function allein der Dichtigkeit in diesem Punkte.
Sbt.

W. Wien. Les lois théoriques du rayonnement. Rapports Congr. intern. Phys. 2, 23-40.

Nach einer kurzen Einleitung folgen die Abschnitte: I. Bestimmung der Temperatur der Strahlung. II. Thermodynamische Studie über den Einfluss der Temperatur auf die Strahlung der schwarzen Körper. III. Verteilung der Energie in dem Spectrum eines schwarzen Körpers.
Lp.

O. Lummer. Le rayonnement des corps noirs. Rapports Congr. intern. Phys. 2, 41-99.

Einleitung. I. Verteilung der Energie im Spectrum. II. Das Kirchhoff'sche Gesetz und seine Folgerungen für die Wärmestrahlung. A. Das Kirchhoff'sche Gesetz. B. Verwirklichung der schwarzen Körper. C. Das Draper'sche Gesetz. III. Die Strahlung, betrachtet als eine Function der Temperatur und der Wellenlänge. A. Experimentelle und theoretische Untersuchungen vor der Verwirklichung des schwarzen Körpers. B. Experimentelle Untersuchungen über die Emission der schwarzen Körper. IV. Messung der Emission eines schwarzen Körpers in absolutem Werte. V. Bestimmung der Temperatur nach der Verteilung der Energie in dem Spectrum des schwarzen Körpers und des polirten Platins. VI. Allgemeine Gleichung für die Emission eines schwarzen Körpers.
Lp.

E. Pringsheim. Sur l'émission des gaz. Rapports Congr. intern. Phys. 2, 100-132.

I. Kirchhoff'sches Gesetz. II. Die verschiedenen Spectren. III. Verschiedene Arten der Erzeugung. IV. Theoretische Betrachtungen.
Lp.

M. Thiesen. Ueber allgemeine Naturconstanten. Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, 116-121.

Nach einer Bemerkung von Planck liefert das Wien'sche Strahlungsgesetz zwei Naturconstanten, welche im Verein mit der Lichtgeschwindigkeit und der Gravitationsconstante genügen, um die mechanischen Grössen und die Temperatur in natürlichen, von der Beschaffenheit

eines besonderen Körpers unabhängigen Einheiten auszudrücken. Der Verf. führt diesen Gedanken durch, indem er anderweitig aufgestellte Naturconstanten in den Einheiten des erwähnten Systems ausdrückt.

Lp.

A. LORENTZ. De theorie der straling en de tweede wet der thermodynamica. Amst. Versl. **9**, 418-434.

Für einen von schwarzen Wänden mit der Temperatur T eingeschlossenen Raum wird die Energiedichte, d. i. die Strahlungsenergie für die Volumeneinheit, dargestellt durch $\mu = \int_0^\infty f(T, \lambda) d\lambda$. Der durch $f(T, \lambda)$ gekennzeichnete Zustand wird nicht nur durch vollkommen schwarze Wände, sondern auch durch beliebige Körper von der Temperatur T hervorgebracht. Die Function f hat eine allgemeine Bedeutung wie die Function E/A des Kirchhoff'schen Gesetzes, mit der sie Zusammenhang hat. Durch thermodynamische Betrachtungen sind Boltzmann und Wien zu Gesetzen der Function f gelangt, die durch die Beobachtungen von Paschen und von Lummer und Pringsheim bestätigt wurden. Der Verf. will nun weitere Folgerungen aus dem zweiten Hauptsatze ziehen und kommt zu einem merkwürdigen Schlusse.

Der Zustand im Aether, der einer bestimmten Temperatur entspricht, wird nicht allein durch die Energiedichte μ, sondern überdies durch eine zweite Grösse bestimmt, der die Bedeutung einer Länge λ_m zukommt. Beide Grössen, μ und λ_m, müssen nun, wie der Verf. schliesst, durch die ponderable Materie im Aether bestimmt sein, denn die Gleichungen des elektrischen Feldes liefern bei ihrer Anwendung auf den Aether wohl einen bestimmten Wert der Lichtgeschwindigkeit, aber sonst keine bestimmte Grösse. Wenn nun bei gleicher Temperatur die verschiedenen ponderablen Körper die gleichen Werte von μ und λ_m ergeben, so müssen sie etwas gemeinsam haben. Wenn keine Strahlung, sondern nur moleculare Bewegungen in Betracht gezogen werden, so ist das Gemeinsame die Unordnung dieser molecularen Bewegungen; in dem allgemeineren Falle aber, wo auch Strahlung in Frage kommt, besteht die Uebereinstimmung in der Gleichheit der Elektronen in allen ponderablen Körpern.

Sbt.

Lord RAYLEIGH. Remarks upon the law of complete radiation. Phil. Mag. (5) **49**, 539-540.

Während Wien für die Abhängigkeit der bei der absoluten Temperatur ϑ von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Strahlenintensität von der Wellenlänge λ auf die Formel kam: $c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda\vartheta}$, leitet Verf. aus theoretischen Erwägungen eine etwas andere Formel ab, nämlich $c_1 \vartheta \lambda^{-4} e^{-c_2/\lambda\vartheta}$.

Br.

M. Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. Ann. der Phys. (4) **1,** 69-122.

Zusammenstellung der in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie in den Jahren 1897 bis 1899 unter dem gleichen Titel veröffentlichten Arbeiten (F. d. M. **28,** 808; **29,** 759; **30,** 802). Sbt.

M. Planck. Entropie und Temperatur strahlender Wärme. Ann. der Phys. (4) **1,** 719-737.

Die Verschiedenheit der Resultate, zu denen einerseits Paschen, anderseits Lummer und Pringsheim durch ihre Versuche inbetreff der Gültigkeit des Wien'schen Energieverteilungsgesetzes gelangt sind, und der Versuch Thiesen's, die Wien'sche Formel durch eine andere zu ersetzen, haben dem Verf. Anregung gegeben, die theoretischen Voraussetzungen, die zu seinem Ausdruck über die Strahlungsentropie (s. das vorstehende Referat) führen, übersichtlich zusammenzustellen und einer schärferen Kritik zu unterziehen; denn da dieser Ausdruck das Wien'sche Gesetz bestätigt, so müsste an ihm etwas geändert werden, wenn dies Gesetz sich nicht als allgemeingültig erweisen sollte.

Nach einer eingehenden Erörterung der physikalischen Grundlagen der Theorie wird die Vermehrung der Entropie durch einen im Strahlungsfeld befindlichen Resonator untersucht; es werden die notwendigen Eigenschaften der Entropie bestimmt, und dann ergiebt sich eine neue, directe Berechnung der Strahlungsentropie. Die Gleichungen

$$S = -\alpha \cdot U \cdot \log(\beta \cdot U) \text{ und } L = -\alpha \cdot \mathfrak{K} \cdot \log\left(\frac{\beta c^2}{\nu^2} \cdot \mathfrak{K}\right),$$

die der Verf. ableitet, stellen genau die von ihm früher unvermittelt eingeführten Definitionen der Resonatorenentropie S und der strahlenden Entropie L dar. Für die Temperatur ϑ des Resonators ergiebt sich dann $\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{a \cdot \nu} \cdot \log \frac{b \cdot \nu^3}{c^2 \cdot \mathfrak{K}}$; die nach den Messungen von Kurlbaum und von Paschen berechneten Zahlenwerte von a und b sind $a = 0{,}4818 \cdot 10^{-10}$ (sec$\times$Celsiusgrad) und $b = 6{,}885 \cdot 10^{-27}$ (erg$\times$sec).

Schliesslich wird als eine specielle Anwendung des Wien'schen Gesetzes eine Formel gegeben zur numerischen Berechnung der Temperatur einer monochromatischen, aus homocentrischen Bündeln bestehenden Strahlung, die von einer kleinen Fläche emittirt und durch ein System centrirter brechender Kugelflächen nahe der Axe hindurchgegangen ist:

$$\vartheta = \frac{0{,}482 \cdot 10^{-10} \cdot \nu}{\log \frac{\nu^3 \mu^2 F \cdot \omega}{I_\nu} - 107{,}8} \text{ Grad C.}$$

Sbt.

M. THIESEN. Ueber das Gesetz der schwarzen Strahlung. Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, 65-70.

Die Verbindung des Boltzmann'schen und des Wien'schen Gesetzes führt auf den Ausdruck für die Strahlungsenergie $E = T^5 \cdot \psi[\lambda T]$, wo T die absolute Temperatur, λ die Wellenlänge bezeichnet. Für die Function ψ, die unbekannt ist, ermittelt Thiesen die Form

$$\psi[x] = \psi_m \left\{ \frac{x_m}{x} e^{1-x_m/x} \right\}^{4,5},$$

durch welche alle bekannten Beobachtungen sich wiedergeben lassen; ψ_m und x_m sind „Naturconstanten". Im zweiten Teile des Artikels wird eine einwandsfreie Herleitung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes versucht. Lp.

J. D. VAN DER WAALS Jr. La propagation libre de la radiation est-elle réversible? Arch. Néerl. (2) 5, 587-594.

Verf. stellt Betrachtungen an über die zwischen Planck und W. Wien bestehende Meinungsverschiedenheit bezüglich der Frage, ob die freie Ausbreitung der Strahlen ein vollkommen reversibler Vorgang sei, und gelangt zu dem Schlusse: „In aller Strenge meine ich, die freie Ausbreitung der Strahlen als irreversibel betrachten zu müssen."

Lp.

M. PLANCK. Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, 202-204.

Wegen der unzweifelhaft gewordenen Abweichungen der Versuchsergebnisse von dem Wien'schen Gesetze hat der Verf. den Gang der Herleitung jenes Gesetzes geprüft und schlägt die „zweiconstantige Strahlungsformel" vor:

$$E = \frac{C.\lambda^{-5}}{e^{c/\lambda T} - 1}.$$

Lp.

M. PLANCK. Ein vermeintlicher Widerspruch des magneto-optischen Faradayeffectes mit der Thermodynamik. Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, 206-210.

Mittels genauer und vollständiger Durchführung der nötigen Rechnungen hat der Verf. gefunden, dass das sogenannte „Wien'sche Paradoxon" lediglich auf einer unzulänglichen Betrachtungsweise beruht.

Lp.

M. PLANCK. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, 237-245.

Der Verf. beschreibt „ein neues, ganz elementares Verfahren, durch

Theorie etwas zu wissen, mit Hülfe einer einzigen Naturconstante die Verteilung einer gegebenen Energiemenge auf die einzelnen Farben des Normalspectrums, und dann mittels einer zweiten Naturconstante auch die Temperatur dieser Energiestrahlung zahlenmässig berechnen kann". Die erhaltene Formel entspricht genau der in einem vorangehenden Referate mitgeteilten. Zuletzt werden einige Consequenzen der entwickelten Theorie angedeutet. Lp.

O. LUMMER und E. JAHNKE. **Ueber die Spectralgleichung des schwarzen Körpers und des blanken Platins.** Ann. der Phys. (4) **8**, 283-297.

Da die Resultate der spectrobolometrischen Versuche von Lummer und Pringsheim mit den Consequenzen des Wien'schen Strahlungsgesetzes im Widerspruch stehen, so unterwerfen die Verfasser die von Michelson und von Wien bei der Ableitung ihrer Formeln gemachten Hypothesen einer kritischen Beleuchtung und zeigen, dass man bei richtiger Benutzung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes mit Wien's Hypothesen nicht zu einer brauchbaren Spectralgleichung kommt. Eine solche ergiebt sich erst, wenn man die Strahlungsenergie ausser der Maxwell'schen Anzahl und einer Function der lebendigen Kraft noch einer Function der Temperatur proportional setzt. Die Verf. erhalten demnach folgende Spectralgleichung:

$$E = C \cdot T^5 \cdot (\lambda \cdot T)^{-\mu} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Aus ihr folgt die Wien'sche für $\mu = 5$, die Thiesen'sche für $\mu = 4,5$ und die Rayleigh'sche für $\mu = 4$. Die Gleichung wird noch analytisch verallgemeinert zur folgenden:

$$E = C \cdot T^5 \cdot (\lambda T)^{-\mu} \cdot e^{-\frac{c}{(\lambda T)^\nu}}.$$

In einem einzigen Falle, nämlich wenn $\mu = 5$ und $\nu = 0,9$, wird $\lim_{(T=\infty)} E$ endlich, in allen anderen Fällen unendlich. Es wird also anzunehmen sein, dass E mit T über alle Grenzen hinaus wächst, und die erste Formel wird mit $\mu < 5$ auf Maxwell'scher Grundlage als die wahrscheinlichste zu gelten haben.

Es wird auch eine Strahlungsformel für das blanke Platin gegeben, die in guter Uebereinstimmung ist mit den Beobachtungen von Lummer und Pringsheim. Sbt.

H. RUBENS und F. KURLBAUM. **Ueber die Emission langwelliger Wärmestrahlen durch den schwarzen Körper bei verschiedenen Temperaturen.** Berl. Ber. 1900, 929-941.

Die Wien'sche Formel $E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}$ wird für kleine Wellen-

längen und niedrige Temperaturen sowohl durch die experimentellen Arbeiten von Lummer und Pringsheim wie die von Paschen bestätigt, während bei höheren Werten des Productes λT die Versuche von Lummer und Pringsheim beträchtliche Abweichungen erkennen lassen. Es sind dann in neuester Zeit andere Formeln aufgestellt worden von Thiesen, Lord Rayleigh, Lummer und Jahnke und endlich von Planck, über deren Brauchbarkeit durch die Versuche zu entscheiden ist. Auch nach den Untersuchungen von Beckmann ist das Wien'sche Gesetz nicht geeignet, die Beobachtungen richtig wiederzugeben. Zur Prüfung der anderen Gesetze können diese Beobachtungen nicht dienen, da sie sich auf ein zu kleines Temperaturintervall erstrecken. Die Verfasser haben es deswegen von neuem unternommen, die Intensität der von einem schwarzen Körper ausgesandten Reststrahlen für einen möglichst grossen Temperaturbereich (—188° bis 1474°) zu bestimmen. Es wurden die Reststrahlen des Flussspates und die des Steinsalzes untersucht. Die durch Curven und Tabellen dargestellten Resultate zeigen, dass weder die Formel von Wien, noch die von Thiesen oder die von Lord Rayleigh im Stande ist, die Beobachtungen richtig darzustellen. Die Rayleigh'sche Formel $E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \lambda T \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}$ versagt für kurze Wellenlängen. Dagegen stellt die Formel von Lummer und Jahnke $E = C \cdot \lambda^{-\mu} \cdot T^{5-\mu} \cdot e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{\nu}}}$ und namentlich die einfachere Formel von Planck $E = C \cdot \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1}$ die Beobachtungen durchaus gut dar. Sbt.

W. Wien. Zur Theorie der Strahlung schwarzer Körper. Kritisches.

Ann. der Phys. (4) **3**, 530-539.

Die Einwände, die in neuester Zeit von verschiedenen Seiten her gegen das Strahlungsgesetz des Verf. erhoben worden sind, veranlassen diesen zu einer kritischen Abwehr. Als theoretisch gesichert und durch die Erfahrung bestätigt erklärt er das Boltzmann'sche Gesetz, dass die Gesamtstrahlung proportional mit T^4 wächst, und sein eigenes Gesetz, dass die Veränderung jeder Wellenlänge der absoluten Temperatur T umgekehrt proportional ist. Auch die anderen rein thermodynamischen Folgerungen, die er aus dem Kirchhoff'schen Gesetze abgeleitet hat, können als sichergestellt angesehen werden. Gegen die Ausnahmestellung, die der Verf. der magnetischen Drehung der Polarisationsebene zugewiesen hat, sind von Brillouin Einwände erhoben worden; der Verf. sucht zu zeigen, dass diese auf einem Missverständnis beruhen. Er wendet sich dann gegen die Ansicht von Planck, dass Ausbreitung der Strahlung ein umkehrbarer Vorgang sei, sobald Emission, Absorption und Zerstreuung der Strahlung ausgeschlossen wird. Endlich weist er die Ein-

würfe zurück, die Lummer und Jahnke (s. S. 647) gegen sein Strahlungsgesetz erhoben haben. Es scheint dem Verf. wenig aussichtsvoll, ein allgemeingültiges Strahlungsgesetz auf molecularen Hypothesen aufzubauen, so lange eine rein thermodynamische Ableitung unmöglich ist. — Gegen die Methode, durch die Planck einen Ausdruck für die elektromagnetische Entropie ableitete, sind zwei Bedenken zu erheben. — Die Bemerkung von Lord Rayleigh, dass nach dem Wien'schen Gesetz die Strahlung für $\lim T = \infty$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, kann nicht als Einwand gegen das Gesetz anerkannt werden. Sbt.

M. Planck. Kritik zweier Sätze des Hrn. W. Wien. Ann. der Phys. (4) **3**, 764-766.

In zwei Punkten weicht die Ansicht des Verf. besonders stark von der Wien'schen ab. Der eine ist das vermeintliche magnetisch-optische Paradoxon, gegen das auch Brillouin Einwände erhoben hat. Der zweite ist die Umkehrbarkeit der freien Ausbreitung strahlender Energie, bezüglich deren Wien „unzutreffende Behauptungen" aufgestellt hat. Sbt.

W. B. Boynton. Gibbs's thermodynamical model. Nature **61**, 414-415.

Bei dem Versuche, durch zwei Schüler das thermodynamische Modell construiren zu lassen, ist der Verf. auf Schwierigkeiten gestossen, die in dem Artikel bezeichnet werden; er schliesst mit einer Bitte um Unterstützung zur Beseitigung derselben. Lp.

H. Kamerlingh Onnes. Die reducirten Gibbs'schen Flächen. Arch. Néerl. (2) **5**, 665-678.

Der Verf. liefert einen Beitrag zur Charakterisirung der verschiedenen Typen der Gibbs'schen reducirten Flächen, beschränkt sich dabei auf die Dampf-Flüssigkeits-Falte und fasst von dieser wieder nur die sie bestimmende Connode ins Auge. Lp.

D. Berthelot. Quelques remarques sur l'équation caractéristique des fluides. Arch. Néerl. (2) **5**, 417-446.

Der Aufsatz enthält eine historisch-kritische Uebersicht über die Arbeiten bezüglich der Zustandsgleichungen, die nach der Aufstellung der Formel von van der Waals gegeben worden sind; daher kann diese Abhandlung sehr gut zur Einführung in dieses Gebiet dienen. Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: I. Die Formel der vollkommenen Gase. Die Gleichung von van der Waals. II. Modificationen an der van der Waals'schen Formel und charakteristische Gleichungen mit

mehr als drei Constanten. III. Das Gesetz der correspondirenden Zustände und die Gleichungen mit drei Constanten. IV. Methode zur Vergleichung der Formeln und des Experimentes. Diagramme der Abweichungen von dem Mariotte'schen und dem Avogadro'schen Gesetze. V. Summarische Erörterung einiger charakteristischer Gleichungen. VI. Die Abweichungen von dem Gesetze der correspondirenden Zustände.

Lp.

D. Berthelot. Sur la valeur de la pression interne dans les équations de Van der Waals et Clausius. C. R. **130,** 69-73.

Durch Vergleichung der verschiedenen Formeln, die als charakteristische Gleichung der Flüssigkeiten vorgeschlagen sind, mit der Gesamtheit der experimentellen Daten, über welche die Wissenschaft verfügt, ist der Verf. zu einer Gleichung gekommen, die sehr einfach ist und in einer auch numerisch befriedigenden Weise den flüssigen Zustand darstellt. Die Gleichung lautet:

$$\left(\varpi + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{13^{-3}}{108\,v^2 + 96\,v - 35}\right) \cdot (v - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{32}{9}\Theta.$$

Darin ist $\varpi = \frac{p}{p_c}$, $\Theta = \frac{T}{T_c}$, $v = \frac{v}{v_c}$, und p_c, T_c, v_c sind die Werte des Druckes p, der Temperatur T und des Volumens v für den kritischen Zustand. Diese Gleichung führt auf eine kritische Isotherme, die der experimentellen Isotherme in ihrer ganzen Ausdehnung ziemlich gut folgt. Wie der Ausdruck von Clausius ist der hier gegebene für den inneren Druck auf empirische Thatsachen begründet; anders steht es mit den Aenderungen, die neuerdings für den Ausdruck des Covolumens in der Formel von van der Waals vorgeschlagen sind. Sbt.

D. Berthelot. Sur le covolume dans l'équation caractéristique des fluides. C. R. **130,** 115-118.

Verf. zeigt, dass die von Boltzmann, Lorentz, Jäger, van Laar und van der Waals gegebenen, aus der kinetischen Gastheorie gefolgerten Erweiterungen der ursprünglichen van der Waals'schen Zustandsgleichung $p + \frac{q}{v^2} = \frac{RT}{v - b}$ der Flüssigkeiten und Gase sich den Versuchsergebnissen, insbesondere denen von Amagat, weniger gut anschliessen als die ursprüngliche Gleichung.

Er selbst schlägt eine andere, nicht physikalisch, sondern nur numerisch begründete Erweiterung vor, bei der das Covolumen b als Function der Temperatur T, d. h. $b_T = b_c\left[1 + 0{,}3\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)\right]$ angesetzt

wird, wo T_c die Temperatur der kritischen Isotherme und b_c das Covolumen für die kritische Isotherme sind. Rr.

D. BERTHELOT. Sur un point remarquable en relation avec le phénomène de Joule et Kelvin. C. R. **130**, 1379-1381.

Discussion der van der Waals'schen Gleichung unter dem vereinfachenden Gesichtspunkte, dass man in dieselbe $y = pv/T$ als Variable einführt. Hae.

J. D. VAN DER WAALS. Sur la relation entre les modifications, subies par le volume spécifique de la vapeur saturée et celui du liquide coexistant sous l'influence des variations de température. Arch. Néerl. (2) **5**, 407-416.

Bezeichnet man den Compressibilitäts-Coefficienten mit β, so besteht, wie der Verf. aus einer Differentialgleichung in seiner Schrift „Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“ (Leipzig, 1900) folgert, die merkwürdige Relation $dv_1/\beta_1 + dv_2/\beta_2 = 0$. Durch Vergleichung mit Versuchsergebnissen findet der Verf., dass diese Gleichung in hohem Grade angenähert gilt. „Wenn diese Relation völlig bewiesen wäre, so wäre damit der Nachweis geführt, dass der moleculare Druck schlechthin von der Form ist $af(\tau)/v^2$, und um die Zustandsgleichung mit dem Versuche völlig in Uebereinstimmung zu bringen, wäre einfach notwendig, den Wert von $1/(v - b)$ zu suchen.“ Lp.

CH. M. A. HARTMAN. Beiträge zur Kenntnis der van der Waals'schen ψ-Fläche. III. Die Condensationserscheinungen bei Mischungen von Chlormethyl und Kohlensäure für 9°, 5. Arch. Néerl. (2) **5**, 636-641.

Anwendung der von Kamerlingh-Onnes und Reinganum angegebenen Methoden der graphischen Behandlung auf die vom Verf. beobachteten connodalen Curven bei den im Titel genannten Erscheinungen. Lp.

J. E. VERSCHAFFELT. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. IV. La loi des états correspondants dans les mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène. Arch. Néerl. (2) **5**, 644-651.

In dem ersten Artikel der Beiträge zur Kenntnis der van der Waals'schen ψ-Fläche hat Kamerlingh Onnes gezeigt, wie wichtig es ist, zu ermitteln, bis wie weit die homogenen Gemische zweier normalen Substanzen dem Gesetze der correspondirenden Zustände gehorchen. Der Verf. construirt für das im Titel angegebene Gemisch die ψ-Fläche

auf Grund seiner Versuche; vorher aber untersucht er das Verhalten der betreffenden Gemische in Bezug auf das angeführte Gesetz.

Lp.

N. Schiller. Einige thermodynamisch abzuleitende Beziehungen zwischen den Grössen, die den physikalischen Zustand einer Lösung charakterisiren. Arch. Néerl. (2) **5**, 118-147.

Die fraglichen Beziehungen lassen sich durch Gleichungen darstellen, in welche zahlreiche Grössen eingehen. Die Herleitung erfolgt durch die Betrachtung eines gewissen isothermischen reversiblen Kreisprocesses. Eine genauere Darstellung des Inhaltes würde einen zu grossen Raum beanspruchen.

Lp.

F. A. H. Schreinemakers. La tension de vapeur de mélanges ternaires. Arch. Néerl. (2) **5**, 214-226.

„Vermittelst der van der Waals'schen Oberfläche ψ kann man sich Rechenschaft geben von den Erscheinungen, die in den Systemen aus zwei Bestandteilen zwischen zwei flüssigen Phasen oder zwischen Flüssigkeit und Dampf eintreten. In einigen vorangehenden Abhandlungen (vergl. F. d. M. **29**, 774, 1898 und **30**, 810, 1899) habe ich mittels der Oberfläche ζ die Erscheinungen erörtert, welche man in Systemen mit drei Bestandteilen voraussehen kann, wenn zwei oder mehr flüssige Phasen sich im gegenseitigen Gleichgewicht befinden oder mit festen Phasen. Bisher habe ich aus meinen Betrachtungen die Gegenwart von Dampf ausgeschlossen; in dem Folgenden wollen wir Systeme behandeln, die sich unter dem Drucke ihres eigenen Dampfes befinden. Da der in dieser Sammlung verfügbare Raum zu einer vollständigen Erörterung dieses Problems zu beschränkt wäre, werde ich hier nur eine kurze Skizze von der Art geben, wie die Frage behandelt werden kann; dabei behalte ich mir vor, später die verschiedenen Gesichtspunkte, die sich darbieten werden, mehr im einzelnen durchzuführen." Lp.

A. Ponsot. Loi des modules. Modules thermochimiques. C. R. **131**, 673-675.

Für ein Gemisch von zwei Systemen von Körpern, die so beschaffen sind, dass die Körper des einen diejenigen des anderen durch doppelte Zerlegung hervorbringen können, existiren Moduln der Entropie, des Productes $P_0 V_0$, der inneren Energie, des thermodynamischen Potentials, der specifischen Wärme, die an der äussersten Grenze der Verdünnung den in die Zusammensetzung der gasförmigen Componenten eintretenden Radicalen angehören. Aus diesen Moduln können andere abgeleitet werden. Aus der Betrachtung der inneren Energie leitet der Verf. das Gesetz der thermochemischen Moduln ab: Wenn in der Verbindung AB

lumen auftretende Wärmetönung die Differenz der beiden charakteristischen Zahlen der Radicale C und B und unabhängig von dem Radical A.

Sbt.

A. Ponsot. Sur la chaleur spécifique moléculaire des composés gazeux formés avec condensation. C. R. **131,** 990-992.

Sind C_a, resp. c_a die specifischen Wärmen eines zusammengesetzten Gases a bei constantem Druck, resp. constantem Volumen, C_m, c_m dagegen die specifischen Wärmen des Gemenges m der Bestandteile von a, so ist $C_m - C_a$ stets positiv, $c_m - c_a$ ebenfalls positiv oder gleich Null. Für die Wärmemengen Q, q, die bei der Bildung des Körpers a unter constantem Druck, resp. bei constantem Volumen frei werden, gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial Qm}{\partial T} = C_m - C_a, \quad \frac{\partial q}{\partial T} = c_m - c_a.$$

Einige weitere Folgerungen lassen sich nicht in Kürze wiedergeben.

Wn.

J. J. van Laar. Ueber die Ableitungen des thermodynamischen Potentials nach T und p bei zusammengesetzten Componenten. Arch. Néerl. (2) **5,** 484-496.

Die betreffenden Formeln für die Aenderungen nach T und p bei beliebigen Reactionen, wenn dabei zusammengesetzte Componenten beteiligt sind, wurden zum ersten Male für den weniger allgemeinen Fall, dass die Componenten einheitlich sind, in der Zeitschrift für physikalische Chemie **10,** 242 (1892) vom Verf. hergeleitet, nachdem Planck dieselben schon 1887 für verdünnte Lösungen aufgestellt hatte. In der vorliegenden Abhandlung werden die berühmten Formeln zum ersten Male für den Fall, dass die Componenten zusammengesetzt sind, streng bewiesen. Zum Schlusse wird an einem Beispiele gezeigt, in wie höchst einfacher Weise durch die aufgestellten Relationen verschiedene Aufgaben gelöst werden.

Lp.

T. W. Richards. The driving energy of physico-chemical reaction, and its temperature coefficient. American Ac. Proc. **35,** 471-480.

Die Aehnlichkeit der Gleichungen von Clausius und von van't Hoff: $\frac{d \log n P}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2}$ und $\frac{d \log n K}{dT} = \frac{U}{RT^2}$ hat nach dem Verf. die Veranlassung gegeben, dass sich in viele und gute Darstellungen der physikalischen Chemie verwirrende Irrtümer eingeschlichen haben. Um diese zu beseitigen und namentlich Anfängern nützliche Dienste zu leisten, behandelt der Verf. hier den Gegenstand von einem Gesichts-

punkte aus, dem des Druckes. Die Ergebnisse seiner Arbeit sind folgende: Das Studium des Druckes gewährt eine directere Methode der Analyse des Fortschreitens einer Reaction als das Studium des Volumens, der Concentration oder der Entropie. Ein Ausdruck, den der Verf. „Reactionsmetatherme" nennt, stellt den Temperaturcoefficienten des Gleichgewichtsverhältnisses einer idealen physiko-chemischen Reaction als Function des Druckes dar. Da diese Gleichung in ihrem zweiten Gliede die bei der Reaction entwickelte Wärme enthält, entweder bei constantem Volumen oder bei constantem Druck, so ist sie ein mathematischer Ausdruck des Theorems von Maupertuis oder Le Chatelier. Durch Logarithmirung liefert diese Gleichung die treibende Energie der Reaction. Die Gleichung zeigt ferner, dass die Rolle, die jede Substanz bei einer Reaction spielt, betrachtet werden kann als der Logarithmus des Productes seines physiko-chemischen Potentials und seines wirklich vorhandenen Druckes. Die Reactionsmetatherme kann zu einer Reactionsisobare und einer Reactionsisochore vereinfacht werden, je nachdem der Druck oder das Volumen während der Reaction constant gehalten werden. Während die Reactionsisobare, wenn sie durch Glieder, die den Druck enthalten, ausgedrückt ist, die passendste Basis für die Berechnung der Fälle gewährt, auf die sie anwendbar ist, werden die bei constantem Volumen erhaltenen Resultate zweckmässiger berechnet, wenn die reagirenden Substanzen durch die Concentration nach der Gleichung von van't Hoff ausgedrückt werden. Sbt.

G. N. Lewis. A new conception of thermal pressure and a theory of solutions. American Ac. Proc. **36,** 145-168.

Zum Verständnis aller Arten physiko-chemischen Gleichgewichts ist eine nähere Einsicht nötig in die Natur der Bedingungen, die im Innern einer homogenen Phase existiren. Der Verf. untersucht das Problem im Lichte einer neuen Theorie, die zwar im Widerspruch steht zu einigen allgemein angenommenen Ideen, die sich aber empfiehlt durch ihre Einfachheit und ihre Anwendbarkeit auf gewisse Probleme, die bisher noch keine befriedigende Erklärung gefunden haben.

Die Theorie ergab sich bei der Betrachtung gewisser bemerkenswerter allgemeiner Gesetze, die von einem heterogenen Gleichgewicht handeln, in dem die verschiedenen Phasen verschiedenen Druckkräften unterworfen sind. Der Verf. zeigt, dass diese Gesetze alle erklärt werden können durch eine einzige einfache Annahme, nämlich die Annahme, dass der Wärmedruck irgend einer Phase dem Drucke gleich ist, den die Substanz ausüben würde, wenn sie sich unter denselben Bedingungen wie ein vollkommenes Gas verhielte. Diese Annahme ist auch allein genügend zur Erklärung aller Gesetze der verdünnten Lösungen. Auch andere Consequenzen werden erörtert, speciell in ihrer Beziehung zu der Theorie von van der Waals. Sbt.

L. MARCHIS. Sur les faux équilibres chimiques. Journ. de Phys. (3) **9**, 326-339.

Elementare Darstellung dieser von Duhem begründeten Theorie (vergl. F. d. M. **29**, 770, 1898) für Chemiker. Lp.

W. D. BANCROFT. Reaction velocity and solubility. Arch. Néerl. (2) **5**, 46-48.

Der Einfluss des Lösungsmittels auf die Geschwindigkeit der Reaction ist bis jetzt hauptsächlich der Viscosität zugeschrieben worden. Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes besteht in dem Nachweise, dass die Löslichkeit ein zweiter in Betracht zu ziehender Factor ist. Lp.

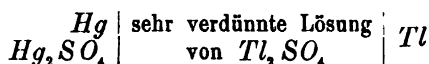
G. TAMMANN. Ueber adiabatische Zustandsänderungen eines Systems, bestehend aus einem Krystall und seiner Schmelze. Ann. der Phys. (4) **1**, 275-289.

Bei adiabatischen Zustandsänderungen eines Systems, das aus einem Krystall und seiner mit ihm im Gleichgewicht befindlichen Schmelze besteht, wird, wie die Untersuchung zeigt, in vielen Fällen das Gleichgewicht nicht merklich gestört. Wenn dies zutrifft, so ergeben sich einige einfache Gleichungen für die thermischen Haupteigenschaften des Krystalls und seiner Schmelze. Diese Gleichungen können durch die Erfahrung geprüft werden, und der Verf. benutzt dazu eine Reihe von Beispielen. Danach wird die Abhängigkeit der Schmelzwärme von der Temperatur und vom Druck und zuletzt die Krümmung der Schmelzcurven untersucht. Sbt.

E. COHEN. 'De experimenteele bepaling der fiktieve oploswarmte. (Eerste Mededeeling). Amst. Versl. **9**, 285-290.

Die „fictive“, theoretische oder ideale Lösungswärme ist die Wärmemenge, die bei der Auflösung eines Salzes in einer gesättigten Lösung auftritt. Sie kann calorimetrisch nicht direct bestimmt werden, wird aber indirect ermittelt durch Bestimmung der „ersten“ Lösungswärme, nämlich der in einer verdünnten Lösung, und durch Benutzung der Verdünnungswärmen. Der Verf. beschreibt hier nun zwei Methoden, nach denen elektrische Messungen zur directen Bestimmung der fictiven Lösungswärme führen. Von ihnen verdient die zweite Methode den Vorzug, weil sie ohne Kenntnis der Ueberführungszahlen auszuführen und darum immer anwendbar ist, während die erste jene Kenntnis voraussetzt und somit nicht immer angewendet werden kann. Wenn nach der zweiten Methode z. B. die fictive Lösungswärme von Thalliumsulfat bestimmt werden soll, so werden die beiden Elemente





gegen einander geschaltet und die elektromotorische Kraft und der Temperaturcoefficient bei T^0 gemessen; bezeichnet dann L_f die fictive und W_1 die erste Lösungswärme, so ist

$$L_f = W_1 - 2\varepsilon_0 \left(E_e - T \cdot \frac{dE}{dT}\right).$$

Sbt.

E. Mathias. Sur deux groupes remarquables de lieux géométriques. C. R. **130**, 1748-1750; Journ. de Phys. (3) **9**, 479-487.

E. Mathias. Remarque sur un travail de M. Amagat. Toulouse Bull. et Mém. 1899/1900, 205-210.

In der Arbeit über die Kohlensäure hat Amagat (Journ. de Phys. (3) **1**, 288, 1892) für die Ebene (p,v) die Curve untersucht, für deren Punkte bei einem der Einheit gleichen Gesamtgewicht von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf das Volumen der Flüssigkeit beständig gleich dem des Dampfes ist. Nach Amagat würde diese Curve nahezu eine zur Abscissenaxe senkrechte Gerade sein. Der Verfasser zeigt, dass sie eine gegen die Abscissenaxe beständig convexe Curve ist, und dass sie unter allen durch die Constanz des Verhältnisses der Volumina definirten Curven die einzige ist, welche die Curve der Sättigung im kritischen Punkte unter einem endlichen Winkel schneidet. Sbt.

S. Young. On the law of Cailletet and Mathias and the critical density. Phil. Mag. (5) **50**, 291-305.

Aus Versuchen an gesättigten Kohlenwasserstoffen höherer Ordnung ergiebt sich, dass das Gesetz, wonach die mittlere Dichte eine lineare Function der Temperatur ist, nur zutrifft in den Fällen, in denen das Verhältnis der wirklichen zur theoretischen Dichte am kritischen Punkt den normalen Wert von 3,77 hat, dass aber ein quadratisches Glied auftritt, wenn dies nicht der Fall ist; und zwar hat dies Glied positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem das Verhältnis grösser oder kleiner ist als 3,77. Br.

E. H. Amagat. Sur les lois des chaleurs spécifiques des fluides. C. R. **130**, 1443-1447; Journ. de Phys. (3) **9**, 417-422.

Die experimentelle Untersuchung der Aenderungen der specifischen Wärme der Gase bereitet Schwierigkeiten, wenn es sich um sehr hohe Druckkräfte handelt. In solchen Fällen sind die für geringere Werte des Drucks ermittelten Grössen und die Beziehungen zu benutzen, die zwischen dem Volumen, dem Druck und der Temperatur der Gase bestehen. Solche Relationen sind:

$$\frac{dc}{dv} = A \cdot T \cdot \frac{d^2 p}{dt^2}, \quad \frac{dC}{dp} = - A \cdot T \cdot \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad C - c = A \cdot T \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Die bisher über diesen Gegenstand ausgeführten Untersuchungen sind noch nicht auf das Gebiet der Netze ausgedehnt worden, in dem der Zustand der Sättigung und der kritische Punkt enthalten sind. Der Verf. hat nun für Kohlensäure die Frage in der ganzen Ausdehnung des von ihm gegebenen Netzes untersucht, d. h. bis zu 1000 Atmosphären zwischen 0 und 260°. In der vorliegenden Mitteilung wird die Anwendung der zweiten der angeführten Gleichungen behandelt. Es ist ein Netz von 43 Linien gleichen Drucks gezeichnet worden, deren Tangenten für 25 Temperaturen mehr als 1000 Werte von $\frac{dv}{dt}$ und demnächst die entsprechenden Werte von $\frac{d^2 v}{dt^2}$ geliefert haben. Die der Mitteilung beigegebene Figur stellt einen Teil der Resultate dar. Darin sind die Druckkräfte (bis zu 200 Atmosphären) als Abscissen und die Werte von $\frac{d^2 v}{dt^2}$ als Ordinaten eingetragen; die Isothermen sind bis zu 100° gezeichnet. Durch blosse Betrachtung der Figur lässt sich nun, wie der Verf. zeigt, eine Anzahl von Gesetzen für die Aenderungen von C bei constanter Temperatur ableiten. Sbt.

H. Moulin. Formules donnant les volumes de vapeur saturée et les tensions maxima. (Extrait). C. R. **130,** 1454-1457.

Den aufgestellten Formeln entsprechen Curven, die für eine Reihe von Substanzen sowohl das Volumen wie die Spannung des Dampfes in befriedigender Uebereinstimmung mit den empirischen Resultaten darstellen. Der Verf. schliesst daraus, dass es für eine beliebige Substanz, deren kritische Elemente man kennt, genügt, den Wert des Volumens, resp. des Druckes des gesättigten Dampfes für irgend eine Temperatur zu bestimmen, um daraus die Curve und damit die verschiedenen Werte für jede Temperatur zu erhalten. Sbt.

H. Moulin. Vérification de deux formules donnant les volumes de vapeur saturée et les tensions maxima en fonction de la température. Journ. de Phys. (3) **9,** 390-394.

Vgl. das vorangehende Referat.

P. Juliusburger. Ueber das Dupré-Rankine'sche Dampfspannungsgesetz. Ann. der Phys. (4) **3,** 618-659.

Das Gesamtergebnis der eingehenden Bearbeitung der in Betracht

kommenden theoretischen und experimentellen Untersuchungen wird, wie folgt, zusammengefasst. „Die verschiedenen Ableitungen des Rankine'schen Gesetzes haben gleichen Wert und weisen grösstenteils auf eine gemeinsame Quelle. Das Gesetz besitzt theoretische Gültigkeit nur für sehr niedere Spannungen, für welche der Mariotte'sche Satz als erfüllt betrachtet werden darf, dagegen empirische Berechtigung und praktische Brauchbarkeit weit darüber hinaus, für einzelne Substanzen sogar bis zum kritischen Punkt. Es ist als Dampf- wie als Dissociationsspannungsformel verwendbar und leistet im ersten Falle bei Reihen von mässigem Umfang sogar noch als Formel mit zwei unbestimmten Constanten gute Dienste." Sbt.

O. Reynolds. **An experimental investigation of the thermodynamical properties of superheated steam. — On the cooling of saturated steam by free expansion.** Lond. Phil. Trans. **194** A, 1-36.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Ermittelung der Veränderungen der thermodynamischen Eigenschaften, insbesondere des Trockenheitsgrades, die Dampf beim Durchgang durch eine Drosselstelle erfährt. Der Abkühlungscoefficient, d. h. das Verhältnis der Temperaturänderung zur Druckänderung, erweist sich als etwa umgekehrt proportional der 3,8 ten Potenz der Temperatur, während Joule und Thomson auf die zweite Potenz gekommen waren. Für diesen Abkühlungscoefficienten C wird zum Schluss folgende Beziehung abgeleitet, in der p den Druck, K_p die specifische Wärme bei constantem Druck und T die absolute Temperatur bedeuten: $\frac{\partial}{\partial p}(K_p) = -\frac{\partial}{\partial T}(CK_p)$. Wenn K_p vom Druck p unabhängig ist, welche Bedingung aber bei Dampf nicht erfüllt ist, ergiebt sich hieraus die Gleichung: $p(v+CK_p) = RT$, wo R und v die übliche Bedeutung haben. Br.

J. H. Grindley. **An experimental investigation of the thermodynamical properties of superheated steam. — On the cooling of saturated steam by free expansion.** Lond. Phil. Trans. **194** A, 1-36. Abstract: Lond. R. S. Proc. **66**, 79-85.

Das Mathematische beschränkt sich auf den Beweis des Satzes, dass das Product einer als Abkühlungseffect bezeichneten Grösse c und der specifischen Wärme K_p, die praktisch als vom Druck p unabhängig vorausgesetzt wird, in Bezug auf die Temperatur constant ist. Die Grösse c ist dabei, wenn τ die absolute Temperatur und v das Volumen bedeuten, definirt durch die Differentialgleichung: $d\tau/\tau = dv/(v+cK_p)$.
Br.

vapours as deduced from a modified form of the Joule-Thomson equation with special reference to the properties of steam. Lond. R. S. Proc. **67**, 266-286.

Die Joule-Thomson'sche Formel: $v = R\vartheta/p - a/R\vartheta^2$ wird in der modificirten Form aufgestellt: $v - b = R\vartheta/p - c^0(\vartheta^0/\vartheta)^n$. Hierbei bedeuten v das Volumen des Gases oder Dampfes, b das Volumen, welches das Gas oder der Dampf als Flüssigkeit einnehmen würde, ϑ die absolute Temperatur, a und R Constanten, n den Grenzwert der specifischen Wärme bei constantem Volumen dividirt durch R und ϑ^0 die absolute Temperatur des schmelzenden Eises. Die hieraus abgeleiteten Formeln für die verschiedenen in Betracht kommenden Grössen sollen sich den Beobachtungen besser anschmiegen. Br.

H. A. Wilson. On the velocity of solidification and viscosity of supercooled liquids. Phil. Mag. (5) **50**, 238-250.

Betrifft Versuche, nach denen die Geschwindigkeit der Erstarrung einer unterkühlten Flüssigkeit der Viscosität umgekehrt proportional ist. Br.

W. A. Tilden. The specific heats of metals and the relation of specific heat to atomic weight. Lond. Phil. Trans. **194** A, 233-250.

J. Perry. Appendix. Ibid. 250-255.

Die erste Arbeit enthält die experimentelle Bestimmung der specifischen Wärme einer Anzahl von Metallen bei verschiedenen Temperaturen, die das Gesetz von der Constanz der specifischen Atomwärme bestätigen. Die zweite leitet eine empirische Formel für die Abhängigkeit der specifischen Wärme von der Temperatur ab, in der Form: $k = k_0 + bt^n/(1 + ct^n)$, wo n von der Natur des Metalles abhängt und für Nickel = 2,68, für Kobalt = 2,73 ist. Br.

M. Cantone e G. Contino. Sulla dilatazione termica del caucciù. Lomb. Ist. Rend. (2) **33**, 215-226.

Der kubische Ausdehnungscoefficient des Kautschuks α wird gleich $\lambda + 2\lambda'$ gesetzt, wo λ und λ' die linearen Ausdehnungscoefficienten in der Längs- und Querrichtung bezeichnen; die Verlängerungen in jeder Richtung werden für den Uebergang von L_1 zu L_2 und von D_1 zu D_2 gleich $\frac{2(L_2 - L_1)}{L_2 + L_1}$, resp. $\frac{2(D_2 - D_1)}{D_2 + D_1}$ angenommen. In Tabellen werden die Resultate der Experimentaluntersuchungen mitgeteilt; die äussersten Grenzen, zwischen denen die verschiedenen für α erhaltenen Werte danach liegen, sind $274 \cdot 10^{-6}$ und $589 \cdot 10^{-6}$.

Weitere Untersuchungen zeigten, wie mit wachsender Temperatur der Elasticitätsmodul E und der Poisson'sche Coefficient μ wachsen. Die Werte von α, die sich aus diesen Untersuchungen für die Belastungen 8,4 und 7,9 kg ergaben, waren $463.\ 10^{-6}$ und $516.\ 10^{-6}$. Sbt.

JUPPONT. **Note mathématique sur le travail musculaire.** Toulouse Bull. et Mém. 1899/1900, 370-385.

Laulanié hat in der Schrift „l'Énergétique musculaire" den Zweck verfolgt: 1. die merkwürdigen Resultate Chauveau's über die Elasticität und die Arbeit der Muskeln zu einem Lehrgebäude zu vereinigen, 2. die beobachteten Thatsachen und die aufgestellten Gesetze in algebraische Gleichungen umzusetzen. Die gegenwärtige Note will einige Bemerkungen bezüglich dieser Gleichungsansätze entwickeln und ein neues Verfahren hierbei vorschlagen, das mehr ins Einzelne geht, den Thatsachen mehr entspricht und mit den Principien der Thermodynamik besser in Einklang steht. Lp.

HEYDENREICH. **Neue Methoden zur Berechnung des Verlaufes der Gasdruckcurven in Geschützrohren.** Kriegstechn. Zeitschr. **3**, 287-299, 334-356.

W. ELMAR. **Die Gesetze der Drucke in den Feuerwaffen von E. Vallier.** Mitt. über Art. u. Genie **31**, 113-117.

In dem zweiten Aufsatze wird der Inhalt der beiden Noten aus den C. R. von E. Vallier wiedergegeben, über welche in F. d. M. **30**, 816, 1899, berichtet ist. Der erste Artikel nimmt auf eine ausführliche Veröffentlichung von E. Vallier Bezug: „Sur la loi des pressions dans les bouches à feu", die in der „Corrispondenza" von Livorno 1899 erschienen ist, und aus der die Noten in den C. R. offenbar Auszüge sind. Heydenreich begnügt sich aber nicht mit einer einfachen Inhaltsangabe, sondern er giebt kritische Betrachtungen und erweiternde Zusätze nebst Zahlenbeispielen für die deutschen Geschütze. Lp.

A. INDRA. **Experimentelle Untersuchungen über die Spannungsverhältnisse der Pulvergase in Geschützrohren.** Mitt. üb. Art. u. Genie **31**, 841-887, 967-1003.

„Die Hauptursache unserer Unkenntnis über das rauchschwache Pulver liegt darin, dass wir auch über die eigentlichen Vorgänge beim Schwarzpulver nicht besonders unterrichtet sind. Und wenn nun die charakteristischen Erscheinungen bei der Kraftäusserung des rauchschwachen Pulvers in höherem Masse hervortreten als beim Schwarzpulver, so kommen sie als unbekannte, noch nicht erforschte Vorgänge in die Erscheinung, während sie beim Schwarzpulver infolge der ge-

ringeren Intensität bisher überhaupt unbeachtet, aber auch unbekannt geblieben sind. Den Nachweis hierfür erbringe ich durch die folgenden Untersuchungen, indem ich durch die wissenschaftliche Verwertung vorhandener Versuche ganz neue Eigenschaften des Schwarzpulvers darlege, welche qualitativ vollkommen, quantitativ in erhöhtem Masse auch dem rauchschwachen Pulver zukommen.

Hierbei leitete mich die Erkenntnis, dass alle Naturvorgänge sich mehr oder weniger (abstract bezeichnet) in Form von Fourier'schen Reihen abspielen, oder, geometrisch ausgedrückt, dass Naturprocesse niemals längs einer vollkommen continuirlichen Curve, sondern im allgemeinen von gezackter Form verlaufen werden. Das ist ganz besonders anzunehmen bei den enormen Stossreactionen der Explosionserscheinungen, also beim Schusse aus Geschützen und Gewehren. Indem es mir gelungen ist, den a priori wellenförmig vorausgesetzten Verlauf der Erscheinung beim Schusse durch die Interpretation ganz alter Versuchsreihen experimentell nachzuweisen und daraus gleichzeitig praktisch verwertbare Schlüsse zu ziehen, habe ich die Grundlage für eine zukünftige theoretische Behandlung der Schussphänomene gegeben, für welche ich voll und ganz die Priorität in Anspruch nehme.“ Lp.

Weitere Litteratur.

E. H. Amagat. Statique expérimentale des fluides (fluides non mélanges). Rapports Congr. intern. Phys. **1,** 551-582.

J. D. van der Waals. Statique des fluides (mélanges). Ibid. 583-614.

E. Mathias. Les méthodes de détermination des constantes critiques, et les résultats qu'elles ont fournis. Rapports Congr. intern. Phys. **1,** 615-667.

Prince B. Galitzine et J. Wilip. L'indice critique. Ibid. 668-681.

L. Boltzmann und Mache. Ueber die Bedeutung der Constante b des van der Waals'schen Gesetzes. Cambr. Trans. **18,** 35-90.

E. Buckingham. An outline of the theory of thermodynamics. New York: The Macmillan Company. XI + 205 S. [Nature **63,** 269-270.]

Ch. M. A. Hartman. Over de condensatie-verschijnselen bij mengsels in de nabijheid van den kritischen toestand. Amst. Versl. **9,** 60-64.

H. Kammerlingh Onnes et M. Reinganum. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van Van der Waals. Amst. Versl. **9,** 213-223.

J. C. Schalkwijk. Nauwkeurige Isothermen. I. Metingen en berekeningen over de correctie voor het volume van den kwikmeniscus bij standaard gasmanometers. Amst. Versl. **9,** 462-477.

Wird erst im nächsten Jahrgange beendigt.

J. D. van der Waals. Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Tl. Binäre Gemische. Leipzig: J. A. Barth. VII + 192 S. 8°.

J. D. van der Waals. Eigenschappen der drucklijnen voor coëxisteerende phasen van mengsels. Amst. Versl. **9**, 166-180.

J. D. Van der Waals Jr. Vergelijkingen waarin functies voorkomen voor verschillende waarde der onafhankelijk veranderlijke. Amst. Ak. Versl. **8**, 638-651.

E. Warburg. Referat über die Wärmeeinheit, erstattet in der gemeinschaftlichen Sitzung der Sectionen für Physik und angewandte Mathematik und Physik am 22. September 1899 auf der Naturforscherversammlung in München. Leipzig: J. A. Barth. 19 S. gr. 8°.

G. Zeuner. Technische Thermodynamik. 2. Aufl. Zugleich 4. Aufl. der „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 1. Band. Fundamentalsätze der Thermodynamik. Lehre von den Gasen. Leipzig: A. Felix. XVI + 436 S. gr. 8°.

B. Gastheorie.

G. Lippmann. La théorie cinétique des gaz et le principe de Carnot. Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 546-550.

Lord Rayleigh. The law of partition of kinetic energy. Phil. Mag. (5) **49**, 98-120.

S. H. Burbury. The law of partition of kinetic energy. Phil. Mag. (5) **49**, 226-228; **50**, 584-595.

Lord Rayleigh giebt, im wesentlichen mit Hülfe der für diese Zwecke bekannten Aufstellungen, ausgehend von einem Beispiel zweidimensionaler Beweglichkeit materieller Teilchen, eine neue Entwickelung des Gesetzes, wonach in einem stationären System kinetisch bewegter Massenteilchen die durchschnittliche kinetische Energie aller Teilchen gleich ist. Burbury macht in der ersten Arbeit darauf aufmerksam, dass die Ungeordnetheit des Systems eine Bedingung des Gesetzes ist, und dass die Entwickelung Lord Rayleigh's stillschweigend einschränkende Voraussetzungen macht. In der zweiten Arbeit giebt er eine Reihe von Entwickelungen und Ueberlegungen, um nachzuweisen, dass sowohl die Maxwell-Rayleigh'schen, wie die Boltzmann'schen Ableitungen des Gesetzes unzulänglich sind, und dass überhaupt das Gesetz im allgemeinen falsch und nur bei stark verdünnten Gasen annähernd erfüllt ist. Br.

Mag. (5) **49**, 475-486.

An der Hand eines Beispiels, das ein System gleicher Kugeln von anfänglich streng zufällig verteilter Bewegung betrifft, wird der Einfluss eines Irreversibilitätsfactors in Form einer wachsenden oder abnehmenden Function H untersucht, und einzeln discutirt, welchen Einfluss Steigen oder Fallen der Function auf den Bewegungsvorgang hat, und durch welche Factoren dieser Einfluss modificirt wird. Den Schluss bildet eine Bezugnahme auf ein kürzlich publicirtes Werk des Verf. über kinetische Gastheorie (F. d. M. **30**, 818, 1899), in dem bewiesen sein soll, dass bei endlichen Moleculardurchmessern das Zufallverteilungsgesetz der Geschwindigkeiten keine stabile Bewegung ergebe, und ein kurzer Abriss der hierauf bezüglichen Formeln. Br.

ZEMPLÉN GYÖZÖ. Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie. Ann. der Phys. (4) **2**, 404-413; **3**, 761-763.

S. H. BURBURY. Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie. Ann. der Phys. (4) **3**, 355-365.

Burbury hat in seinem 1899 erschienenen Buche „A treatise on the kinetic theory of gases“ den Versuch gemacht, die Gastheorie von der Grundhypothese zu befreien, der nach Boltzmann's Ausdruck ein „molecular ungeordneter“ Zustand entspricht. Er hat dann aus einer „Annahme A“, die mit jener Grundhypothese im wesentlichen übereinstimmt, Widersprüche abgeleitet und zu zeigen gesucht, dass die ältere Gasthoerie unhaltbar sei. Dem gegenüber wird hier von Zemplén Győző geltend gemacht und durch mathematische Untersuchung begründet, dass jene Widersprüche nur scheinbar sind.

Burbury giebt zu, dass er Veranlassung zu solchen Einwendungen geboten habe, glaubt aber durch eine befriedigende Aufklärung die Einwände entkräften zu können. Zemplén Győző ist indessen von der erhaltenen Aufklärung nicht befriedigt. Sbt.

Lord RAYLEIGH. On a theorem analogous to the virial theorem. Phil. Mag. (5) **50**, 210-213.

Die Molecüle eines schwer compressiblen (viscosen) Gases werden als ein statisches Gittersystem aufgefasst mit Verbindungen, die auf Zug, und Verbindungen, die auf Druck beansprucht werden. Aus dieser Analogie ergiebt sich gemäss dem Maxwell'schen Theorem für den Gleichgewichtszustand eines solchen Systems ein entsprechendes Gesetz, das dem Virialgesetz für den hydrostatischen Druck homolog ist.

Br.

L. Boltzmann. **Notiz über die Formel für den Druck der Gase.** Arch. Néerl. (2) **5**, 76-77.

Ankündigung einer Arbeit, deren Vollendung von der mühsamen Auswertung von Integralen abhängt. Lp.

M. Reinganum. **Ueber die moleculare Anziehung in schwach comprimirten Gasen.** Arch. Néerl. (2) **5**, 574-582.

Nachtrag zu der Dissertation des Verf. (Fortschr. d. Phys. **55**$_2$, 253-254, 1899). Es handelt sich um das Glied des Virials der Anziehungskräfte. Die Clausius'sche Virialgleichung wird zunächst in die Form umgerechnet:

$$p+P_i=\frac{RT}{v}\left(1+\frac{be^{\frac{c}{T}}}{v}\right),$$

und dann wird nach dem Vorgange von Boltzmann (Gastheorie **2**, 155-156) in kinetischer Ableitung gefunden:

$$P_i=\frac{Rbc}{v^2}\left[\ln c-\ln T+\frac{c}{T}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2}\frac{c^2}{T^2}+\cdots\right],$$

ein Resultat, das hierauf auch aus thermodynamischen Betrachtungen gefolgert wird. Lp.

A. Battelli. **Il calore specifico dei gas.** Nuovo Cimento (4) **12**, 300-314.

Es wird hier ein Auszug aus dem Bericht gegeben, den der Verf. dem internationalen Physiker-Congress über alle die specifische Wärme der Gase behandelnden Arbeiten gegeben hat. Man erhält einen interessanten Ueberblick über die Untersuchungen, welche die Abhängigkeit der beiden specifischen Wärmen der Gase vom Druck und von der Temperatur zum Gegenstande haben, über die Arbeiten, welche die specifische Wärme der Dämpfe und die moleculare specifische Wärme behandeln, über die Messungen des Verhältnisses c_p/c_v und die Untersuchung der Veränderlichkeit dieses Verhältnisses bei Aenderungen des Druckes und der Temperatur. Sbt.

A. Battelli. **La chaleur spécifique des gaz.** Rapports Congr. intern. Phys. **1**, 682-696.

K. Tsuruta. **Thermodynamic notes. (Nr. VII): On the specific heats of air. (Nr. VIII): On the specific heats of hydrogen.** Tokio Math. Ges. **8**, 135-151, 153-161.

Ausgehend von Witkowski's Arbeiten (Phil.Mag. **41** und **42**, 1896) über die thermischen Eigenschaften der Luft bei niedrigen Temperaturen,

Temperaturen (bis zu 100°) zu bestimmen. Er giebt die Zustandsgleichung für das Temperaturintervall — 35° bis + 100° in der Form:

$$p = \left(\frac{1}{v-a} - \frac{b}{v^2}\right) \cdot \left\{R \cdot T + \frac{\lambda}{v}(T - T_0)\right\}.$$

Hier ist $a = 0{,}00163$, $b = 0{,}00254$, und λ, eine Function des Drucks und der Temperatur, ist für das in Frage kommende Intervall gleich 0,00001. Danach wird der Wert von c_p für die Temperaturen — 35°, 0°, 16°, 50°, 70° und 100° und für Druckkräfte von 10, 20, · · ·, 100 Atmosphären berechnet, und die Resultate werden in Curven dargestellt. Ferner werden c_v und c_p/c_v berechnet; c_v wird für alle Temperaturen und Druckkräfte constant, gleich 0,169. — Endlich werden auf Grund der Versuche von Amagat (Ann. de chim. et phys. **6**, 29, 1893) die Werte von c_p für hohe Druckkräfte berechnet; die Ergebnisse werden für die Temperaturen 0°, 15,7°, 99,4° und für eine Reihe von Druckkräften von 100 bis 970 Atmosphären in Tabellen zusammengestellt.

Die Untersuchung der specifischen Wärmen des Wasserstoffs knüpft an die Arbeiten von Wroblewski (Wien. Ber. **97**, 1888) an. Es wird eine Formel gegeben, die c_v in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichtigkeit darstellt. Danach muss die specifische Wärme mit wachsender Dichte zunehmen und mit steigender Temperatur abnehmen, während Joly aus seinen Experimentaluntersuchungen das Gegenteil geschlossen hatte. Die Werte von c_p und c_p/c_v werden für eine Reihe von Temperaturen und Druckkräften berechnet. Endlich legt der Verf. wieder die Arbeiten von Amagat (s. o.) zu Grunde und berechnet danach die specifischen Wärmen für hohe Druckkräfte. Sbt.

G. Jäger. Ueber den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase. (II. Mitt.) Wien. Ber. **109**, 74-80.

Die Fortsetzung der früher begonnenen Untersuchungen (Wien. Ber. **108**, 447ff.; s. F. d. M. **30**, 821, 1899) führt unter der Voraussetzung, dass die Moleculargeschwindigkeit für alle Molecüle die gleiche sei, auf folgende Formel für den Reibungscoefficienten:

$$\eta = \eta_0\left(1 + \frac{11}{2} \cdot \frac{b}{v}\right)$$

für mässige Verdichtungen (η_0 gilt für verdünnte Gase), und für jede beliebige Dichtigkeit:

$$\eta = \eta_0\left(\frac{1}{A} + \frac{8b}{v} + 16A \cdot \frac{b^2}{v^2}\right),$$

wobei $A = 1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{b}{v} + \cdots$ ist. Sbt.

J. LARMOR. On the statistical dynamics of gas theory as illustrated by meteor swarms and optical rays. Nature 63, 168-169.

Vortrag vor der British Association in Bradford, 1900. Wenn ein Meteorschwarm sich unter der Einwirkung der eigenen gegenseitigen Anziehungen und äusserer conservativer Kräfte bewegt, und wenn man von irgend einem Punkte Vectoren gleich und parallel den Geschwindigkeiten der Meteore zieht, so bleibt das Product des Volumens, das durch die Endpunkte dieser Vectoren abgesteckt wird, in das von den Meteoren selbst eingenommene Volumen bei der ganzen Bewegung constant. Hieraus werden Folgerungen gezogen, die zu den Sätzen der kinetischen Gastheorie führen. Lp.

M. BRILLOUIN. La diffusion des gaz sans paroi poreuse dépend-elle de la concentration? Rapports Congr. intern. Phys. 1, 512-531.

J. PERRIN. Osmose. Parois semi-perméables. Rapports Congr. intern. Phys. 1, 531-545.

F. G. DONNAN. The relative rates of effusion of argon, helium and some other gases. Phil. Mag. (5) 49, 423-446.

Die Ausströmung von Gasen durch enge Oeffnungen wird bei Argon, Wasserstoff, Sauerstoff und Kohlenoxyd als übereinstimmend mit der Theorie gefunden, die den Process als adiabatisch annimmt, nicht dagegen bei Kohlensäure und Helium. Die Darstellung der Abweichung dieser Gase gelingt indessen, wenn man den Joule-Thomson-Effect mit heranzieht. Der Einfluss dieses Effects auf den einfach adiabatischen Process wird theoretisch entwickelt. Br.

S. R. COOK. Escape of gases from planetary atmospheres. Nature 62, 54.

G. J. STONEY. Escape of gases from atmospheres. Nature 62, 78-79.

G. H. BRYAN. The kinetic theory of planetary atmosphere. Nature 62, 126.

G. J. STONEY. Note on inquiries as to the escape of gases from atmospheres. Nature 62, 359-360.

Wegen des Fehlens von Helium in der irdischen Atmosphäre wird die Frage des Entweichens eines Gases aus derselben nach der kinetischen Gastheorie behandelt. Lp.

J. D. VAN DER WAALS. Afkoeling van een gasstroom bij plotselinge drukverandering. Amst. Ak. Versl. 8, 441-451.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

E. GRÜNEISEN. Ueber die Bestimmung des metallischen Wärmeleitvermögens und über sein Verhältnis zur elektrischen Leitfähigkeit. Ann. der Phys. (4) **3**, 43-74.

Wird die Grenzfläche $x=0$ eines cylindrischen Metallstabes von einem bestimmten Augenblick an durch Wasser von der Temperatur ϑ_0 bespült, so entsteht eine Wärmebewegung, für welche die folgende Differentialgleichung gilt:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=k^2\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}-f\vartheta.$$

ϑ ist die Temperatur zur Zeit t in der Entfernung x von der Endfläche; es ist $k^2=\frac{\lambda}{c\cdot\varrho}$, $f=\frac{4h}{c\cdot\varrho\cdot d}$, und λ bedeutet das Wärmeleitvermögen, h die äussere Leitungsconstante, d den Durchmesser des Stabes, ϱ die Dichte, c die specifische Wärme. Eine Lösung der Differentialgleichung ist, wenn $U(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_z^\infty e^{-q^2}dq$ gesetzt wird:

$$\vartheta=e^{-f\cdot t}\cdot\vartheta_0\cdot U\left(\frac{x+\xi}{2k\sqrt{t}}\right).$$

ξ hängt mit einer Constante g durch die Gleichung $k=g(x+\xi)$ zusammen.

Die Temperatur ϑ wurde mit Hülfe von Thermoelementen gemessen. Durch mindestens zwei, besser aber eine grössere Anzahl von Messungen ergeben sich Wertepaare von x und g, aus denen nach der Methode der kleinsten Quadrate k berechnet werden kann.

Untersucht wurden Eisen- und Kupferstäbe und eine Nickel-Kupfer-Legirung. Speciell sollte der Einfluss von Verunreinigungen festgestellt werden. Es zeigte sich, dass das Leitvermögen für Elektricität stärker durch fremde Beimischungen vermindert wird als das für Wärme. — Die Resultate sind in ausführlichen Tabellen zusammengestellt. Sbt.

E. COTTON. Mouvement de la chaleur sur la surface d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales. Toulouse Ann. (2) **2**, 308-316.

Die Arbeiten von H. A. Schwarz über die conforme Abbildung der Polyeder schliessen die Lösung des Problems des Temperaturgleichgewichtes für eine leitende polyedrische Oberfläche ein, wenn die Wärme durch eine endliche Zahl von Punkten nach einem bestimmten Gesetze ein- und austritt. Der Verf. formulirt nun, indem er die Frage verallgemeinert, das Problem der Bewegung der Wärme auf einer geschlossenen leitenden Oberfläche von polyedrischer Gestalt und zeigt dann zunächst, dass das Problem höchstens eine Lösung zulässt. Wenn die Oberfläche ein

Tetraeder ist, dessen gegenüberliegende Kanten einander gleich sind, so lässt sich die Existenz einer Lösung nachweisen. Die Frage kann in diesem besonderen Falle zurückgeführt werden auf das Studium der Bewegung der Wärme auf einer unbegrenzten leitenden Ebene, wo die Temperatur beständig gewissen Symmetriebedingungen unterworfen ist. Der Verf. bestimmt Functionen, die, von der Zeit unabhängig, den fundamentalen harmonischen Functionen von Poincaré analog sind. Diese Functionen dienen zur Reihenentwickelung der Function, welche die Anfangstemperatur darstellt. Daraus ergiebt sich die Lösung des Problems durch eine Reihe, die analog ist der von Fourier für das Problem von l'Armille gegebenen Reihe. Sbt.

W. Stekloff. Le problème des températures stationnaires. C. R. **131,** 608-610.

Es handelt sich um die Lösung des Problems: eine Function v der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z zu finden, die mit ihren ersten und zweiten Derivirten im Innern einer gegebenen Oberfläche (s) continuirlich ist und im Innern von (s) der Gleichung $\Delta v + \varphi = 0$, auf (s) aber der Bedingung $\frac{\partial v_i}{\partial n} + h \cdot v = 0$ genügt. φ ist eine gegebene continuirliche Function, die im Innern von (s) erste Derivirte hat; h ist eine positive Constante, n die Richtung der inneren Normale von (s). Der Verf. löst das Problem, indem er sich auf seine früheren Untersuchungen über das Neumann'sche Problem und die Methode von Robin stützt. Die Function v wird in der Form gegeben:

$$v = v_0 + h \cdot v_1 + h^2 \cdot v_2 + \cdots + h^k \cdot v_k \cdots,$$

wo die v_k Functionen von x, y, z sind. Sbt.

J. Boussinesq. Réduction de certains problèmes d'échauffement ou de refroidissement par rayonnement, au cas plus simple de l'échauffement ou du refroidissement des mêmes corps par contact; échauffement d'un mur d'épaisseur indéfinie. C. R. **130,** 1579-1583.

Der Verf. stellt die Theorie auf, dass eine Function

$$\varphi = f + G \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + H \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + I \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

existirt, die für den Fall der Erwärmung oder Abkühlung durch Strahlung identische oder wenigstens analoge Gleichungen erfüllt wie für den Fall der Temperaturänderungen durch Leitung. Es lässt sich demnach φ für den Fall der Strahlung bestimmen, wenn man die Temperatur für den Fall berechnen kann, wo die beiden Wärme austauschenden Körper sich berühren. Die Temperatur ist durch Integration einer linearen

Ausdruck enthält ein vielfaches Integral von einer um 1 höheren Ordnung als der Ausdruck für φ.

Von den vier Beispielen, auf die der Verf. seine Theorie anwenden will, behandelt er hier nur das eine: das der Erwärmung einer Mauer von unbestimmter Dicke. Sbt.

J. Boussinesq. Problème du refroidissement de la croûte terrestre, traité au même point de vue que l'a fait Fourier, mais par une méthode d'intégration beaucoup plus simple. C. R. **130,** 1652-1658.

Die in der vorher erwähnten Abhandlung entwickelte Methode wird hier auf das Fourier'sche Problem der Erkaltung der Erdkruste angewandt. Sbt.

J. Boussinesq. Problème du refroidissement d'un mur par rayonnement, ramené au cas plus simple où le refroidissement aurait lieu par contact. C. R. **130,** 1731-1736.

Das am Schluss der ersten Abhandlung untersuchte Problem wird hier etwas allgemeiner behandelt. Eine Mauer von unbestimmter Dicke hat zur Zeit $t = 0$ gegebene Temperaturen $f(x)$ von der Fläche $x = 0$ bis zu der Grenze $x = \infty$, Temperaturen, die willkürlich sind, aber für $\lim x = \infty$ einer Constante u_0 zustreben. Die durch Abkühlung nach der Zeit t entstandene Temperatur wird durch die Formel ausgedrückt:

$$u = \frac{2 \cdot u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2} d\omega + e^{a^2h^2t + hx} \int_{ah \cdot \sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right) \cdot$$

Sbt.

J. Boussinesq. Échauffement permanent mais inégal, par rayonnement, d'un mur d'épaisseur indéfinie, ramené au cas d'un échauffement analogue par contact. C. R. **131,** 9-13.

J. Boussinesq. Problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement, ramené au problème plus simple de l'échauffement de la même sphère par contact. C. R. **131,** 81-86.

Der Verf. wendet seine in der ersten Abhandlung entwickelte Methode hier auf zwei Beispiele von permanenter Erwärmung an. Die äussere Temperatur ist jetzt als veränderlich mit den Coordinaten y, z parallel der Oberfläche der Mauer anzunehmen; die innere Temperatur u wird also von x, y und z abhängen. Der Verf. findet:

$$u = \frac{h}{2\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-h\zeta} d\zeta \int_\sigma \frac{f(b,c)(x+\zeta)d\sigma}{[(x+\zeta)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(σ ist ein begrenztes Gebiet der Ebene der y, z).

Das zweite Beispiel betrifft die permanenten Temperaturen einer homogenen Kugel, deren Oberfläche gegen Räume ausstrahlt, die ihre unveränderliche, für jeden Punkt (a, b, c) der Oberfläche gegebene Temperatur haben. Es wird

$$u = u_c + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^1 (R^2 - r^2\mu^2) \frac{d\mu}{\mu} \int_\sigma \frac{U d\sigma}{(R^2 - 2Rr\mu \cos\Theta + r^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sbt.

B. O. Peirce. On the thermal conductivity of vulcanite. Phil. Mag. (5) **49**, 15-31.

Die Arbeit beschäftigt sich fast ausschliesslich mit Versuchen. In mathematischer Beziehung kommen bloss die Formeln für den Wert der Temperatur als Function des Ortes in den beiden folgenden Specialfällen in Betracht. Beim ersten Fall werden die beiden Endflächen eines Kreiscylinders und ebenso der Mantel auf constanten, aber verschiedenen Temperaturen gehalten, und der Cylinder besteht aus homogenem Material; beim zweiten Fall ist die Temperatur der einen Endfläche und des Mantels gleich, und der Cylinder besteht aus drei auf einander liegenden Stücken von verschiedener Leitungsfähigkeit. Die Lösungen, die in beiden Fällen ohne Ableitungen gegeben werden, führen auf hyperbolische und Bessel'sche Functionen.

Br.

Ch. H. Lees. On the thermal conductivities of mixtures and of their constituents. Phil. Mag. (5) **49**, 286-293.

Für die Abhängigkeit des Wärmeleitungscoefficienten k einer Mischung aus p_1 Massenteilen einer Substanz vom Wärmeleitungscoefficienten k_1 und p_2 Massenteilen einer Substanz vom Wärmeleitungsvermögen k_2 sind die folgenden drei Formeln aufgestellt: $(p_1 + p_2) k = p_1 k_1 + p_2 k_2$; $(p_1 + p_2)/k = p_1/k_1 + p_2/k_2$; $(p_1 + p_2) \lg k = p_1 \lg k_1 + p_2 \lg k_2$. Der Verf. teilt Versuche mit, wonach die erste Formel am schlechtesten, die letzte relativ am besten, aber auch noch schlecht stimmt. Eine befriedigende Darstellung der Versuche gelingt nur durch die Formel: $(p_1 + p_2) k^n = p_1 k_1^n + p_2 k_2^n$.

Br.

L. Holborn und W. Dittenberger. Ueber den Wärmedurchgang durch Heizflächen. Mitteilung aus der Phys.-Techn. Reichsanstalt. Zeitschr. deutscher Ing. **44**, 1724-1727.

Die Versuche der Verf. haben das Vorhandensein eines specifischen Temperatursprunges an der Grenze zwischen Heizfläche (Metallwandung)

und siedendem Wasser ergeben. Man kann daher von einem Uebergangswiderstande sprechen und denselben durch die Dicke einer äquivalenten Metallschicht beschreiben, welche denselben Temperatursprung bewirken würde. Diese Dicke beträgt, wenn man Eisen als Material der Vergleichsschicht wählt, nach den Beobachtungen der Verf. im Mittel 0,5 cm. Durch den Bewegungszustand des Wassers wird der Uebergangswiderstand beeinflusst; zu erklären ist er wahrscheinlich durch eine an der Wandung haftende Dampf- oder Wasserschicht. A. S.

J. Larmor. On the relations of radiation to temperature. Nature **68**, 216-218.

Vortrag vor der British Association zu Bradford, enthaltend einen Ueberblick über die neueren bezüglichen Arbeiten. Lp.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

J. Adamczik. Compendium der Geodäsie. Leipzig u. Wien; F. Deuticke. VIII u. 516 S. 8° (1901).

Der Titel dieses Buches verspricht insofern zu viel, als es nur einen Abriss der niederen Geodäsie enthält, wie der Verf. im Vorwort übrigens selbst im allgemeinen zugiebt. Indessen hätten auch die Kapitel, die nach des Verf. Ansicht Gebiete der höheren Geodäsie behandeln — wie z. B. über das Heliotrop, die Comparatoren, den Spiegelsextanten, über Soldner'sche und conforme Coordinaten u. s. w. —, zumal mit Rücksicht auf ihren knappen Inhalt, in einem Lehrbuch der niederen Geodäsie schon des allgemeinen Verständnisses wegen kaum ganz fehlen dürfen. Als Compendium der niederen Geodäsie kann man das Buch aber wohl empfehlen. Seinem Charakter entsprechend bringt es keine vollständige Darstellung des Gegenstandes, aber doch überall die gebräuchlichsten und am meisten vorkommenden Beobachtungs- und Rechnungsmethoden. Die Kapitel über die Beschreibung und Anwendung der Instrumente sind klar und einfach abgefasst. Sehr erleichtert wird das Verständnis durch die grosse Anzahl (329) Figuren. Die typischen Darstellungen der Instrumente und ihrer Teile werden durch Abbildungen ausgeführter Instrumente, besonders aus den Werkstätten von L. Tesdorpf in Stuttgart und Starke & Kammerer in Wien, ergänzt. Obgleich bei der Betrachtung der praktischen Feldmessarbeiten, wie es als selbstverständlich erscheint, besonders auf die in Oesterreich gültigen Vorschriften Rücksicht genommen wird, so wird doch auch in hinreichender Weise auf die Anweisung IX des preussischen Grundsteuerkatasters eingegangen. Die in verhältnismässig geringer Anzahl vorhandenen numerischen Beispiele sind passend gewählt. Auf den theoretischen Inhalt brauche ich

nicht näher einzugehen, da er Neues wohl kaum enthält. Jedoch erwähne ich, dass der Methode der kleinsten Quadrate, soweit sie hier in Frage kommt, ein selbständiges Kapitel von 50 Seiten Länge gewidmet ist. Da fast alle Lehrbücher der Geodäsie ein solches Kapitel enthalten, so sieht es beinahe aus (wie man auch hier aus der Ueberschrift des betreffenden Kapitels schliessen kann), als ob die Methode der kleinsten Quadrate nur ein Abschnitt der Geodäsie sei. Meiner Ansicht nach könnte man jetzt, wo die Methode der kleinsten Quadrate schon meistens ein selbständiger Vorlesungsgegenstand ist und in vielen besonderen Lehrbüchern ausführlich behandelt wird, die Aufnahme dieser Hülfswissenschaft, abgesehen von ihren hier in Frage kommenden Anwendungen in die Lehrbücher der Geodäsie allmählich unterlassen. Die Art indessen, wie der Verf., seinem Zweck entsprechend, die Methode der kleinsten Quadrate auseinandersetzt, ist anerkennenswert, indem er sie einfach, ohne auf tiefere Begründungen einzugehen, auf das Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme begründet, das zugleich auf das arithmetische Mittel als plausibelsten Wert führt.

Das Buch enthält ausser einer Einleitung für die grundlegenden Begriffe folgende Kapitel: I. Masseinheiten und Constructionen auf dem Papiere; II. Coordinatenrechnungen; III. Beschreibung, Theorie und Berichtigung der Instrumente zum Längen- und Winkelmessen; IV. Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder (?) die Methode der kleinsten Quadrate; V. Horizontalaufnahmen; VI. Höhenmessungen, und zum Schluss auf 5 Seiten ganz cursorisch VII. Die Photogrammetrie.

Bö.

P. Pizzetti. **Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell' altezza dei punti di stazione sul livello del mare.** Palermo Rend. **14**, 9-15.

In den Astr. Nachr. (1882) und in seinen Fondamenti di geodesia (1. Band, 1883) hatte E. Pucci eine Methode für die Reduction der Breiten von einer Niveaufläche auf eine andere entwickelt, die aber auf der fehlerhaften Hypothese beruhte, dass die Niveauflächen ähnliche und concentrische Ellipsoide seien. Helmert hat zwar 1884 die Gestalt der äusseren Niveauflächen der Erde genau untersucht und dabei auch die Frage nach der Breitenreduction erledigt; jedoch veranlasst eine neuerliche Wiedergabe der Pucci'schen Formel den Verf., hierauf noch einmal von einem andern Ausgangspunkte aus zurückzukommen. Der Verf. hatte 1894 (vgl. F. d. M. **25**, 1509-1512, 1893/94) für die Kräftefunction der Erde unter der Voraussetzung, dass eine der äusseren Niveauflächen ein Rotationsellipsoid sei, einen Ausdruck abgeleitet, der ausserhalb dieses Fundamentalellipsoids gültig ist. Hiervon ausgehend, wird jetzt zunächst das Clairaut'sche Theorem abgeleitet und nachgewiesen, dass die äusseren Niveauflächen keine homothetischen Ellipsoide, und zwar nicht einmal angenähert sein können, dass aber die dem Fundamentalellipsoid benachbarten Niveauflächen angenähert concentrische und gleich-

axige Ellipsoide sind. Hieraus ergiebt sich dann einfach die Helmert'-sche Formel:

$$\delta\varphi'' = \varrho'' h \frac{\sin 2\varphi}{a} \frac{g_b - g_a}{g_a} = 0{,}000172'' h \sin 2\varphi.$$

Diesen Ausdruck findet man auch leicht aus einer der beiden Formeln, die der Verf. 1895 in den Astr. Nachr. (vergl. F. d. M. **26**, 1079-1080, 1895) für diese Reduction und für die in Länge abgeleitet hatte, unter der Annahme, dass die Differentialquotienten der auf das Meeresniveau reducirten Schwerkraft nach der Breite und der Länge für den Beobachtungspunkt bekannt sind; jedoch muss dann das Geoid als Rotationsellipsoid vorausgesetzt werden. Thut man dies nicht, so geben, wie an einem Beispiel gezeigt wird, die beiden Formeln Werte, die um Grössen von der Ordnung der Reduction selbst von den ersten abweichen. Deshalb hält der Verf. die Anwendung der am zuletzt aufgeführten Orte abgeleiteten Formeln für die einzige zulässige Art, die astronomisch bestimmten Positionen auf das Meeresniveau zu reduciren (vgl. hierzu auch das Referat über die Helmert'sche Arbeit, unten S. 874-876). Bö.

Ph. Hatt. **Sur la convergence des méridiens.** C. R. **131**, 635-637.

Für die Berechnung der Meridianconvergenz α bei der geodätischen Uebertragung geographischer Positionen leitet der Verf. die Formel ab:

$$\log \alpha = \log \sin L + \log P + T_P - T_\alpha,$$

wo L die Breite des Ausgangspunkts, P die Längendifferenz und T_P und T_α die zu P und α gehörigen, in den Logarithmentafeln unter der Bezeichnung $T = \log \frac{\operatorname{tang} x}{x}$ aufgeführten Grössen sind.

Die Anwendung dieser Formel ist in Deutschland schon lange bekannt und in allgemeinem Gebrauch; zuerst ist sie wohl 1868 von O. Börsch in dieser Form veröffentlicht worden. Bö.

F. R. Helmert. **Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. Erste Mitteilung.** Berl. Ber. 1900, 964-983.

Die Abweichungen der Gestalt der mathematischen Meeresfläche, des Geoids, von der Figur eines abgeplatteten Rotationsellipsoids treten bei den geodätischen Messungen und Berechnungen zunächst als Lotabweichungen hervor. Versuche (z. B. für Indien, England und durch Bessel für Ostpreussen), diese Lotabweichungen durch schickliche Wahl der Lage und der Dimensionen eines besonderen Rotationsellipsoids oder durch die Bestimmung einer beliebig gelegenen und gestalteten Fläche zweiten Grades möglichst klein zu machen, haben gezeigt, dass selbst

einfachere Fläche nicht darstellbar ist, und dass man also genötigt wird, graphische Methoden zu benutzen. Dass aber hinreichend genau für die Umgegend von Leipzig z. B. eine Regelfläche zweiten Grades für das Geoid ermittelt werden konnte, liegt zweifellos an der geringen Ausdehnung des nur kleine Höhenunterschiede aufweisenden Gebietes.

Von den bis jetzt ausgeführten Versuchen zur zeichnerischen Darstellung eines Flächenstückes des Geoids sind besonders die von C. G. Andrae für den Harz und von General Pomerantzew für das Ferganagebiet in Centralasien hervorzuheben. Wenn für diese, immer nur einzelne Geoidprofile betreffenden Arbeiten die Lotkrümmung nicht berücksichtigt worden ist, so sind zwar die dadurch in den ermittelten senkrechten Abständen des Geoids vom Referenzellipsoid entstehenden Fehler nicht sehr erheblich. Anders aber stellt sich freilich die Bedeutung der Lotkrümmungen dar, wenn die Absicht besteht, für das Geoid oder irgend eine andere Niveaufläche den möglichst genauen Verlauf der Krümmungsverhältnisse zu erforschen. Für die hierfür notwendige Reduction der beobachteten Lotabweichungen von der physischen Erdoberfläche auf das Geoid oder auf eine andere ausgewählte Niveaufläche hatte nun Pizzetti vorgeschlagen, sich der Schwerkraft zu bedienen, deren horizontale Aenderungsgeschwindigkeit in einer einfachen Beziehung zur Lotkrümmung steht. Da aber die Reduction der Schwerkraft auf das Geoid Bedenken unterliegt, so solle man sie lieber auf eine die betreffende Gegend in freier Luft durchschneidende Niveaufläche reduciren. Hiergegen macht der Verf. mehrere gewichtige Einwände und empfiehlt statt dessen ein Verfahren, das zwar ebenfalls die Kenntnis der Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche in der betreffenden Gegend voraussetzt, aber in seiner Genauigkeit ausser dem Einflusse der Beobachtungsfehler und dem etwa noch bestehenden Mangel völlig zureichenden Beobachtungsmaterials nur insoweit Bedenken unterliegt, als die mittlere Schwerkraft in jeder Lotlinie, für welche man den Abstand von Referenzellipsoid und Geoid ableiten will, innerhalb einer gewissen Strecke geschätzt werden muss. Die hierbei begangenen Fehler sind aber localer Natur; sie beeinflussen immer nur die Lage des einzelnen Punktes und pflanzen sich nicht fort. Die vom Verf. entwickelte Methode besteht in der Hauptsache darin, dass an den Ergebnissen der astronomischen Nivellements kleine Correctionen angebracht werden, deren Ermittelung mit Hülfe der Schwerkraft in ähnlicher Weise erfolgt wie bei der Reduction geometrischer Nivellements.

Ein wesentlich anderes Verfahren zur Ermittelung der mittleren Schwerkraft in den Lotlinien als das des Verf. hatte H. Bruns vorgeschlagen; es beruhte darauf, dass die Aenderungsgeschwindigkeit der Schwerkraft mit der Höhe im Beobachtungspunkte einfach und mit hinreichender Genauigkeit bestimmt sein musste. Jedoch ist abgesehen davon, dass trotz mehrerer Versuche diese Voraussetzung noch nicht erfüllt ist, dieses Verfahren nach des Verf. Meinung dem von ihm vorgeschlagenen wohl kaum vorzuziehen.

Als interessantes Nebenresultat ergab sich bei der Entwickelung der Formeln eine strenge Relation zwischen den Resultaten geometrischer, trigonometrischer und astronomischer Nivellements, nämlich: Der durch ein trigonometrisches Nivellement längs eines bestimmten Profils unter Benutzung der Lotabweichungen bestimmte Höhenunterschied der Endpunkte in Bezug auf ein Referenzellipsoid ist gleich der Summe der unmittelbaren Ergebnisse der längs derselben Linie geführten astronomischen und geometrischen Nivellements. Bö.

A. VENTURI. **Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre.** Nuovo Cimento (4) **11,** 33-46.

Sind auf r Stationen, von denen auf der ersten der absolute Wert der Schwerkraft bekannt ist, mit einem Sterneck'schen Pendelapparat von z. B. vier Pendeln die wahren Schwingungszeiten der Pendel

$$\sigma_{1 \cdot i},\ \sigma_{2 \cdot i},\ \sigma_{3 \cdot i},\ \sigma_{4 \cdot i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

während die beobachteten Schwingungszeiten

$$s_{1 \cdot i},\ s_{2 \cdot i},\ s_{3 \cdot i},\ s_{4 \cdot i}$$

sind, zu denen die Fehler

$$\delta_{1 \cdot i},\ \delta_{2 \cdot i},\ \delta_{3 \cdot i},\ \delta_{4 \cdot i}$$

gehören, so dass

$$\sigma_{n \cdot i} = s_{n \cdot i} + \delta_{n \cdot i} \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

ist, so müssen die $3(r-1)$ Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\frac{\sigma_{1 \cdot i}}{\sigma_{1 \cdot i+1}} = \frac{\sigma_{2 \cdot i}}{\sigma_{2 \cdot i+1}} = \frac{\sigma_{3 \cdot i}}{\sigma_{3 \cdot i+1}} = \frac{\sigma_{4 \cdot i}}{\sigma_{4 \cdot i+1}} \qquad (i = 1, \ldots, r-1).$$

Die beobachteten Schwingungszeiten werden nun unter diesen Bedingungen ausgeglichen, und besonders wird der mittlere Fehler einer Schwingungszeit auf mehrfache Weise und auch das Gewicht der ausgeglichenen Schwingungszeiten für die verschiedenen Stationen abgeleitet. Es zeigt sich, dass die für die relativen Schwerkraftsbestimmungen gewöhnlich angewandten Rechnungsmethoden, die auf die Bedingungen keine Rücksicht nehmen, bei dem immer vorausgesetzten Fall von nahezu gleichen Schwingungszeiten für die vier Pendel gerechtfertigt sind. Jedoch ist die Ableitung des mittleren Fehlers, der nach des Verf. Entwickelungen ohne die weitschweifige Durchführung der Ausgleichung berechnet werden kann, vielleicht unter Umständen auch bei dem üblichen Reductionsverfahren zu empfehlen. Bö.

A. v. OBERMAYER. **Quincunx, zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes, von Francis Galton, F. R. S.** Mitt. üb. Art. u. Genie **31,** 118-120.

Der vom Verf. zu demselben Zwecke ersonnene **Apparat** (vergl.

von F. Galton, beschrieben auf S. 154 des Katalogs mathematischer Modelle, herausgegeben von W. Dyck 1892. Lp.

G. Giovanetti. Osservazione sopra una formola utile in topografia e geodesia. Periodico di Mat. (2) **3,** 83-84.

Eine bei A. Cerri „Deviazione della stadia" (Il Politecnico, Milano, 1894) vorkommende Formel bei der Fehlerberechnung wird in eine bequemere Form gebracht. Lp.

L. Krüger. Ueber die Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Gött. Nachr. 1900, 1-33.

Schon 1885 ist von O. Börsch die Ausgleichung eines nach mehr als drei gegebenen Punkten erfolgten Rückwärtseinschnittes nach bedingten Beobachtungen behandelt worden. Später ist dieses Verfahren, unter Ausdehnung auch auf das Vorwärtseinscheiden, noch öfter (z. B. von O. Eggert, vergl. F. d. M. **30,** 833, 1899) vorgeschlagen worden. Der Verf. benutzt zunächst dieselbe Art der Seitengleichungen wie O. Börsch, nachdem er sie jedoch vor ihrer Anwendung noch weiter entwickelt hat. Eine zweite Ableitung der Bedingungsgleichungen erfolgt dann auch mit Hülfe der allgemein üblichen Fehlergleichungen.

In dem Nachlass von Gauss hat sich eine Notiz: „Bestimmung der Lage eines Punktes P^0 aus der Lage dreier anderer P, P', P'', wo jener beobachtet", vorgefunden, die eine ähnliche Entwickelung der Seitengleichung beim Vorwärtseinschneiden von 3 Punkten aus, wie die des Verf., vermuten lässt. Diese Notiz, die überhaupt den ersten Anlass zu den vorliegenden Untersuchungen gegeben hat, ist vollständig mitgeteilt. Bö.

C. Runge. Graphische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden. Zeitschr. f. Vermessungsw. **29,** 581-588.

In einem früheren Aufsatze (vergl. F. d. M. **29,** 833, 1899) hatte der Verf. gezeigt, dass die Aufgaben des Rückwärts- und des Vorwärtseinschneidens durch die Transformation nach reciproken Radien dergestalt in einander übergehen, dass man mit Hülfe dieser Transformation einen Punkt rückwärts einschneiden kann nach dem Rechnungsschema für das Vorwärtseinschneiden und vorwärts einschneiden nach dem Rechnungsschema für das Rückwärtseinschneiden.

Nunmehr wird die Transformation nach reciproken Radien auf die Ausgleichungen beim Rückwärtseinschneiden angewandt.

Es wird gezeigt, dass für eine graphische Ausgleichung nach der

Methode der kleinsten Quadrate dieses Verfahren von Vorteil sein kann, was auch an einem Beispiele nachgewiesen wird. Bö.

W. Láska. Ueber eine Erweiterung des Rückwärtseinschneidens. Zeitschr. f. Vermessw. **29**, 565-566.

Lösung der Aufgabe: Es seien von drei, gegenseitig durch die Längen 1·2, 1·3, 2·3· und die Dreieckswinkel α, β, γ festgelegten Standpunkten die Winkel α', β', γ' zwischen je einem der anderen Beobachtungspunkte nach drei anderen gegebenen Fundamentalpunkten gemessen. Man verlangt die Coordinaten der Standpunkte.

Fallen die drei Standpunkte zusammen, so hat man die einfache Pothenot'sche Aufgabe. Bö.

O. Schreiber. Zur conformen Doppelprojection der Preussischen Landesaufnahme. Sphäroid und Kugel (Gauss'sche Projection). Sphäroid und Ebene (Doppelprojection). Zeitschr. f. Vermessw. **29**, 257-281, 289-310.

Hiermit wird die z. T. schon im **28**. Bande der Z. f. V. enthaltene Arbeit des Verf. über die Projectionsmethode der Preussischen Landesaufnahme zum Abschluss gebracht (vergl. F. d. M. **30**, 832-833, 1899), und zwar wird ausführlich die Uebertragung der Richtungen und der Entfernungen für die Gauss'sche conforme Projection des Rotationsellipsoids auf die Kugel behandelt.

Zur Uebertragung der in geographischen Coordinaten gegebenen Punkte eines Dreiecksnetzes auf die Kugel sind schon in den früheren Abschnitten der Abhandlung erschöpfende Vorschriften abgeleitet worden. Eine solche Uebertragung gewährt zwar den Vorteil, die Messungsergebnisse in einer einfacheren Form (nämlich in sphärischen anstatt in sphäroidischen Coordinaten) zu besitzen; die Herbeiführung dieser Form ist aber keineswegs der Hauptzweck dieser Projection. Dieser besteht vielmehr darin, die Ausgleichung und endgültige Berechnung der Messungen vermittelst Uebertragung auf die Kugel zu erleichtern. Dies kann aber nur dadurch geschehen, dass alle auf dem Sphäroid unmittelbar gegebenen und gemessenen Grössen, also nicht bloss Punkte, sondern auch Winkel und Seiten, auf die Kugel übertragen werden, und dass auf dieser sodann das ganze Dreiecksnetz ausgeglichen und endgültig berechnet wird.

Nun wird ein auf dem Sphäroid von kürzesten Linien gebildetes Dreiecksnetz auf der Kugel durch ein solches dargestellt, in dem zwar die Winkel den entsprechenden sphäroidischen gleich, dessen Seiten aber keine Grösstekreisbogen, sondern andere Curven sind, da nur die mit einem Meridian zusammenfallenden Dreiecksseiten durch Grösstekreisbogen dargestellt werden. Ein solches Dreiecksnetz lässt sich aber nicht berechnen. Damit dies geschehen könne, müssen die Bilder der Dreiecks-

seiten durch die zwischen den Dreieckspunkten gezogenen Grösstekreisbogen ersetzt werden, dergestalt, dass auf der Kugel ein aus sphärischen Dreiecken bestehendes Netz zu Stande kommt, worin die Punkte, Winkel und Seiten, welche den gegebenen, bezw. gemessenen auf dem Sphäroid entsprechen, gleichfalls bekannt sind.

Die Entwickelung des Verfahrens, wie eine derartige Uebertragung auszuführen ist, bildet den Inhalt dieses Teils der Arbeit.

Für Dreiecksseiten, die nicht grösser sind, als sie in wirklich messbaren Dreiecken vorkommen können, unterscheiden sich die sphärischen Azimute und Entfernungen nur um Bruchteile der Secunde von den sphäroidischen, und ihre Unterschiede lassen sich scharf berechnen, sobald nur roh angenäherte Coordinaten der Dreieckspunkte zu Gebote stehen. Hiernach lässt sich also sowohl die Uebertragung auf die Kugel, als auch, nach ausgeführter Berechnung der Seiten und Winkel, ihre Rückübertragung auf das Sphäroid ohne weiteres ausführen.

Die hierzu nötigen Entwickelungen sind einfach, wenn man sie, wie Gauss es gethan hat, auf die blosse Herleitung der Gebrauchsformeln beschränkt. Wenn man aber auch deren Genauigkeit bestimmen will, so müssen sie um zwei Ordnungen der Seitenlängen weiter getrieben werden. Obgleich dies sehr umständlich ist, so hat der Verf. doch um so weniger darauf verzichtet, als gerade bei den in Rede stehenden Formeln ein blosses Schätzen der Genauigkeit völlig im Stich lässt, und die Kenntnis der letzteren behufs Herrichtung zu möglichst bequemem Gebrauch unentbehrlich ist.

Das Ergebnis dieser Entwickelungen ist, dass für Dreiecksseiten, die nicht länger als 1500 km sind und deren Mitte innerhalb der Breitenzone von $44^\circ 20'$ und $61^\circ 0'$ liegt, die abgeleiteten Formeln die Azimutreductionen genauer als auf $0{,}0009''$, und die Entfernungsreduction genauer als auf 9 Einheiten der 10. Stelle des Logarithmus liefern.

In dem sehr kurzen Schlussabschnitt über die Doppelprojection von dem Sphäroid auf die Ebene werden nur noch die Formeln und Rechnungsvorschriften einer näheren Begründung unterzogen, die zur scharfen Berechnung der ebenen rechtwinkligen Coordinaten x, y aus den sphärischen Polarcoordinaten b, l und dieser aus jenen dienen, während im übrigen auf die schon im vorjährigen Referate erwähnte amtliche Veröffentlichung der Königl. Preussischen Landesaufnahme verwiesen wird.

Bö.

O. EGGERT. Vergleichung der Ergebnisse des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements nach den durch v. Bauernfeind im Jahre 1881 ausgeführten Beobachtungen. Zeitschr. f. Vermessw. **29**, 113-139.

Die im Jahre 1881 auf drei Punkten des bayerischen Hochgebirges zur Untersuchung der terrestrischen Refraction ausgeführten Zenitdistanzmessungen gewähren in Verbindung mit einem geometrischen Nivellement und mit der Bestimmung der Lotabweichungen für diese Punkte die

Möglichkeit, die Resultate der beiden Nivellementsmethoden zu vergleichen und zu untersuchen, wie die Resultate des trigonometrischen Nivellements behandelt werden müssen, um diese Vergleichung als zulässig erscheinen zu lassen. Die hierüber von Bauernfeind selbst angestellten Untersuchungen waren teils wegen eines erst nachher aufgedeckten Fehlers im geometrischen Nivellement, teils wegen der Mängel seiner Refractionstheorie und wegen der fehlerhaften Einführung der Lotabweichungen nicht zufriedenstellend. Später hat Helmert einen Teil der Beobachtungen nochmals behandelt. Eine neue Bearbeitung, die der Verf. auf Helmert's Anregung, hauptsächlich weil inzwischen die Resultate der astronomischen Bestimmungen veröffentlicht worden waren, vornahm, ist bereits 1898 als Berliner Dissertation erschienen. Die vorliegende Arbeit ist zum Teil ein Auszug, zum Teil eine Ergänzung (besonders im Zahlenmaterial) dieser Dissertation. Die theoretische Behandlung der Aufgabe schliesst sich direct an Helmert an. Das Resultat der Arbeit ist, dass durch eine sachgemässe Berücksichtigung der Lotabweichungen eine bedeutend bessere Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements herbeigeführt wird. Eine erschöpfende Behandlung des Gegenstands lässt sich wegen des Mangels von Schweremessungen behufs Reduction des geometrischen Nivellements, wegen Unkenntnis des genauen Verlaufs der Lotabweichungen und der Krümmung der Lotlinien u. s. w., auch jetzt noch nicht durchführen. Bö.

H. Ehrhardt. Neues System der Flächenberechnung und Flächenteilung mit Hülfe einer planimetrischen Tafel, welche zugleich als Producten- und Quadrattafel dient, nebst einer Sinustafel, welche in Verbindung mit der planimetrischen Tafel bei der Coordinatenberechnung die Logarithmen- und Coordinatentafeln mit Vorteil ersetzt und zugleich als Sehnentafel zu gebrauchen ist. Stuttgart: K. Wittwer. 71 + 20 + IX S. gr. 8°.

Diese sogenannte planimetrische Tafel ist nichts anderes als eine Tafel der Achtelquadrate für die Zahlen von 1 bis 9999, unter Weglassung der Zehner, Einer und der Decimalstellen. Da für die Flächenberechnungen des praktischen Geometers in der Regel die Bildung halber Producte erforderlich ist, die unter die Form

$$\frac{ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{8} - \frac{(a-b)^2}{8}$$

gebracht werden können, so ist eine solche Tafel für diesen Zweck in der That praktisch. Jedoch ist die Idee insofern nicht neu, als schon Tafeln der Viertelquadrate zur Erleichterung der Productbildung veröffentlicht sind. Die Ausdehnung der Tafel, die durch Interpolation auch noch bis 99999 brauchbar wird, ist für die Bedürfnisse der Praxis ausreichend. Die „Sinustafel“ giebt die doppelten natürlichen Sinus und Cosinus auf 4 Decimalstellen. In Verbindung mit der ersten Tafel gestattet

sie eine bequeme Berechnung von $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$. Für die im Titel genannten Aufgaben ist eine grosse Anzahl von Ausführungsbeispielen aufgeführt. Bö.

L. AMBRONN. Der zwölfzöllige Theodolith, welchen Gauss bei seinen Messungen zur hannoverschen Triangulation in den Jahren 1822 und 1823 benutzt hat. Zeitschr. f. Vermessw. 29, 177-180.

Beschreibung dieses historischen von G. Reichenbach angefertigten Instrumentes, das noch in seinem ursprünglichen Zustande erhalten ist und sich gegenwärtig in dem geophysikalischen Institute der Universität Göttingen befindet. Bö.

W. WLASCHÜTZ. Das geodätische Universal-Messinstrument von M. Hornstein. Mitt. üb, Art. u. Genie 31, 379-396.

„Das geodätische Messinstrument von M. Hornstein, auch kurzweg als Tachymeter zu bezeichnen, ist auf dem Grundsatze der Tangenten-Messschraube aufgebaut und gestattet die Bestimmung der horizontalen Entfernung und des Höhenunterschiedes eines Punktes im Terrain vom gewählten Standpunkte aus mit Hülfe einer am Instrumente selbst befindlichen, verticalen Grundlinie, ohne Benutzung einer Ziellatte. Da es auch einen Horizontalkreis zur Messung von Horizontalwinkeln besitzt, sind alle Bedingungen erfüllt, um die Polarcoordinaten eines Punktes vom Standpunkte aus festlegen können, was eben die Aufgabe eines Tachymeters ausmacht.“ Es folgt die Beschreibung des Instrumentes, seine Theorie, die Vorschrift zum Gebrauche. Lp.

E. GOEDSEELS. Étude sur le niveau à bulle. Brux. S. sc. 24B, 133-174.

D'OCAGNE. Rapport. Brux. S. sc. 24A, 111-114.

Die gewöhnliche Art des Einstellens einer Libelle durch das Verfahren des Umlegens gelingt nur bei Parallelstellung zu der durch den Zapfen gehenden Verticalebene. Goedseels giebt an, wie man diese Richtung finden und die Wage mit Sicherheit einstellen kann. M. d'Ocagne bemerkt, dass man die Einstellung ohne Umlegung bewirken kann, indem man in einer zur Verticalebene des Zapfens senkrechten Ebene vorgeht, und dass ausserdem das klassische Verfahren nur ganz unbedeutende Fehler bei den gewöhnlichen Operationen der Topographie nach sich zieht. Mn. (Lp)

Weitere Litteratur.

M. BANDEMER. Feldmessen und Nivelliren, für Bau- und ähnliche Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet. Wiesbaden: C. W. Kreidel. 8 + 68 S. gr. 8°.

M. Friedersdorff. Anleitung für Landmesser-Zöglinge zur praktischen Ausführung von Feldarbeiten. Berlin: P. Parey. VI + 103 S. gr. 8°.

C. Pietsch. Katechismus der Nivellirkunst. 5. Aufl. Leipzig: J.J.Weber. VIII + 105 S. 12° (Weber's illustrirte Katechismen Nr. 59).

K. v. Orff. Ueber die Hülfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Festrede. München: G. Franz in Comm. 59 S. gr. 4°.

Vergl. F. d. M. **30**, 58, 1899.

M. Brillouin. Les réductions de la pesanteur au niveau de la mer. Rev. générale des sc. **11**, 875-882.

M. Brillouin. Les définitions de la forme de la terre. Rev. générale des sc. **11**, 823-826.

H. Poincaré. La révision de l'arc méridien de Quito. Rev. générale des sc. **11**, 925-935.

Kapitel 2.

Astronomie.

Ch. André. Traité d'astronomie stellaire. Deuxième partie. Étoiles doubles et multiples. Amas stellaires. Paris: Gauthier-Villars. XIV + 429 S. gr. 8° u. 3 Taf.

Die Anzeige des ersten Teils dieses Werkes befindet sich in F. d. M. **30**, 837, 1899. Der gegenwärtige Band enthält die folgenden Kapitel: XII. Binäre Systeme. XIII. Anzahl, Dimensionen, Massen und Entfernungen der binären Systeme. XIV. Geschichte und Beschreibung einiger binären Systeme. XV. Astronomie des Unsichtbaren. XVI. Spectroskopische Doppelsterne. XVII. Photometrische Doppelsterne mit unstetigen Lichtänderungen. XVIII. Photometrische Doppelsterne mit stetiger Lichtänderung. XIX. Vielfache Sterne. XX. Vielfache Systeme und unregelmässige Haufen. XXI. Sternhaufen und Nebelflecke. XXII. Kugelförmige Haufen. XXIII. Farbige Sterne. XXIV. Dynamisches Centrum unseres Sternhaufens. Centralsonne. XXV. Ueberblick über die Himmelswelt. — Die systematische Zusammenstellung des an vielen Stellen zerstreuten Materials zu handlicher Benutzung ist eine dankenswerte Arbeit; wenn die Zuverlässigkeit auch zuweilen etwas zu wünschen übrig lässt, so ist doch die Fülle des Gebotenen so gross, dass man das Werk zum Nachschlagen gern benutzen und aus ihm viele Belehrung schöpfen wird.

Lp.

Sir R. St. Ball. A primer of astronomy. Cambridge: At the University Press.

Dieses kleine Buch könnte als Einleitung in das Studium der

Astronomie nützlich wirken; doch sind einige Gegenstände so kurz abgehandelt, dass, wie wir fürchten, der Anfänger zuweilen ratlos sein dürfte. Gbs. (Lp.)

G. GRUSS. Grundzüge der theoretischen Astronomie. Zweiter Teil. Prag: Böhm. Kaiser Franz-Jos.-Ak. 218 S. (Böhmisch.)

Fortsetzung des gleichnamigen Werkes, besprochen in F. d. M. **30**, 837, 1899. Ableitung der Elemente mit Hülfe einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen. Bahnen der Doppelsterne. Auflösung von verschiedenen Problemen. Numerische Differentiation und Integration. Besondere Störungen. Methode von Bond-Encke zur Bestimmung von besonderen Störungen in rechtwinkligen Coordinaten. Besondere Störunrungen in Polarcoordinaten. Die Methode von Hansen-Tietjen-Oppolzer. Variation der Constanten. Sda.

L. CRULS. Sur une formule simplifiée pour le calcul des réfractions astronomiques. C. R. **130**, 1060-1061.

Die Formel ist:

$$R = (60'' \operatorname{tg} z - 1'' \operatorname{tg}^3 z)\left(0{,}00138\, B - 0{,}00001\, \frac{Bt}{2}\right)$$

(z = Zenithdistanz, B = Barometerstand, t = Temperatur in Centigraden). Sie zeigt bis $z = 70^0$ sehr gute Uebereinstimmung mit der Formel von Laplace, da die grösste Abweichung 1,6″ beträgt. Dz.

E. VON OPPOLZER. Ueber den Zusammenhang von Refraction und Parallaxe. Wien. Ber. **109**, 578-582.

An dem theoretischen Wert der Refraction ist für den Mond in Folge seiner grossen Parallaxe eine kleine Correction (zweiter Ordnung) anzubringen, worauf Hansen zuerst aufmerksam gemacht hat. Diese Correction wird genau bestimmt. Dz.

E. GOEDSEELS. Remarques critiques sur certaines théories astronomiques. Brux. S. sc. **24** B, 254-270.

CL. DUSAUSOY. Rapport. Brux. S. sc. **24** A, 114-119.

In der Astronomie wendet man mit gutem Grunde Transformationsformeln für die allgemeinsten Polarcoordinaten an, um wirklich allgemeine Formeln zwischen den verschiedenen in der Astronomie angewandten Grössen zu erhalten. Die Differentialformeln müssen analytisch hergeleitet werden, nicht aber nach infinitesimalen Figuren, bei denen in einem gegebenen Falle das Vorzeichen der betrachteten Grössen oft schwer zu beurteilen ist. Anwendungen auf die Bestimmung der Fehler

bei den Meridianinstrumenten und auf die genaue Bestimmung des Meridians durch ein derartiges Instrument. Mn. (Lp.)

K. Kostersitz. Die Photographie im Dienste der Himmelskunde und die Aufgabe der Bergobservatorien. Wien: C. Gerold's Sohn. 53 S. 8°.

Die Broschüre enthält die Wiedergabe einer Rede des Verf. vom 13. Februar 1900 über die Photographie im Dienste der Himmelskunde mit zahlreichen guten Abbildungen und 13 Gutachten über den Plan des Verf., auf dem Schneeberg bei Wien ein astronomisch-meteorologisches Observatorium zu errichten, welches das erste Bergobservatorium in Europa sein würde, wie Amerika deren bereits mehrere besitzt. Diese Gutachten sind sämtlich günstig. Dz.

H. G. van de Sande Bakhuyzen. Quelques remarques sur la réduction des positions des étoiles mesurées sur les clichés photographiques. Arch. Néerl. (2) **5**, 542-548.

Nyland benachrichtigte den Verf., dass zwischen den Werten der Correctionen der differentiellen Aberration, die aus der Kapteyn'schen Formel hergeleitet werden, und derjenigen, die aus der vom Verf. benutzten Formel sich ergeben, eine Differenz bestehe; es müsse sich in eine der beiden Formeln ein Fehler eingeschlichen haben. Nach Prüfung der beiden Formeln durch den Verf. des vorliegenden Aufsatzes ergab sich, dass beide Formeln richtig sind, und dass die Differenz der Correctionen von einer Abweichung in den zur Reduction der corrigirten Coordinaten in Rectascensionen notwendigen Rechnungen herrührt.
Lp.

A. Auwers. Gewichtstafeln für Sternkataloge. Astron. Nachr. **151**, No. 3615-16, 225-274.

Der Aufsatz enthält Gewichtstafeln für Sternkataloge vom Jahre 1755 (T. Mayer) bis zur Jetztzeit. Die Gewichtseinheit in Rectascensionen entspricht einem mittleren Fehler von $\pm 0\overset{s}{,}0356 \cdot \sec\delta$ und die in Declination von $\pm 0'',374$. Die Tafeln sind durch Vergleichung der Kataloge mit dem in erster Annäherung verbesserten Fundamentalkatalog für Zonenbeobachtungen und einigen anderen Autoritäten entstanden. Dz.

Duponchel. Sur le mouvement propre des étoiles voisines du Soleil. C. R. **130**, 229-231.

Enthält eine Kritik des wissenschaftlichen Wertes der bisher benutzten Methoden, die zunächst dadurch vereinfacht werden, dass statt der wahren Geschwindigkeiten der Fixsterne einfach die Vorzeichen ihrer

beiden Componenten in Rectascension und Declination betrachtet werden. Indem der Verf. weiter aus dem Katalog von Bossert erst alle Fixsterne, dann die mit schwacher und endlich die mit starker Eigenbewegung nimmt, erhält er gar nicht übereinstimmende Resultate; ein sehr beachtenswertes Ergebnis, das zu weiteren Wahrscheinlichkeitsschlüssen führt.

Dz.

H. Deslandres. Variations rapides de la vitesse radiale de l'étoile δ Orion. C. R. **130,** 379-382.

Die zu Meudon mit dem grossen Doppelfernrohr gemachten spectroskopischen Beobachtungen dieses Sternes zeigen grosse Schwankungen der Geschwindigkeit mit einer Periode von ungefähr zwei Tagen.

Dz.

Elis Strömgren. Ueber mechanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Drei-Körperproblems. Lunds Medd. No. 13; Stockh. Öfv. **57,** 443-454.

Verf. behandelt die Frage nach der Verwendung der Methode der mechanischen Integration auf solche Aufgaben innerhalb des Dreikörperproblems, bei denen sämtliche Massen und Abstände von derselben Grössenordnung angenommen werden. In solchem Falle ist es unnütz, das Problem als Störungsproblem zu behandeln, weil dabei die Störungen von derselben Grössenordnung wie die Coordinaten sein würden; es ist deshalb geeigneter, die Coordinaten direct zu berechnen. Bei solcher directen Berechnung der Coordinaten sind aber nicht, wie bei einer Störungsrechnung, die Anfangswerte der zu berechnenden Integrale gleich Null. Dieser Umstand macht einige Veränderungen in den Formeln für die Integrationsconstanten nötig, die der Verf. ausführt; er findet dabei Gelegenheit, einen Missgriff bei Watson (Theoretical Astronomy p. 442) betreffs der Berechnung von $''f(a - w)$ zu berichtigen. Verf. hat die Absicht, einen Specialfall (Bewegung in einer Ebene, die drei Körper in einer geraden Linie am Anfang der Bewegung) numerisch zu behandeln. Von dieser Untersuchung führt er hier nur einige mit Hülfe des Integrals der lebendigen Kraft ausgeübte Kontrollen an, welche zeigen, dass die Methode der mechanischen Integration auch in diesem allgemeineren Falle ebenso genaue Resultate liefert wie die Encke'sche Methode für den einfacheren Fall.

Nn.

C. V. L. Charlier. Ueber die säcularen Störungen der kleinen Planeten. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **35,** 347-350.

Kurzer Bericht über einige durch den Verf. veranlasste Arbeiten nach einer neuen Methode, bei welcher die Bewegung der Bahnebenen der kleinen Planeten überall auf die unveränderliche Ebene bezogen ist.

Lp.

C. V. L. Charlier. Einige Fälle von Librationsbewegungen in dem Planetensystem. I. Lunds Medd. No. 12; Stockh. Öfv. **57**, 165-186.

Ein Librationsfall liegt nach der Definition des Verf. dann vor, wenn die Geschwindigkeit der Knoten- oder Perihelbewegung eines kleinen Planeten mit der Bewegung des entsprechenden Elementes bei Jupiter oder Saturn zusammenfällt. Zweck der Untersuchung ist, solche Librationsfälle mit Jupiter aufzusuchen. Um dieses Suchen zu erleichtern, macht der Verf. zuerst einige Vereinfachungen und erhält somit ein einfaches provisorisches Librationskriterium, das eine notwendige, aber nicht unter allen Umständen hinreichende Bedingung für Libration liefert. Aus diesem Kriterium folgt u. a., dass nur unter denjenigen Planeten Librationsfälle zu finden sind, deren Perihellänge mit weniger als 90° von derjenigen des Jupiters abweicht, und deren Excentricität nicht mehr als das Doppelte derjenigen des Jupiters beträgt, was einem Excentricitätswinkel von etwa 5°,55 entspricht. Es ergiebt sich als Resultat der Untersuchung, dass nur die Planeten (40), (117), (147), (189), (196), (205), (215), (286), (292), (300), (338), (357) und [1899 *ES*] die provisorische Bedingung erfüllen. Eine spätere Untersuchung des Verf. (Mechanik des Himmels, Bd. I, S. 422—424) hat gezeigt, dass von diesen Planeten nur drei, nämlich (147), (189) und (205) die vollständige Bedingung erfüllen, also wirklich Libration mit Jupiter haben.
Nn.

G. Norén und J. M. Wallberg. Entwickelung der Störungsfunction durch kanonische Elemente. Lunds Medd. No. 10; Stockh. Öfv. **56**, 941-961.

Bei verschiedenen neueren Untersuchungen in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper, besonders denjenigen, die in den Untersuchungen von Poincaré wurzeln, wird die kanonische Form der Bewegungsgleichungen mit Vorliebe benutzt. Die Verf. haben deswegen die Entwickelung der Störungsfunction durch kanonische Elemente gegeben, wobei sie sich auf den zweiten Grad der Neigungen und der Excentricitäten beschränkt haben. Das angewandte System von Veränderlichen ist dasselbe, das Poincaré in den „Méthodes nouvelles“ (T. I, S. 30) benutzt; die Entwickelungsmethode ist dieselbe, die Prof. C. V. L. Charlier in seinen Vorlesungen über die Mechanik des Himmels giebt. Nn.

Aug. Weiler. Ueber eine neue Störungstheorie. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **35**, 319-322.

Kurzer Bericht über die Brauchbarkeit der Methode, die der Verf. 1872 in der Publication XII der Astronomischen Gesellschaft niedergelegt hat. Lp.

A. Weiler. Die Normalgleichung der gestörten Ellipse. Astr. Nachr. **153**, No. 3666, 305-352.

Die Eigenthümlichkeit der Störungstheorien des Verf. besteht darin, dass er nicht alle Elemente der Bahn als veränderlich nimmt, sondern die Excentricität und die Epoche constant setzt, weil dieser Umstand die Lösung des Problems und die Darstellung der Störungen erleichtern soll, wie in vielen vorangegangenen Artikeln auseinandergesetzt worden ist. Er unterscheidet hierzu die Parametergleichung $r = a(1 - e\cos\varepsilon)$, in welcher e constant ist, von der Normalgleichung

$$r = a\left(1 - (e + \beta)\cos(\varepsilon + \eta)\right),$$

in welcher β und η die Störungen von e und ε in der gewöhnlichen Theorie sind. Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich hauptsächlich mit der Ueberführung der einen in die andere Form und den sich anschliessenden Transformationen der Störungen. Dz.

R. Sprague. Notes on the computation of preliminary orbits. Astr. Nachr. **153**, No. 3669, 385-390.

Die erste Note betrifft die Lösung der Gleichung:

$$\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\delta} - 2\sigma S(\cos(A - \alpha) + \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}D) + \frac{S^2}{\cos^2 D}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma}{x} + \frac{\cos^2 D}{S^2}\right) = 1,$$

welche P. Harzer in den Astr. Nachr. No. 3371 aufgestellt hat, nach σ. Sie wird hierzu durch Umformungen in die Gestalt gebracht:

$$m - z = \frac{m}{(1 - 2z\cos\psi + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

worauf Tafeln aus Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmungen die Lösung erleichtern.

Die zweite Note betrifft die Auffindung von log $(r_1 + r_2)$ in erster Annäherung. Dz.

H. v. Zeipel. Ueber die Bestimmung der Integrationsconstanten in der Theorie der Gruppenstörungen. Astr. Nachr. **153**, No. 3654, 93-100.

Die in No. 3620—21 auseinandergesetzte Theorie der Störungen bedarf der Bestimmung der Integrationsconstanten a, e, π, c, die hier nicht mit den osculirenden Elementen zusammenfallen, sondern infolge der Art und Weise, wie die Störungen berechnet werden, von ihnen etwas abweichen. Dz.

H. v. Zeipel. Angenäherte Jupiterstörungen derjenigen kleinen Planeten, welche eine mittlere Bewegung in der Umgebung von 600″ haben. Astr. Nach. **151,** No. 3620-21, 325-350.

Es wird eine Methode angewendet, welche K. Bohlin für die gruppenweise Berechnung von Planetenstörungen gegeben hat, bei der die Störungsfunction nach Potenzen der hier kleinen Grösse $w = (n - 2n')/n$ entwickelt wird. Die numerischen Werte werden für den Planetoiden Doris (48) mit denen von Oblomievsky (A. N. 1598) verglichen.

Dz.

Gruey. Sur l'équation générale donnant l'intégrale de Jacobi, comme cas particulier. C. R. **131,** 602-605.

Durch Combination der Differentialgleichungen für die gestörte Bewegung lässt sich unter der Voraussetzung, dass der gestörte Planet unendlich kleine Masse hat, die Gleichung ableiten:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k^2}{2a} + kn'\sqrt{p}\cos J + R\right) = \frac{\partial R}{\partial r'} \cdot \frac{dr'}{dt},$$

wo die gestrichelten Buchstaben sich auf den störenden Planeten beziehen. Bewegt sich dieser im Kreise, so folgt sofort das Jacobi'sche Integral. Die eben genannte genaue Gleichung giebt aber durch Integration unmittelbar den Fehler im Kriterium von Tisserand. Dz.

A. Féraud. Sur la convergence des coefficients du développement de la fonction perturbatrice. C. R. **130,** 1376-1378; **131,** 661-663.

Es werden die Kriterien der Convergenz der Entwickelung nach Potenzen der Neigung und der Excentricität des gestörten Planeten auf Grund einer Abhandlung von Poincaré im Bulletin astron. 1898 entwickelt und an den vom Jupiter gestörten Asteroiden geprüft. Es zeigt sich in allen zweifelhaften Fällen Convergenz. In der zweiten Mitteilung wird dies an einer anderen Gruppe von Asteroiden bestätigt.

Dz.

L. Picart. Démonstration du théorème d'Adams; existence d'une proposition analogue. C. R. **131,** 663-665.

Das Theorem von Adams besteht in einigen sehr einfachen Beziehungen zwischen gewissen Coefficienten der Entwickelung der Störungsfunction und der Störungsausdrücke der Coordinaten. Sie werden hier durch Variation der Differentialgleichungen bei Uebergang zu unendlich benachbarten Bahnen gewonnen. Analoge Beziehungen kann man unter Zugrundelegung der Bahnelemente an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten auffinden. Dz.

A. Gaillot. Influence des perturbations périodiques du demi-grand axe sur la valeur du moyen mouvement déduite des observations d'une planète. Correction correspondante de la valeur primitivement adoptée du demi-grand axe. C. R. 130, 1057-1060.

Wenn a und n die grosse Axe und die mittlere Bewegung des Planeten, δa und δn ihre Störungen sind, so ist:

$$(a+\delta a)^3(n+\delta n)^2 = f(1+m) = a^3n^2.$$

Hieraus folgt:

$$\delta n = -\tfrac{3}{2}\cdot n\cdot\frac{\delta a}{a} + \tfrac{15}{8}n\cdot\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 \pm\cdots$$

Gewöhnlich wird rechts nur das erste Glied genommen. Das zweite giebt kleine Correctionen für die grosse Axe, wenn man n aus den Beobachtungen entnimmt. Dz.

F. Porro. Sul movimento non perturbato di un pianeta intorno al sole. Concorso a premio. Batt. G. 38, 29-39.

Enthält eine elementare Ableitung der Bahn eines Planeten. Dz.

S. Moulton. On a class of particular solutions of the problem of four bodies. American M. S. Trans. 1, 17-29.

Es werden eine unendlich kleine Masse und drei Massenpunkte mit beliebigen Massen m_1, m_2, m_3 angenommen, welche letzteren ihre Entfernungen den beiden Lagrange'schen Specialfällen entsprechend unverändert beibehalten sollen, so dass sie also entweder in gerader Linie liegen oder die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes bilden. Es wird nach Transformation auf sich drehende Axen für die unendlich kleine Masse ein Integral der lebendigen Kraft aufgestellt in derselben Weise, wie es Jacobi für zwei beliebige Massen und eine unendlich kleine Masse ausgeführt hat. Dies Integral giebt, wenn die Geschwindigkeit $= 0$ gesetzt wird, nicht überschreitbare Grenzlinien, die mit der Integrationsconstante variiren. Die Doppelpunkte derselben ergeben Orte für den unendlich kleinen Massenpunkt, in welchen er ohne anfängliche Geschwindigkeit stets bleibt. Die zugehörigen, vermöge der irrationalen Form sehr schwer zu behandelnden Gleichungen werden auf ihre reellen Lösungen untersucht. Das Endergebnis ist das folgende:

Drei Körper mit beliebigen Massen und einer mit unendlich kleiner Masse können auf 28 und nicht mehr Weisen so angeordnet werden, dass sie in einer beliebigen Zeit umlaufen und ihre Abstände beibehalten. Dz.

W. Ebert. Sur un système d'équations différentielles, qui équivaut au problème des n corps, mais admet une intégrale de plus. C. R. **131**, 251-253.

Verf. führt im n-Körperproblem statt der Zeit t eine neue Variable τ ein, durch die Beziehung

$$\frac{1}{dt} = \frac{U+2\alpha}{d\tau} = \frac{T+\alpha}{d\tau}$$

und gewinnt ein neues kanonisches System in der Form

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial x_i},$$

wo $F' = \log(T+\alpha) - \log(U+2\alpha) = \text{const.}$

Dieses System hat ein Integral mehr als das ursprüngliche, nämlich:

$$\Sigma y_i x_i - \tau = c.$$

Rr.

K. Schwarzschild. Ein Verfahren zur Bahnbestimmung bei spectroskopischen Doppelsternen. Astron. Nachr. **152**, No. 3629, 65-74.

Der Aufsatz schliesst sich an eine Untersuchung von Lehmann-Filhés (A. N. No. 3242) an und erläutert ein Verfahren, durch welches gewisse mechanische Quadraturen zur Darstellung der Geschwindigkeit als Function der Zeit überflüssig gemacht werden. Dz.

G. W. Hill. On the extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motion. American M. S. Trans. **1**, 205-242.

Die Delaunay'sche Methode, welche hier zunächst durch Einführung kanonischer Elemente in einfacherer Form erscheint, wird dadurch charakterisirt, dass man in der Störungsfunction F vorläufig nur diejenigen Glieder beibehält, welche von einer besonderen linearen Combination der Winkelvariabeln $l_i, \dots, l_k$:

$$\Theta = j_1 l_1 + j_2 l_2 + \cdots + j_k l_k$$

abhängen. Die Integration kommt dann auf zwei mechanische Quadraturen zurück. Nimmt man an, dass die Elemente wieder trigonometrisch darstellbar seien, und dass die Störungsfunction nach Einführung dieser Werte die gleiche Eigenschaft habe, so erhalten die neuen Differentialgleichungen dieselbe Form wie die alten, worauf abermals eine Delaunay'sche Operation erfolgen kann u. s. w.

Als Beispiel wird unter vereinfachenden Voraussetzungen die bereits von vielen Astronomen auf andere Weise erläuterte Theorie der Planetoiden vom Hekuba-Typus vorgenommen, wobei sich der Verf. auf die langperiodischen Glieder beschränkt. Dz.

31, 4-13.

Kurze Angaben zur angenäherten Berechnung unter Annahme kreisförmiger Bahnen und gleichförmiger Bewegungen als Schüleraufgaben.

Lp.

Johan Teodor Petrelius. Untersuchungen über die durch Jupiter, Saturn und Mars bewirkten speciellen Störungen des Planeten (183) Istria und deren Anwendung zur Verbesserung der Bahnelemente. Helsingfors 1900. 55 S. 4°.

C. Dunér. Ueber eine scheinbare Gesetzmässigkeit in den Entfernungen der Jupiter- und der Uranusmonde. Astron. Nachr. **151,** No. 3614, 219-220.

Entsprechend der Titius'schen Formel $a = 4 + 3n$ gilt für die Jupitermonde:

$$a = 2,7 + 3n; \quad n = 0, 1, 2, 4, 8$$

und für die Uranusmonde

$$a = 8,0 + 3n; \quad n = 0, 1, 3, 5.$$

Dz.

J. v. Hepperger. Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1845 und 1846. Wien. Ber. **109,** 299-382.

Nach Berechnung der Bahnelemente wird die Frage erörtert, wann etwa der Biela'sche Komet sich in seine beiden Componenten geteilt haben könnte. Dz.

J. v. Hepperger. Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen auf Grund der Beobachtungen aus dem Jahre 1805. Wien. Ber. **109,** 623-655.

Nach Berechnung der Bahnelemente werden diese mit den späteren aus den Jahren 1826, 1832 und 1846 verglichen, wobei sich zwar Differenzen, aber doch nicht sehr erhebliche herausstellen. Dz.

A. Schobloch. Statistik der Kometenbahnen. Wien. Ber. **109,** 799-826.

Diese Statistik bezieht sich besonders auf die Neigungen und auf die Beziehungen der Kometenbahnen zu den Bahnen der Planeten, vornehmlich des Jupiters. Dz.

Gruey. Remarques sur le critérium de Tisserand. C. R. **130**, 877-879.

Gruey. Sur les termes complémentaires du critérium de Tisserand. C. R. **130**, 1109-1112.

Das Kriterium bezieht sich auf die Entscheidung, ob zwei Bahnen mit verschiedenen Bahnelementen trotzdem zu demselben Kometen gehören können, der dazwischen einem grossen Planeten sehr nahe gekommen ist. Es wird abgeleitet und durch Hinzunehmen von Gliedern ergänzt.

Dz.

G. v. Niessl. Bahnbestimmung des Meteors vom 19. Februar 1899. Wien. Ber. **109**, 481-511.

Nach ungefährer Bestimmung der Bahn auf Grund der zuverlässigen Beschreibungen wird der entsprechende Radiant mit dem Verzeichnis von Denning verglichen, allerdings ohne bestimmten Erfolg. Dz.

A. Gray. The stability of a swarm of meteorites and of a planet and satellite. Nature **62**, 582-584.

Eine zusammenfassende Uebersicht der bezüglichen Untersuchungen von Schiaparelli, Luc. Picard, Charlier, G. W. Hill, Edouard Roche, die nach des Verf. Ansicht nicht genügend bekannt sind.

Lp.

F. Folie. Die jetzigen und die künftigen Formeln der sphärischen Astronomie. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **35**, 332-337.

Wiederholung der Bedenken, die der Verf. seit zehn Jahren gegen Oppolzer's Formeln auszusprechen nicht müde wird. Lp.

K. Schwarzschild. Ueber das zulässige Krümmungsmass des Raumes. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **35**, 337-347.

Die Betrachtungen des Verf. führen zu dem Resultat: „Man darf, ohne mit den Erfahrungsthatsachen in Widerspruch zu geraten, die Welt enthalten denken in einem hyperbolischen (pseudosphärischen) Raum von einem Krümmungsradius über vier Millionen Erdbahnradien oder in einem endlichen, elliptischen Raum von einem Krümmungsradius über hundert Millionen Erdbahnradien, wofern man noch in letzterem Falle eine Absorption des Lichtes von 40 Grössenklassen bei einem Umlauf um den Raum annimmt.“ Lp.

P. G. Lais. Il calendario gregoriano e la odierna computazione dell' equinozio. Rom. Acc. P. d. N. L. **53**, 196-207.

Der gregorianische Kalender ist nicht ganz genau, da er nach den

neueren Bestimmungen der Länge des tropischen Jahres (vom Frühlingspunkt zum Frühlingspunkt) nicht ganz entspricht. Es werden Vorschläge zur Verbesserung, z. B. von Sir Beckett Division, welcher alle 128 Jahre einen Schalttag auslassen will, besprochen, sowie eine geplante Revision des alten julianischen Kalenders in Russland, zu welcher eine Commission unter Professor Glasenapp eingesetzt ist. Dz.

Salvatore Franco. Sur un calendrier perpétuel. C. R. **131**, 493-494.

Beschreibung eines Bewegungsmechanismus, der einen immerwährenden Kalender sowohl nach Gregorianischem wie nach Julianischem Stil darstellt. Auf einer Tafel sind das Datum des Monats, der Wochentag, der Name des Heiligen und die Mondviertel verzeichnet, und darüber trägt ein bewegliches Band die beweglichen Feste. Mit den beweglichen Columnen des Kalenders stehen vier Quadranten mit der Indiction, der goldenen Zahl, der Epakte, dem Sonntagsbuchstaben, dem Wochentag u. s. w. in Verbindung. Die goldene Zahl lässt sich direct bis 19999 ablesen, die Epakte bis 10099. M.

Druart. Réforme du calendrier. Assoc. Franç. Boulogne (1899). **28**, 140-142.

Eine kleine Abänderung an dem unter der Anregung von Flammarion entstandenen Entwurf einer Neuordnung der Einteilung des Jahres nach Monaten und Wochen. Lp.

J. Gallenmüller. Die Dauer der Dämmerung auf der Erdoberfläche. Pr. Gymnas. Aschaffenburg. 24 S. 8°.

Die Formeln für die Dauer der bürgerlichen Dämmerung, welche der Verf. bei 7° unter dem Horizont beginnen, resp. endigen lässt, werden abgeleitet und eingehend untersucht. Die Ergebnisse sind in übersichtlichen und nützlichen Tabellen niedergelegt. Dz.

Weitere Litteratur.

Ch. Berdellé. Au sujet de questions chronologiques. Ens. math. **2**, 188-194.

Earl of Dunraven. Self-instruction in the practice and theory of navigation. Two Volumes. London: Macmillan and Co. XXV + 354 + 388 S. [Nature **62**, 337-338.]

W. Foerster und P. Lehmann. Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders für 1901. Nebst einem allgemeinen statistischen Beitrage von E. Blenck und A. Petersilie. Berlin: Statistisches Bureau. V + 160 S. gr. 8°.

F. Folie. Sur des termes nouveaux de l'accélération séculaire de la Lune. Belg. Bull. Sciences 1900, 42-47. Mn.

F. Folie. Les expressions correctes de la nutation eulérienne rapportée aux axes instantanés. Belg. Bull. Sciences 1900, 462-463, 616-625, 693-694. Mn.

F. Folie. Sur les nutations eulériennes et chandlériennes d'après les latitudes déterminées à Poulkova. Belg. Bull. Sciences 1900, 270-292. Mn.

J. C. Kapteyn. Over de bepaling van de coördinaten van het Apex der Zonsbeweging. Amst. Ak. Versl. **8**, 402-423.

O. Kars. Der einstige zweite Mond der Erde als Urheber aller irdischen Entwickelung. Ein Blatt vom Baume der Erkenntnis gepflückt und der denkenden Menschheit dargereicht. Berlin: M. Schildberger. 61 S. gr. 8°.

H. J. Klein. Katechismus der Astronomie. Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender. 9. Aufl. Leipzig: J. J. Weber. VIII + 311 S. (Weber's illustrirte Katechismen, No. 3).

F. X. Kugler. Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne. Auf Grund mehrerer von J. N. Strassmaier copirten Keilinschriften des britischen Museums. Mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln. Freiburg i. B.: Herder. XV u. 215 S. gr. 8° mit 13 Tafeln.

A. F. Möbius. Astronomie. Grösse, Bewegungen und Entfernungen der Himmelskörper. 9. Aufl., bearbeitet von W. F. Wislicenus. Leipzig: G. J. Göschen (Sammlung Göschen Nr. 11). 164 S. 12°.

F. Nušl. Die Bestimmung der Zeit mit Hülfe von Sonnenuhren. 6. Jahresbericht des k. k. Staatsgymnasiums in den kgl. Weinbergen 1900. 27 S. (Böhmisch). Sda.

K. G. Olsson. Allgemeine Jupiterstörungen derjenigen Asteroiden vom Typus $\frac{1}{3}$, welche grosse Bahnexcentricitäten und Neigungen haben. Stockh. Akad. Bihang **25**, No. 8, 82 S.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

H. Holzmüller. Ueber zwei Punkte der mathematischen Geographie. Hoffmann Z. **31**, 337-346.

Der Verf. zeigt I. die elementare Behandlung der Mercatorkarte, II. die schulmässige Darstellung des Problems der wahren und mittleren Zeit. Dz.

J. Joly. On the geological age of the Earth. Brit. Ass. Rep. 1900, 369-379.

Erörtert die Schätzung des Alters der Erde nach der auflösenden

Entblössung. Ein Nachtrag enthält eine summarische Zusammenfassung der Berechnungen (gelesen vor dem Congrès géologique international 1900). Gbs. (Lp.)

J. Buchanan. Torsion structure in the alps. Phil. Mag. (5) **50**, 261-265.

Werden zwei Systeme von Runzelungen über einander gelegt, so entstehen Combinationscurven. Zwei einfache derartige Fälle, die in den Alpen vorkommen sollen, werden behandelt. Aus dem Zusammentreffen einer linearen Runzelung und einer concentrischen Runzelung ergiebt sich ein System parabolischer Runzelcurven, und aus dem Zusammentreffen einer linearen und einer radialen Runzelung ein System von Runzelcurven der Gleichung $y = x \operatorname{tg} a(x - c)$. Diese Curvenschar wird kurz untersucht, und beispielsweise abgeleitet, dass alle Wendepunkte der Curven auf einer Geraden liegen. Br.

J. Curie. Systèmes de construction des cartes de Babinet et Sanson. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 73-86.

In der Einleitung giebt der Verf. an, dass das System von Karten mit elliptischen Meridianen und geradlinigen Parallelen in einer Abbildung, welche die Erhaltung der Flächen sicher stellen sollte, von Mollweide herrührt, während man es in Frankreich nach Babinet benennt. Dieses System war vom Verf. in einem Aufsatze behandelt worden, der in F. d. M. **29**, 801, 1898 besprochen ist. Inzwischen hat der Verf. in einer Note vom Jahre 1898 schon anerkannt, dass die Meridiane nicht Ellipsen sein dürfen, sondern sinusoidale Curven, und Gouin hat auf die Folge dieser Aenderung aufmerksam gemacht. Die Erhaltung der Flächen gilt danach für elliptisch abgebildete Meridiane nur bezüglich der zwischen zwei Viertelmeridianen gelegenen Gesamtflächen. Der Verf. hat nun berechnet, wie man den Abstand von den Parallelen abändern muss, damit jene Bedingung ganz erfüllt sei. Für das sinusoidale System ist die Gleichung der Loxodromie aufgestellt, ferner die des Bogens eines Grosskreises. Ausserdem wird gezeigt, wie man graphisch die mittels der Formeln der sphärischen Trigonometrie gewonnenen Resultate erhalten kann. Schliesslich werden einige Einzelheiten hinsichtlich des Systems von Mercator gegeben, ebenso bezüglich des Systems von Hilleret, bei welchem die Bogen von Grosskreisen durch Gerade abgebildet werden. Zuletzt werden die Vorzüge des sinusoidalen Systems hervorgehoben. Lp.

Seismological investigations. Fifth report of Committee. Brit. Ass. Rep. 1900, 59-120.

Der zweite Abschnitt: „Analysis of earthquakes recorded in 1899" (byJ. Milne) ist von ungemeinem Interesse, und die Zeichnungen von Seismogrammen sind beachtenswert. Gbs. (Lp.).

W. v. Bezold. Zur Thermodynamik der Atmosphäre. Berl. Ber. 1900, 356-372.

Diese fünfte Mitteilung (s. F. d. M. **24**, 1159, 1892) behandelt die klimatologische Bedeutung der Lehre von den auf- und absteigenden Luftströmen, wie sie der Verfasser früher (1888, 1890, 1892) in den unter gleichem Titel in den Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen entwickelt hat. Es wird zunächst an die Unterscheidung von adiabatischen und pseudo-adiabatischen atmosphärischen Vorgängen erinnert; streng adiabatisch ist nämlich die ohne Wärmeaustausch erfolgende Expansion feuchter Luft nur dann, wenn kein Niederschlag herausfällt. Pseudoadiabatische Zustandsänderungen sind, wie früher bewiesen, wohl in den kleinsten Teilen, aber nicht im grossen und ganzen umkehrbar. Diesem Satze werden verschiedene Formulirungen gegeben; für den theoretischen Standpunkt ist die schärfste Fassung die folgende: „Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft lässt die potentielle Temperatur ungeändert, pseudoadiabatische erhöht sie. Diese Erhöhung wächst mit der Menge des ausgeschiedenen Wassers." Ferner ergiebt sich: Die adiabatische Zustandsänderung kann ebensowohl in Expansion wie in Compression bestehen, die pseudoadiabatische ist nur bei Expansion denkbar. Daraus erklärt es sich, dass die potentielle Temperatur der Atmosphäre im Durchschnitt mit der Höhe wächst.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wird die Frage untersucht, wie sich die Temperaturabnahme mit der Höhe gestalten würde, wenn sie nur durch Verticalströme ohne Wärmezufuhr oder -entziehung bedingt würde. Das Ergebnis ist in folgenden Sätzen enthalten: Die adiabatische und pseudoadiabatische Expansion vermindert durch die sie begleitende Condensation die Abkühlung der mittleren Schichten, die pseudoadiabatische Expansion mit nachfolgender Compression erwärmt die ganze unterhalb gelegene Atmosphäre, die Einstrahlung vom Erdboden aber bildet zwar die Hauptwärmequelle für die gesamte Atmosphäre, wird jedoch, sofern es sich um die relative Temperaturverteilung in der Verticale handelt, von der Ausstrahlung übercompensirt. Die beiden Gruppen von Vorgängen tragen gemeinschaftlich bei, um die Temperaturabnahme mit der Höhe in den unteren und mittleren Schichten unter jene Grenze herabzudrücken, wie sie der Adiabate trockener Luft entspricht, und vergrössern damit die Stabilität in der Verticale. Erst in den allerhöchsten Atmosphärenschichten müssen diese Einflüsse mehr und mehr zurücktreten, und es muss demnach die Temperaturabnahme mit der Höhe in den obersten Schichten immer grösser werden und sich asymptotisch jener nähern, wie sie der Adiabate des Trockenstadiums zukommt.

Eine zweite klimatologische Schlussfolgerung betrifft die Wärmeübertragung von einem Ort zum anderen unter Mitwirkung pseudoadiabatischer Vorgänge, was am grossartigsten zwischen der Calmenzone und den sie begrenzenden Gürteln hohen Luftdrucks auftritt. Für die schon früher theoretisch erhaltenen Schlüsse, dass jene Gürtel höhere

dass die Temperaturabnahme vom Aequator bis zu jenen Gürteln verhältnismässig gering ist, wird hier mit Benutzung der Mitteltemperaturen ganzer Breitenkreise ein ziffernmässiger Beweis geliefert. Sbt.

V. Bjerknes. Das dynamische Princip der Circulationsbewegungen in der Atmosphäre. Meteor. Zeitschr. **17,** 97-106, 146-156.

M. Möller. Der räumliche Gradient. Bemerkung zur Abhandlung von Bjerknes. Meteor. Zeitschr. **17,** 275-276.

V. Bjerknes. Räumlicher Gradient und Circulation. Meteor. Zeitschr. **17,** 481-491.

In der Einleitung zur ersten Abhandlung stellt V. Bjerknes ein Schema auf, nach welchem man, von den Sätzen von Helmholtz und Lord Kelvin ausgehend, zu Verallgemeinerungen dieser Sätze gelangen kann. Bei der ersten Verallgemeinerung, die allein in der vorliegenden Arbeit ausgeführt wird, geht man, wie jene genannten Forscher, von den Bewegungsgleichungen für reibungslose Flüssigkeiten aus, führt aber im Verlaufe der Rechnung keine beschränkenden Voraussetzungen in Bezug auf die Dichtigkeit der Flüssigkeit ein. Hierdurch gelangt man zu einer erschöpfenden Behandlung der primären Bewegungsursachen in der Atmosphäre, die bekanntlich in den auf der Temperatur beruhenden Dichtigkeitsunterschieden zu suchen sind. Von den fünf Abschnitten enthält der erste die Definition des Begriffes der Circulation und die Ableitung der für das Folgende notwendigen mathematischen Eigenschaften dieses Begriffes. Der zweite Abschnitt beschreibt eine für die Ableitung wie für die Anwendungen des Fundamentalsatzes gleich wichtige geometrische Darstellung des dynamischen Zustandes einer Flüssigkeit. Der dritte Abschnitt endlich giebt die Ableitung des dynamischen Fundamentalsatzes über die Circulation; derselbe lautet: „Der auf die Zeiteinheit bezogene Zuwachs der Circulation einer beliebigen geschlossenen Curve ist gleich der Anzahl der von der Curve umschlossenen Solenoide“. Mit Hülfe dieses Satzes kann man die in der Zeit sich ändernden Werte der Circulation einer geschlossenen Kette von Flüssigkeitspartikelchen verfolgen, vorausgesetzt, dass man zu jeder Zeit den Verlauf der isobaren und der isosteren Flächen kennt. Dabei wird die Zahl der Solenoide eine immer wechselnde sein, und zwar aus zwei Gründen: einerseits weil die Curve in Bewegung ist, und andererseits weil die isobaren und die isosteren Flächen in Folge des sich verändernden Dichtigkeits- und Druckzustandes Form und Lage ändern, so dass die Curve einen immer wechselnden Bündel von Solenoiden umschliesst. Mit diesen Anwendungen des Satzes auf die atmosphärischen Bewegungen beschäftigen sich die beiden letzten Abschnitte.

Möller bemängelt den Gebrauch des Begriffes „Gradient“ von Bjerknes unter Verweisung auf seinen Artikel „Der räumliche Gradient“

(Bd. **12,** 89-98; F. d. M. **26,** 1112, 1895). Ausserdem bezweifelt er die „bindende Kraft" einiger Ableitungen von Bjerknes. Dieser giebt dann in dem an letzter Stelle oben genannten Aufsatze die gebührende Antwort als „Mathematiker", welche Bezeichnung von Möller offenbar zur Unterstützung seines Angriffs als beweiskräftig für alle Meteorologen und Wasserbautechniker herangezogen war. Der oben angeführte Fundamentalsatz wird hierbei in folgender Fassung ausgesprochen und bewiesen: „Die auf die Zeiteinheit bezogene Zunahme der Circulation einer geschlossenen Curve ist gleich dem Linienintegral derjenigen beschleunigenden Kraft, welche von dem barometrischen Gradienten herrührt."

Lp.

FOURNIER. Lois dynamiques des cyclones. C. R. **130,** 382-385.

Es werden einfache Formeln für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Druckdifferenz abgeleitet, die nach Ansicht des Verfassers für die Schiffahrt sehr nützlich sein können. Dz.

G. HOLZMÜLLER. Die Sonne und die Erklärung ihrer Wärme. Zeitschr. deutscher Ing. **44,** 441-444.

Populärer Vortrag, im Bezirksverein an der niederen Ruhr gehalten; die Sonnenausstrahlung wird in bekannter Weise als durch die Gravitationsenergie bei der Zusammenziehung des Sonnenballes compensirt angenommen. A. S.

M. DECHEVRENS. Méthode simplifiée dite des facteurs pour le calcul des séries de Fourier et de Bessel appliquées à la météorologie. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **16,** 149-182.

Ueber die Art, wie der Verf. zu einer gegebenen Beobachtungsreihe die Coefficienten der die Beobachtungen darstellenden Bessel'schen Formel berechnet, hat er in C. R. **110,** 1021-1024 Mitteilungen gemacht (vergl. F. d. M. **22,** 1235, 1890), und da in einer Besprechung der Société française de Physique die Priorität dieses Rechnungsverfahrens auf Ludimar Hermann übertragen ist (vergl. G. Weiss: F. d. M. **29,** 653, 1898), so macht der Verf. in dem gegenwärtigen Aufsatze zunächst seine Rechte geltend und setzt noch einmal ausführlich den Gang der von ihm inzwischen oft durchgeführten Rechnung nach seiner sogenannten Factorenmethode auseinander, erläutert diese Methode an Beispielen, fügt Hülfstafeln hinzu und bildet Drehscheiben ab, die zur Erleichterung der Rechnungen dienen sollen. Wegen der vielen Einzelheiten muss auf das Original verwiesen werden. Lp.

---

einer Land-, beziehungsweise Wasser-Hemisphäre, sowie der Erde aus den an der Grenze der Atmosphäre zugestrahlten Wärmemengen. Meteor. Zeitschr. **17,** 36-39.

Da die Mitteltemperaturen hauptsächlich von den ein- und ausgestrahlten Wärmemengen abhängen, so hat schon Zenker sich die Frage gestellt, ob es nicht möglich wäre, die Wärmeverteilung aus der theoretisch bekannten Wärme-Einstrahlung und den auf der Erdoberfläche beobachteten Temperaturen abzuleiten (vergl. Zenker: „Der thermische Aufbau der Klimate aus den Wärmewirkungen der Sonnenstrahlung und des Erdinneren". Halle, 1895.) Zenker hat bei dieser Rechnung nur die auf die Erdoberfläche nach dem Durchgange durch die Atmosphäre auffallenden Wärmemengen berücksichtigt. Dieses Verfahren ist nicht gerechtfertigt, da man ganz gut die Temperatur-Verteilung sowohl auf einer Land-, als auf einer Wasser-Hemisphäre auch aus den an der Grenze der Atmosphäre auffallenden Wärmemengen berechnen kann, wie in dem vorliegenden Aufsatze vom Verf. nachgewiesen wird. Lp.

W. Meinardus. Eine einfache Methode zur Berechnung klimatologischer Mittelwerte von Flächen. Meteor. Zeitschr. **17,** 241-257.

Zuerst bespricht der Verf. die verschiedenen Methoden, welche zur Bildung von Mittelwerten eines klimatischen Elementes für ein bestimmtes Gebiet der Erdoberfläche benutzt werden; dann empfiehlt er seine sogenannte Interpolationsmethode, die er 1895 in den Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin zur Berechnung mittlerer Meerestiefen und Festlandserhebungen in Vorschlag gebracht hat. Die einfache arithmetische Mittelbildung ist nur dann zulässig, wenn die zur Berechnung herangezogenen Werte gleichmässig über die ganze Fläche verteilt sind. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man z. B. bei der Aufsuchung der mittleren Niederschlagshöhe über das in flächentreuer Entwurfsart dargestellte Gebiet ein System von gleichabständigen Punkten ausbreitet und für jeden Punkt unter Berücksichtigung der Beobachtungswerte von nahegelegenen Stationen und unter Beachtung des Isohyetenverlaufs einen Wert interpolirt. Das Mittel aus allen diesen Werten ergiebt unmittelbar die gesuchte mittlere Niederschlagshöhe. Lp.

H. Hergesell. Ergebnisse der internationalen Ballonfahrten. Meteor. Zeitschr. **17,** 1-28.

In den Abschnitten dieser Arbeit: „Neue Untersuchungen zur Bestimmung der Genauigkeit von Temperaturmessungen bei Ballonfahrten" und „Die Temperaturverhältnisse der höheren und höchsten Luftschichten" werden an verschiedenen Stellen manche aus den Beobachtungen gezogenen Schlüsse durch mathematische Betrachtungen gestützt. Lp.

O. Zanotti Bianco. Intorno ad alcuni recenti lavori italiani sulla costituzione fisica dell' atmosfera, fondate sulle osservazioni di James Glaisher. — Contribuzione alla storia della meteorologia. Torino Atti **35**, 405-427.

Eine zusammenhängende Darstellung der Leistungen von Saint-Robert, Siacci und de Marchi (vergl. F. d. M. **28**, 833, 1897 u. **29**, 822, 1898). Lp.

Fr. Exner. Ueber neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der atmosphärischen Elektricität. Meteor. Zeitschr. **17**, 529-543.

I. Allgemeines. II. Jährliche Periode. III. Tägliche Periode. IV. Aenderung des Potentialgefälles mit der Höhe. V. Verschiedenes. VI. Theorien. (Exner, Elster und Geitel, Brillouin, Braun, Le Cadet.) VII. Desiderata. — Litteratur. Lp.

O. Zoth. Ueber den Einfluss der Blickrichtung auf die scheinbare Grösse der Gestirne und scheinbare Form des Himmelsgewölbes. Pflüger's Arch. f. Physiol. **78**, 363ff. [Meteor. Zeitschr. **17**, 468-470.]

Objecte, für deren Entfernungs- und Grössenschätzung keine Anhaltspunkte vorliegen, erscheinen bei erhobener Blickrichtung kleiner als bei horizontaler oder gerader. Lp.

H. Mache. Ueber die Regenbildung. Wien. Ber. **109**, 793-798; Meteor. Zeitschr. **17**, 554-557.

Befindet sich ein Wassertropfen in übersättigter Atmosphäre, so giebt es einen kritischen Radius ϱ von der Beschaffenheit, dass sich auf der durch ihn definirten Wasserkugel eben capillarer Ueberdruck und Uebersättigungsdruck das Gleichgewicht halten. Alle Wasserkugeln von anderem als dem kritischen Radius können sich in der übersättigten Atmosphäre nicht im Gleichgewichte halten. Entweder wachsen sie durch Condensation, oder sie werden durch Verdampfung kleiner, je nachdem ihr Radius grösser oder kleiner als ϱ ist. Diese Gedanken werden rechnerisch genauer verfolgt. C. T. R. Wilson hat in Lond. R. S. Proc. 1897 den kritischen Radius ϱ von der Grössenordnung 10^{-7} cm gefunden. Der Verf. berechnet ihn als im allgemeinen erheblich grösser. Lp.

Weitere Litteratur.

F. Bolte. Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Stuttgart: J. Maier. VIII + 196 S. gr. 8°.

durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung. Herausgegeben von H. und O. Wiener. Leop. Nova Acta **78,** Nr. 1. XVIII + 239 S. gr. 4°.

F. J. Studnička. Wetterprognosen und Witterungsperioden. Meteorologische Causerie. Prag, im Selbstverlage des Verfassers 1900. (32 S.)
Sda.

Hildebrandsson, H. Hildebrand et Teisserenc de Bort, Léon. Les bases de la météorologie dynamique. Historique. État de nos connaissances. 1re et 2e livraison. Paris: Gauthier-Villars. 184 S. gr. 8°. [Meteor. Zeitschr. **17,** 428-429.]

O. Neuhoff. Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung. Abhandl. des königl. preuss. meteor. Inst. **1,** 35 S. 4°.

Anhang.

E. Pascal. Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisirte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp. Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 638 S. 8°.

Das italienische Original ist im Jahrbuche zweimal angezeigt worden, nämlich **29**, 827, 1898 und **30**, 855, 1899. Es ist daher nicht nötig, auf die Eigenart des Repertoriums hier noch einmal näher einzugehen. Dass die Mathematiker in Deutschland dieses Werk für nützlich erachten, geht aus dem Umstande hervor, dass Fr. Engel in Leipzig und Loewy in Freiburg i. B. sich an der Durchsicht der Druckbogen beteiligt haben, und dass der letztere dem Verf. für seine neue Bearbeitung zahlreiche Mitteilungen zur Verfügung gestellt hat. Der grosse Vorzug der Schrift besteht in der Handlichkeit und der damit verbundenen Uebersichtlichkeit des Stoffes. Das alphabetische Sachregister am Ende des Bandes ermöglicht das schnelle Auffinden eines gesuchten Gegenstandes. Das vorangehende alphabetische Namenregister giebt einen guten Ueberblick über die citirte Litteratur.

In Bezug auf den aufzunehmenden Stoff sind natürlich Meinungsverschiedenheiten möglich; mancher wird dieses und jenes vermissen, anderes für entbehrlich halten. Ebenso werden die Ansichten über die anzuführenden Schriften weit von einander abweichen. Im allgemeinen wird man den Takt anerkennen müssen, mit dem der Verf. seine Auswahl getroffen hat. Ist erst ein solches Werk als Grundlage vorhanden, so sind Ergänzungen verhältnismässig leicht anzubringen. Der Nutzen eines derartigen Repertoriums wird aber jedem einleuchten, der zur eigenen Orientirung schon oft vergebliche oder langwierige Spürversuche gemacht hat. Lp.

und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner (Paris: Gauthier-Villars). XIV u. 316 S. Lex. 8°.

Dieses neue Vocabularium enthält mehr, als der Titel verspricht. Aus den reichen Sammlungen entstanden, die der Verf. seit mehr als 30 Jahren angelegt hat, giebt das Werk nicht bloss die Vocabel mit ihrer Uebersetzung, „sondern auch alle zusammengesetzten Kunstausdrücke, also vollständige mathematische Begriffe nebst den entsprechenden fremdsprachlichen Ausdrücken. Ferner ist durch Angabe der Disciplinen, in welche die Kunstausdrücke gehören, dem Leser gleichsam schon eine vorläufige Orientirung über den ihm vielleicht gänzlich fremden Begriff gegeben. Endlich habe ich mehrfach kurze historische Angaben über den Ursprung des Kunstausdruckes, sei es über den Schöpfer des betreffenden Begriffes oder den, der ihn erweitert oder begründet hat, sowie die Zeit der Entstehung hinzugefügt."

Da, wie in der Vorrede hervorgehoben wird, die Nomenclatur in der Mathematik sich ungemein erweitert hat, so wird es jedem Mathematiker schon begegnet sein, dass ein terminus technicus in einer Schrift befremdend wirkt, weil er in ungewöhnlichem Sinne gebraucht ist. Es fehlt zur Zeit an Hülfsmitteln, um ohne Mühe den Sinn eines solchen Ausdrucks rasch festzustellen. Die im Entstehen begriffene Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften soll in dem jedem Bande beizufügenden Namenregister den Wegweiser liefern. Inzwischen kann jeder Mathematiker zufrieden sein, das vorliegende Vocabularium als kleinen Ersatz für das langsam entstehende Register der Encyklopädie gebrauchen zu können. Auf diesen Nutzen des Werks, der aus dem lexikographischen Titel nicht erhellt, sei an dieser Stelle nachdrücklich hingewiesen. Denn wenn man auch keine grösseren Erklärungen erhält, so genügt oft ein Hinweis auf einen oder den anderen Umstand zur Aufklärung, und solange wir überhaupt nichts Besseres haben, müssen wir dem Verf. für alles Gebotene dankbar sein. Lp.

L. Torres. Sur les machines à calculer. Extrait. C. R. **130**, 472-474. Rapport sur un Mémoire de M. Torres, intitulé „Machines à calculer". Ibid. 874-876.

Auszug aus einer Abhandlung, die in dem Recueil des Savants étrangers veröffentlicht werden soll, und Bericht über diese Abhandlung (s. C. R. **121**, 245-248; F. d. M. **26**, 124, 1895). Die Construction einer algebraischen Formel beruht darauf, dass alle in der Formel angezeigten Operationen für sich besonders construirt werden, je in einem besonderen Apparat, und dass alsdann alle diese Apparate wieder unter sich mechanisch verbunden werden. Als Beispiel wird ausgeführt, wie man die Gleichung

$$a = \frac{A_1 x^{n_1} + A_2 x^{n_2} + A_3 x^{n_3} + A_4 x^{n_4} + A_5 x^{n_5}}{A_6 x^{n_6} + A_7 x^{x_7} + A_8 x^{n_8}}$$

construiren kann. Unter den ausgeführten Modellen befindet sich eins, das die reellen Wurzeln der trinomischen Gleichungen zu berechnen dient. In der Abhandlung werden aber auch die theoretischen Anweisungen gegeben, um eine Maschine herzustellen, die Gleichungen mit 8 Gliedern aufzulösen imstande ist. Näheres wird später die vollständig veröffentlichte Abhandlung lehren. M.

Pierre Weiss. Sur un nouveau cercle à calculs. C. R. **131**, 1289-91.

Beschreibung einer Rechenmaschine, die sich durch eine sehr einfache Construction und zuverlässige Handlichkeit vor den bisherigen auszeichnen soll. Sie besteht aus einem Kreise von 16 cm Durchmesser, der eine einzige logarithmische Gradteilung trägt, die sich beliebig oft an sich selbst vorbeischieben lässt, gleich einem unendlich langen logarithmischen Lineal. Zwei Nadeln, die Indicatrix und die Multiplicatrix, bewegen sich längs der Teilung; die erste zieht die zweite mit sich fort, doch kann sich die letztere unabhängig von der ersten bewegen. Das Princip beruht darauf, dass je zwei Peripheriepunkte, die um einen constanten Winkel von einander abstehen, ein constantes Verhältnis haben. M.

A. Beghin. Règle à calculs (modèle spécial), permettant de résoudre, par un seul mouvement de la réglette, toutes les opérations effectuées par les autres règles, avec une approximation deux fois plus grande et en plus principalement: le produit de trois facteurs, le quotient d'un nombre par le produit de deux autres. Assoc. Franç. Boulogne (1899) **28**, 142-149.

Der langatmige Titel macht ein genaueres Eingehen auf den Inhalt unnötig. Lp.

G. Meslin. Sur une machine à résoudre les équations. Journ. de Phys. (3) **9**, 339-343.

Vergl. den Bericht über die gleichbetitelte Note des Verf. in C. R. **130**, 888-891, auf S. 101 dieses Bandes. Lp.

R. Heger. Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höheren Schulen. Leipzig: B. G. Teubner. 112 S. 8°.

Den fünfstelligen gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen bis 10000 sind siebenstellige Logarithmen der Zahlen von 100000-110000 angefügt. Die Anordnung der goniometrischen Logarithmen ist neu. Für die ersten 6 Grade sind dieselben von 10 zu 10 Secunden, dann auf nur 17 Seiten für die Winkel von 6—90° von Minute zu Minute gegeben.

Der Tafel der natürlichen Functionen ist eine Arcus-Spalte beigefügt. Ausserdem enthält das Buch Additions- und Subtractions-Logarithmen und Quadraten- und Kubentafeln. Die 8. bis 29. Tafel dienen der Auflösung numerischer Gleichungen durch Annäherung, d. h. Tafeln für die Werte der Functionen x^3+x und x^3-x, ferner für Parabelausschnitte, Cylinder und Umdrehungsparaboloid im Kegel, Kugelabschnitte, Kegel in der Kugel, Kegel im Cylinder, Kegel um Halbkugel, Cylinder und Kegel in der Halbkugel, zwei gleich hohe Cylinder in der Halbkugel und im Kegel, Moment eines um die Kugel vom Halbmesser 1 beschriebenen Kegels, und Hülfstafeln für andere Aufgaben aus der Geometrie, der Statik etc., die auf Gleichungen dritten Grades führen, sowie auch auf höhere. Um auch praktische Aufgaben aus der Rentenrechnung lösen zu können, ist eine Tafel mit den Grundzahlen für Lebensversicherung beigefügt. Das Buch wird sich beim Unterricht an höheren Schulen sehr nützlich erweisen. M.

C. Juling. Fünfstellige Logarithmen-Tafeln für Schüler. Leipzig: F. A. Berger. 144 S. kl. 8°.

Ausser den Mantissen der Zahlen 1-9999 und den Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute enthält das Büchlein die Logarithmen der Zahlen von 1-100, Logarithmen des Zinsfactors, siebenstellige Werte der Sinus und Tangenten von 0 bis 60 Secunden und die natürlichen Logarithmen der Primzahlen von 1-499. Der Druck ist klar. M.

F. G. Gauss. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. Halle a. S.: Eugen Strien. 96 S. 8°.

Die Gauss'schen Tafelwerke erfreuen sich schon lange einer grossen Beliebtheit wegen ihrer praktischen Einrichtung. Die vorliegende Schulausgabe der vierstelligen Logarithmen schliesst sich ihnen würdig an. Die Seiten 86-96 enthalten Tafeln der verschiedenartigsten Naturconstanten. M.

D. Hilbert. Problèmes mathématiques. Ens. math. **2**, 349-354.

Auszug aus der grossen Abhandlung des Verf. (vergl. das Referat S. 68 dieses Bandes). Lp.

Dr. Joseph Krist †. Meteor. Zeitschr. **17**, 167-169.

Geb. 5. April 1830 zu Altendorf (Bezirk Römerstadt, Mähren), besuchte das Gymnasium seines Geburtsortes und das in Olmütz, studirte in Wien Mathematik und Physik, wurde Lehrer an der Staats-Oberrealschule in Ofen (1855-1860), dann am Schottenfeld in Wien bis 1869, wo er Landesschulinspector wurde, war ausserdem Lehrer des Kronprinzen Rudolf (1866-1875) und der Erzherzogin Gisela (1867-1872), trat

wegen eines schweren Nervenleidens 1877 in den Ruhestand und lebte seitdem zurückgezogen in Graz. Von mathematischen Schriften seien hier genannt: „Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte“ (Programmabhandlung, Ofen). „Ueber die Namen der Algebra“ (Pr. Wien, 1861). Andere Veröffentlichungen gehören der Physik, der Meteorologie und den beschreibenden Naturwissenschaften an, so die „Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen“, die 1895 in 17. Auflage erschienen sind. Er starb am 15. December 1900. Lp.

A. Woeikoff. Al. v. Tillo†. Meteor. Zeitschr. **17,** 79-80.

Geb. 25. November 1839 in Kiew, gest. 11. Januar 1900 in St. Petersburg; machte sich verdient um Russland besonders durch seine hypsometrischen Arbeiten, dann aber auch durch seine Beiträge zur Klimatologie und zur Kenntnis des Erdmagnetismus. Lp.

A. Cunningham. Period lengths of circulates. Messenger (2) **29,** 145-179.

Der Aufsatz nimmt die Untersuchungen von B. Reynolds auf betreffs der Perioden für Brüche mit dem Nenner N, wenn die Basis des Zahlensystems eine beliebige Zahl r ist (vergl. F. d. M. **29,** 137, 1898) und stellt in sachgemässer Weise diejenigen Sätze aus der Theorie der Potenzreste und der Congruenzen zusammen, welche bei der Beurteilung der Entwickelungen in periodische Brüche mit Nutzen gebraucht werden. Ausserdem werden aber zahlreiche Kriterien und Regeln aufgestellt, und zum Schlusse werden (S. 166-179) Hülfstafeln für die Entwickelungen gegeben. Der kenntnisreiche Verf. hat die auf den Gegenstand bezügliche Litteratur in umfassender Weise benutzt. Die Natur der Untersuchung bringt es mit sich, dass der Inhalt aus einer Aneinanderreihung vieler Einzelergebnisse besteht, die sich zur Wiedergabe im Referate nicht eignen. In Messenger (2) **30,** 60 findet sich ein Verzeichnis einer Reihe von Druckfehlern. Lp.

D. Biddle. A further method of factorizing composite numbers, when it is known that $N=(2\Delta p+1)(2\Delta q+1)$, where Δ is a given prime >3. Messenger (2) **30,** 66-70.

Der Verf. gründet auf die im Titel angegebene Form von N ein tastend fortschreitendes Verfahren zur Aufsuchung der Factoren von N und beschäftigt sich dann eingehender mit der Zerlegung von $N=6n\pm 1$. Als Beispiel behandelt er die Zahl $N=329\,554\,457=1123.\ 293459$. Lp.

D. Biddle. An extension of the methods of factorizing composite numbers. Messenger (2) **30,** 98-100.

Als Fortsetzung der in Messenger (2) **28,** 116-149 (F. d. M. **29,**

im vorstehenden Referate Andeutungen gegeben sind, werden einige Bemerkungen gemacht, welche Abkürzung der Rechnungen bezwecken.

Lp.

E. Hernández. Suma de los recíprocos de todos los divisores de un número. Progreso mat. (2) **2,** 94-96.

Der Verf. bestimmt die Summe der reciproken Werte aller Divisoren einer gegebenen ganzen Zahl.

Lp.

M. Vecchi. Sulla funzione $\zeta(s)$ di Riemann. I. Carattere analitico della funzione $\zeta(s)$. II. Gli zeri della funzione $\zeta(s)$. III. Il problema della distribuzione dei numeri primi. Paris: A. Hermann 1899-1900. 23 + 12 + 14 S. 4°.

In dieser Arbeit bibliographischen Charakters werden der Reihe nach die Abhandlungen kurz analysirt, welche die Erforschung der berühmten Function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$$

sowie auch die Anwendung derselben auf das Problem der Verteilung der Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe behandeln.

La.

É. Picard. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et sur la généralisation du problème de Dirichlet. C. R. **130,** 1088-1094.

Der Verf. giebt eine ausführlichere und vollständigere Darstellung seiner Methode zur Integration von $\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c$ bei vorgeschriebenen Randwerten durch successive Integration von

$$\Delta u_{n+1} = a\frac{\partial u_n}{\partial x} + b\frac{\partial u_n}{\partial y} + c u_n, \; (u_0 = 0, \; u = u_1 + u_2 + \cdots).$$

Hsb.

W. M. Hicks. The expression of $P_n(\cos 2\theta)$ in terms of $P_n(\cos\theta)$. Messenger (2) **30,** 111-112.

Ableitung der Formel:

$$P_n(\cos 2\theta) = \sum_0^n (-1)^r 2^{n-r} \frac{4n-4r+1}{4n-2r+1} \frac{A(r)A(n-r)}{A(2n-r)} P_{2n-2r}(\cos\theta)$$

$$= (-1)^n \sum_0^n (-1)^p 2^p \frac{4n+1}{2n+2p+1} \frac{A(n-p)A(p)}{A(n+p)} P_{2p}(\cos\theta),$$

wo $A(m) = 1.3.5 \ldots (2m-1)/m!$ ist. Lp.

Graphische Bestimmung des Umfanges und des Flächeninhaltes eines Kreises. Mitt. üb. Art. u. Genie **31,** 417-418, 603-604, 744-745, 827.

Bei Gelegenheit der Angabe angenäherter Constructionen für den Umfang eines Kreises wird das bekannte Verfahren von Kochański empfohlen, und auf Anfrage nach den Lebensumständen dieses Mathematikers werden die folgenden Angaben gemacht: Adamas Adamandus K., geb. 5. Aug. 1631 zu Dobrzyn, war 1659 in Mainz, 1660 in Florenz, wurde 1663-1672 in Prag, dann in Olmütz Professor der Mathematik, 1677 in Breslau, schliesslich in Warschau „S. Regiae Poloniae Maiestatis Mathematicus", gest. 19. Mai 1700 als Kurgast in Teplitz. Lp.

A. Ritter v. Arbter. Ueber eine einfache Construction der Ellipse und ihrer Fusspunktcurve. Mitt. üb. Art. u. Genie **31,** 719-731.

Auf einem Durchmesser OB eines Kreises werde ein Punkt A angenommen, und es sei $OA = a$, $AB = b$. Man ziehe durch A eine beliebige Sehne DE, setze $DA = m$, $AE = n$. Auf der Sehne OD trage man $ON = n$, auf OE ebenso $OM = m$ ab. Dann ist der Ort von M und N die Ellipse, welche O als Centrum, die auf OB fallende Axe gleich $2a$, die in O auf OB senkrechte Axe gleich $2b$ hat. Es ist immer $mn = ab$, und wenn $\sphericalangle DOB = \alpha$, $EOB = \beta$ gesetzt wird, so ist $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = b/a$. Radien m, n einer Ellipse, welche diese Beziehung zu einander haben, nennt der Verf. „complementar". Erzeugt man eine Ellipse durch Bewegung eines festen Punktes auf einer begrenzten Geraden, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiten, so sind die Schenkel des Winkels zwei „complementare Durchmesser" der Ellipse. Lp.

Stuyvaert. Sur la polarité dans les courbes gauches du quatrième ordre (première espèce) et du troisième ordre. Belg. Bull. Sciences 1900, 87-98.

F. Deruyts. Rapport. Ibid. 26-27.

Beweise zahlreicher bekannter und einiger neuer und interessanter Theoreme, über die sich aber schwer in Kürze berichten lässt.

Mn. (Lp.)

BREMIKER's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Neu bearbeitet von Th. Albrecht. 13. Ausg. Berlin: Nicolai's Verl. XVIII + 598 S. gr. 8°.

S. GUNDELFINGER. Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen. Leipzig: Veit & Co. IV + 31 S. 4°.

L. JELÍNEK. Logarithmische Tafeln für Gymnasien und Realschulen. 4. Aufl. Samt Anleitung. Wien: A. Pichler's Witwe & Sohn. IV + 157 S. gr. 8°.

H. KÜHNE. Mathematisch technische Tabellen für den Schulgebrauch mit besonderer Rücksicht auf die Benutzung bei Prüfungen. Dortmund: Ruhfus. 48 S. gr. 8°.

F. W. KÜSTER. Logarithmische Rechentafeln für Chemiker. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. 2. Aufl. Leipzig: Veit & Co. 75 S. 12°.

W. LIGOWSKI. Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer und nautischer Tafeln, nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie. (Nautische Tafeln). 4. Aufl. Kiel: Universitätsbuchh. XXIII + 212 + 48 S. gr. 8°.

M. v. ROHR. Die Logarithmen der Sinus und Tangenten für 0° bis 5° und der Cosinus und Cotangenten für 85° bis 90° von Tausendstel zu Tausendstel Grad. Als Ergänzung zu C. Bremiker's fünfstelligen Logarithmentafeln herausgegeben. Berlin: Weidmann. XX S. gr. 8°.

A. SCHÜLKE. Vierstellige Logarithmentafeln, nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. 3. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. II + 18 S. Lex. 8°.

JUL. WEISBACH. Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus, sowie der vielfachen Sinus versus von kleinen Winkeln, nebst Tafeln der einfachen Tangenten. 6. Ausgabe. Berlin: Weidmann. 28 S. gr. 8°.

Lösungen der Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit dem Jahre 1867. Nachträge (1895-1897). München: E. Pohl. 4, 4, 6, 7, 8 S. gr. 8°.

H. C. E. MARTUS. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungeu an deutschen höheren Schulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse (IV. Teil) zu einem Uebungsbuche vereint. 3. Teil: Aufgaben. Dresden: C. A. Koch. VIII + 172 S. gr. 8°.

G. DEL PRETE. Le omografie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. Batt. G. **38**, 40-62. Schluss der Abhandlung; vergl. F. d. M. **30**, 496, 1900.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite	110	Zeile	14	von	oben	lies	E. B. Elliott	statt	E. P. Elliot.
„	157	„	19	„	„	„	G. Vivanti	„	E. Vivanti.
„	206	„	2	„	unten	„	C. Störmer	„	E. Störmer.
„	353	„	14	„	„	„	Es ergiebt sich dies durch Weglassung.		
„	646	„	6	„	oben	„	dimensione	statt	dimensioni.
„	779	„	2	„	„	„	phénomènes	„	phénomèmes.
„	832	„	9	„	„	„	H. A. Lorentz	„	G. A. Lorentz.
„	894	„	8	„	unten	„	G. Holzmüller	„	H. Holzmüller.


3 2044 102 936 697